



Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 11 : Πίνακες Πραγματικών Αριθμών

Στέφανος Σγαρδέλης
Τμήμα Βιολογίας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Πίνακες Πραγματικών Αριθμών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα ενότητας

(1 από 2)

1. Πίνακες Πραγματικών Αριθμών
2. Ορισμοί
3. Συμβολισμοί Πινάκων
4. Συμβολισμός στοιχείων πίνακα
5. Ισότητα Πινάκων
6. Πρόσθεση Πινάκων
7. Πολλαπλασιασμός Πίνακα με Πραγματικό Αριθμό
8. Πολλαπλασιασμός Διανυσμάτων
9. Πολλαπλασιασμός Πινάκων
10. Περιορισμοί Πολλαπλασιασμού Πινάκων
11. Τετραγωνικοί Πίνακες
12. Τετραγωνικοί Πίνακες: Ορισμοί



Περιεχόμενα ενότητας

(2 από 2)

13. Ιδιότητες πολλαπλασιασμού Πινάκων
14. Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων
15. Αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα
16. Αντιστροφή Πίνακα
17. Αντιστροφή πίνακα 2×2
18. Χρήση του Αντιστρόφου στη Λύση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων
19. Ομογενές Σύστημα
20. Ακολουθίες Διανυσμάτων
21. Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές
22. Μέθοδος εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων
23. Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Λεκτική Περιγραφή
24. Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή



Περιεχόμενα ενότητας

(2 από 2)

25. Μαρκοβιανά vs. Μη Μαρκοβιανά Συστήματα
26. Μαρκοβιανά vs. Μη Μαρκοβιανά Συστήματα: Φυλογένεση
27. Μοντέλο Leslie
28. Μοντέλο Leslie: Πίνακας Μετάβασης
29. Γενική μορφή πίνακα Leslie
30. Θεωρία παιγνίων και ηθολογία ζώων (Maynard Smith)
31. Ειρηνική διευθέτηση (Περιστέρι, D)
32. Άμεση επίθεση (Γεράκι, H)
33. Στρατηγική παλικαρά (B)
34. Στρατηγική αντεκδίκησης (R)
35. Βαθμολογία
36. Πίνακας Κερδών
37. Μοντέλο παιγνίου



Σκοποί ενότητας

- Στην Ενότητα 11 παρουσιάζονται οι πίνακες των πραγματικών αριθμών (ορισμοί, πράξεις και εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων) και μια σειρά παραδειγμάτων εφαρμογής των πινάκων.



Πίνακες Πραγματικών Αριθμών

Σύστημα 10 εξισώσεων

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 - 5x_4 + x_5 + x_6 - 2x_7 + 3x_8 - 5x_9 + x_{10} = 9 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 5x_7 + 2x_8 - x_9 + 6x_{10} = 18 \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 + x_5 + 4x_6 - 8x_7 + x_8 - 4x_9 - 2x_{10} = -12 \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 6x_4 + 4x_5 - x_6 + 9x_7 - 2x_8 - 3x_9 + 3x_{10} = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9x_4 + 2x_5 + 3x_6 + x_7 + 4x_8 - 7x_9 + 6x_{10} = -6 \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 6x_4 + 2x_5 - 3x_6 + 8x_7 + 9x_8 - 3x_9 + 5x_{10} = 5 \\ -4x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 7x_4 + x_5 + 2x_6 + 5x_7 - 6x_8 + 4x_9 + 9x_{10} = 15 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 6x_4 + x_5 + x_6 + 2x_7 - 2x_8 - 6x_9 + x_{10} = -24 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 7x_4 + x_5 + 2x_6 - 5x_7 + x_8 - x_9 - x_{10} = -12 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 - 3x_7 + 3x_8 - x_9 + x_{10} = 6 \end{cases}$$

Και μια ισοδύναμη διατύπωσή του

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{K}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -5 & 1 & 1 & -2 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & -7 & 3 & 2 & 5 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -4 & -2 & 7 & 1 & 4 & -8 & 1 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & 8 & -6 & 4 & -1 & 9 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & -9 & 2 & 3 & 1 & 4 & -7 & 6 \\ -1 & 6 & -4 & 6 & 2 & -3 & 8 & 9 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & 7 & -7 & 1 & 2 & 5 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & -7 & -6 & 1 & 1 & 2 & -2 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & -4 & -7 & 1 & 2 & -5 & 1 & -1 & -1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ -12 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \\ 15 \\ -24 \\ -12 \\ \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 - 2x_6 - 3x_7 + 3x_8 - x_9 + x_{10} = 6$$



Ορισμοί

- **Πίνακας (matrix):** Ορθογώνια διάταξη στοιχείων με M γραμμές και N στήλες. Τα στοιχεία μπορεί να είναι αριθμοί, μεταβλητές, συναρτήσεις.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3.6 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

- **Διαστάσεις Πίνακα:** Ο αριθμός των στηλών και των γραμμών του πίνακα.
- Πίνακες που αποτελούνται από μία μόνο σειρά ή μία μόνο στήλη ονομάζονται **διανύσματα (vectors)**.



Συμβολισμοί Πινάκων (1 από 2)

- **Πίνακας** : Κεφαλαία έντονα Λατινικά
- **Διάνυσμα**: Πεζά έντονα Ελληνικά, παράδειγμα **A, B, ξ, η**
- **Δείκτες**: ακέραιοι ή σύμβολα που παριστούν ακεραίους (m, n, \dots)
- Σε πίνακες δύο διαστάσεων ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στον αριθμό σειρών και ο δεύτερος στον αριθμό στηλών: Παράδειγμα $A_{m,n}$ είναι πίνακας με m γραμμές και n στήλες.



Συμβολισμοί Πινάκων (2 από 2)

2X5 πίνακας πραγματικών

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & -2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Διάνυσμα γραμμή (1X4)

a b c d

Διάνυσμα στήλη (4X1)

$$\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

2X2 πίνακας συναρτήσεων

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(x) \\ \sin(x) & 1 \end{pmatrix}$$



Συμβολισμός στοιχείων πίνακα

- Στοιχεία Πίνακα:

Πεζά λατινικά με δείκτες γραμμή, στήλη

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Ισότητα Πινάκων

- Δύο πίνακες είναι ίσοι αν έχουν ίδιες διαστάσεις και τα στοιχεία τους είναι ίσα ένα προς ένα.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 2, a_{12} = 4, a_{13} = -1$$



Πρόσθεση Πινάκων

- Οι δύο προσθετέοι πίνακες να έχουν την ίδια διάσταση.
- Το αποτέλεσμα είναι ένας νέος πίνακας ίδιας διάστασης και στοιχεία ίσα με το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των προσθετέων πινάκων.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3.6 & 7 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+3 & 5+5 & 0+0 \\ 3.6+0 & 7+1 & -6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 0 \\ 3.6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$



Πολλαπλασιασμός Πίνακα με Πραγματικό Αριθμό

- Το γινόμενο $\lambda \mathbf{A}$ όπου λ πραγματικός αριθμός είναι πίνακας \mathbf{B} ίδιας διάστασης με τον \mathbf{A} και με όλα τα στοιχεία του να είναι τα λ -πλάσια των στοιχείων του \mathbf{A} .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3.6 & 7 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 10.8 & 21 & -18 \end{pmatrix}$$



Πολλαπλασιασμός Πινάκων (1 από 2)

- Το γινόμενο **AB** ορίζεται μόνο όταν οι στήλες του **A** είναι ίσες με τις γραμμές του **B**.
- Το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας με γραμμές όσες οι γραμμές του **A** και στήλες όσες οι στήλες του **B**.
- Ανάγεται σε πολλαπλασιασμό διανυσμάτων γραμμή **X** στήλη.



Πολλαπλασιασμός Πινάκων (2 από 2)

1η γραμμή X 1η στήλη = Στοιχείο 1ης γραμμής, 1ης στήλης

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3) + 0 \cdot 2 & - \\ - & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

1η γραμμή X 2η στήλη = Στοιχείο 1ης γραμμής, 2ης στήλης

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ - & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3) + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0(-3) + (-1)2 & 0 \cdot 0 + (-1)1 \\ 1(-3) + 5 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -2 & -1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$



Περιορισμοί Πολλαπλασιασμού Πινάκων

- Οι πολλαπλασιασμοί $A_{m,n} \cdot B_{n,k} = C_{m,k}$ και $A_{m,n} \cdot B_{n,1} = C_{m,1}$ είναι εφικτοί.
- Ο πολλαπλασιασμός $B_{n,k} \cdot A_{m,n}$ δεν μπορεί να γίνει.

- Παράδειγμα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,2} \times B_{3,2} = \text{αδύνατο}$$

$$B_{3,2} \times A_{2,2} = C_{3,2}$$



Τετραγωνικοί Πίνακες

$$\mathbf{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Τετραγωνικοί Πίνακες: Ορισμοί (1 από 4)

- Κύρια διαγώνιος

$$\mathbf{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Τετραγωνικοί Πίνακες: Ορισμοί (2 από 4)

- Άνω
τριγωνικός

$$\mathbf{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Τετραγωνικοί Πίνακες: Ορισμοί (3 από 4)

- Διαγώνιος Πίνακας

$$\mathbf{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$



Τετραγωνικοί Πίνακες: Ορισμοί (4 από 4)

- Ταυτοτικός Πίνακας

$$I_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$



Ιδιότητες πολλαπλασιασμού Πινάκων

- Αν a, b είναι πραγματικοί αριθμοί και ορίζεται ο πολλαπλασιασμός πινάκων τότε:

$$\mathbf{A(BC)=(AB)C}$$

$$\mathbf{A(B+C)=AB+AC}$$

$$\mathbf{(B+C)A=BA+CA}$$

$$\mathbf{AI=IA=A}$$

$$\mathbf{(aA)(bB)=(ab)AB}$$



Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

$$Ax = c$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Ax = c$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}c$$

$$Ix = A^{-1}c$$

$$x = A^{-1}c$$



Αντίστροφος τετραγωνικού πίνακα

- Ένας τετραγωνικός πίνακας **B** ο οποίος δοθέντος ενός πίνακα **A** ίδιας διάστασης επαληθεύει τη σχέση **AB=BA=I** λέγεται αντίστροφος του **A** και συμβολίζεται ως **A⁻¹**.
- Ένας μη τετραγωνικός πίνακας δεν μπορεί να αντιστραφεί.



Αντιστροφή Πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ae + bg = 1, af + bh = 0, ce + dg = 0, cf + dh = 1$$



Αντιστροφή πίνακα 2X2 (1 από 2)

$$ae+bg=1, af+bh=0, ce+dg=0, cf+dh=1$$

- $e=d/(ad-bc)$
- $f=-b/(ad-bc)$
- $g=-c/(ad-bc)$
- $h=a/(ad-bc)$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ορίζουσα

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Επί -1



Αντιστροφή πίνακα 2X2 (2 από 2)

- Υπάρχει αντίστροφος όταν η ορίζουσα δεν είναι μηδέν.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



Χρήση του Αντιστρόφου στη Λύση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων (1 από 2)

$$3X_1 + 5X_2 = 3$$

$$-X_1 + 2X_2 = 5$$

Το σύστημα γράφεται ως:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ή $A\chi = \kappa$

Θέλουμε να λύσουμε ως προς το χ .



Χρήση του Αντιστρόφου στη Λύση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων (2 από 2)

$$A\chi = \kappa$$

$$A^{-1}A\chi = A^{-1}\kappa$$

$$I\chi = A^{-1}\kappa$$

$$\chi = A^{-1}\kappa$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Ομογενές Σύστημα

- Το σύστημα εξισώσεων $Ax=0$ όπου 0 το μηδενικό διάνυσμα ονομάζεται ομογενές σύστημα.
- Αν σε ομογενές σύστημα με πίνακα συντελεστών A ισχύει ότι $|A| \neq 0$
- Τότε $x = A^{-1}0 = 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την μηδενική.



Ακολουθίες Διανυσμάτων

$$\xi_{\nu+1} = A \xi_{\nu} \quad \text{Αναδρομικός τύπος}$$

$$\xi_{\nu+2} = A \xi_{\nu+1} = A(A \xi_{\nu}) = A^2 \xi_{\nu}$$

.....

.....

$$\xi_{\nu+k} = A^k \xi_{\nu}$$



Παράδειγμα (1 από 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

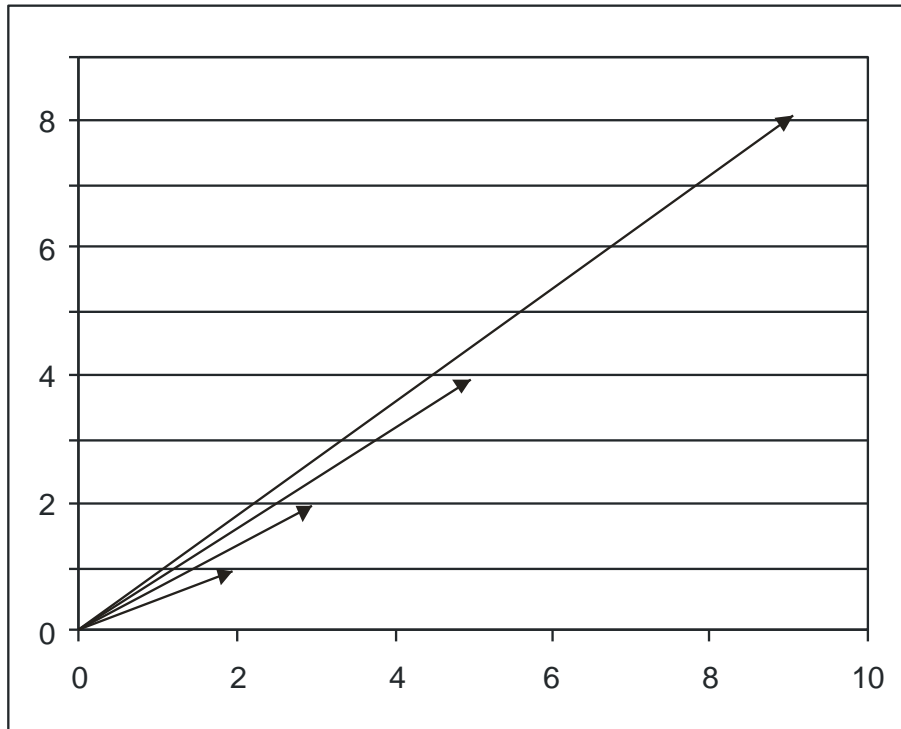
$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\xi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \end{pmatrix}$$



Παράδειγμα (2 από 3)



$$\binom{2}{1}, \binom{3}{2}, \binom{5}{4}, \binom{9}{8}, \binom{17}{16}, \dots, \binom{\xi+1}{\xi}$$



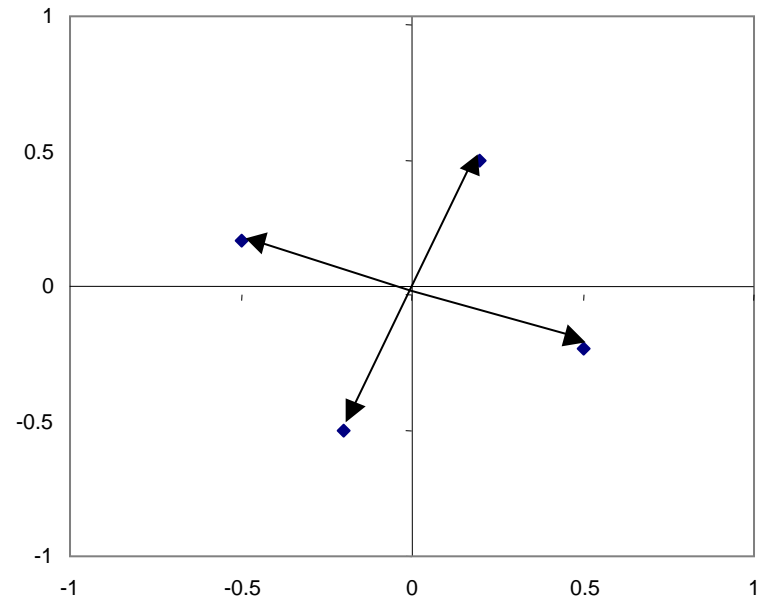
Παράδειγμα (3 από 3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.2 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.2 \end{pmatrix}$$



Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές

- Δοθέντος τετραγωνικού πίνακα \mathbf{A} υπάρχει μιγαδικός αριθμός λ και μιγαδικό διάνυσμα ξ τέτοια ώστε $\mathbf{A}\xi = \lambda\xi$.
- Το διάνυσμα ξ λέγεται ιδιοδιάνυσμα του πίνακα \mathbf{A} (eigenvector από τη γερμανική λέξη Eigen).
- Ο αριθμός λ λέγεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του πίνακα \mathbf{A} .
- Τα ξ και λ χαρακτηρίζουν με μοναδικό τρόπο τον πίνακα \mathbf{A} .
- Αν ξ ιδιοδιάνυσμα, τότε κάθε πολλαπλάσιο του είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα, αφού ισχύει ότι $\mathbf{A}(κξ) = λ(κξ)$.



Μέθοδος εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (1 από 4)

- Δοθέντος τετραγωνικού πίνακα $\mathbf{A}_{n,n}$ αναζητούμε αριθμό $\lambda \in \mathbb{C}$ και αντίστοιχα διανύσματα ξ ώστε να ισχύει:

$$\mathbf{A}\xi = \lambda\xi \text{ οπότε } \mathbf{A}\xi - \lambda\xi = \mathbf{0}$$

- Το διάνυσμα ξ είναι κοινός παράγοντας στον πολλαπλασιασμό από δεξιά, οπότε: $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$
- Η σχέση παριστά ομογενές σύστημα.
- Αν $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| \neq 0$

Τότε το σύστημα έχει την μοναδική λύση $\xi = \mathbf{0}$. Η μηδενική λύση δεν χαρακτηρίζει με μοναδικό τρόπο τον πίνακα \mathbf{A} .



Μέθοδος εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (2 από 4)

- Αν $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$
- Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις τύπου $\xi = \kappa\xi_0$.
- Υπάρχουν ορισμένες τιμές λ που μηδενίζουν την παραπάνω ορίζουσα. Αυτές είναι οι ζητούμενες ιδιοτιμές.
- Αν υπολογιστούν οι ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται αντικαθιστώντας την τις τιμές των ιδιοτιμών στο αρχικό σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$.



Μέθοδος εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (3 από 4)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|X - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \right| =$$

$$\left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{array} \right|$$

Χαρακτηριστική εξίσωση

$$\left| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{array} \right| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow (1-\lambda-2)(1-\lambda+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1 \text{ και } \lambda_2 = 3$$



Μέθοδος εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (4 από 4)

- Για κάθε ιδιοτιμή υπάρχει ένα ιδιοδιάνυσμα (συνοδεύον ιδιοδιάνυσμα).
- Για $\lambda_1 = -1$, $(A - \lambda_1 I)\xi = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 - (-1) & 1 \\ 4 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\xi_1 + \xi_2 \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2\xi_1 = -\xi_2 \Rightarrow \xi_2 = -2\xi_1$$

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = -2 \Rightarrow \xi = \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Επαναλαμβάνω με την άλλη ιδιοτιμή.



Παράδειγμα 1

(1 από 3)

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα

$$A = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$3 + 3\lambda + \lambda + \lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{6},$$

$$\lambda_2 = -2 - \sqrt{6}$$



Παράδειγμα 1

(2 από 3)

- Για την πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2 + \sqrt{6}$

$$\begin{pmatrix} -3 - (-2 + \sqrt{6}) & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 - (-2 + \sqrt{6}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-3 - (-2 + \sqrt{6}))\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 = 0$$

$$(-3 - (-2 + \sqrt{6}))\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 = 0 \text{ Άπειρες λύσεις}$$

$$\text{Θέτουμε αυθαίρετα } \xi_1 = 1 \Rightarrow$$

$$(-1 - \sqrt{6}) + \sqrt{2}\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}}$$



Παράδειγμα 1

(3 από 3)

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{6}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$



Παράδειγμα 2

(1 από 2)

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\alpha - \lambda)^2 - b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(\alpha - \lambda - b)(\alpha - \lambda + b) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = a - b,$$

$$\lambda_2 = a + b$$



Παράδειγμα 2 (2 από 2)

- Για την πρώτη ιδιοτιμή $\lambda_1 = a - b$

$$\begin{pmatrix} a - a + b & b \\ b & a - a + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b\xi_1 + b\xi_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\xi_1 + \xi_2 = 0$$



Παράδειγμα 3 (1 από 2)

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{2}{8} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} + \lambda + \lambda^2 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{2}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1+i}{2}, \lambda_2 = \frac{1-i}{2}$$



Παράδειγμα 3

(2 από 2)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)\xi_1 - \frac{1}{8}\xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{8}\xi_2 = 0 \Rightarrow$$

Για την πρώτη ιδιοτιμή

$$\xi_2 = \frac{-\frac{1}{2} - \lambda}{\frac{1}{8}} = 8\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)$$

$$\xi_2 = 8\left(-\frac{1}{2} - \frac{1+i}{2}\right) = 8\left(-\frac{2+i}{2}\right) = -4(2+i)$$



Παράδειγμα 4

- Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & a \\ -a & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{-a} \Rightarrow \lambda_1 = i\sqrt{a}, \lambda_2 = -i\sqrt{a}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\lambda \xi_1 + a \xi_2 = 0$$

$$\xi_1 = 1 \Rightarrow -\lambda + a \xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{\lambda}{a} \quad \xi = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i\sqrt{a}}{a} \end{pmatrix}$$



Ασκήσεις

- Άσκηση 1. Για ποιες τιμές του μ οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι α) αρνητικές, β) μιγαδικές, γ) φανταστικές;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$$

- Άσκηση 2. Για ποιες τιμές του μ οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι μιγαδικές;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+\mu & 1 \\ -\mu & 3 \end{pmatrix}$$

- Άσκηση 3. Να δείξετε ότι κάθε πίνακας της μορφής $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ με $\alpha \neq 0$ έχει φανταστικές ιδιοτιμές.
Έστω ο πίνακας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ και διάνυσμα $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τα διανύσματα:

$$\xi_1 = \xi_0 \mathbf{A}, \quad \xi_2 = \xi_1 \mathbf{A}, \quad \xi_3 = \xi_2 \mathbf{A}, \quad \xi_4 = \xi_3 \mathbf{A}$$

Αναπαραστήστε σε άξονες τα διανύσματα $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Τι παρατηρείτε;



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Λεκτική Περιγραφή

- Δεν υπάρχει περίπτωση να έχουν αίθριο καιρό για δύο συνεχόμενες μέρες.
- Μετά από αίθριο καιρό ή θα βρέχει ή θα χιονίζει.
- Αν βρέξει μια μέρα, θα βρέχει και την επόμενη στις μισές των περιπτώσεων.
- Το ίδιο συμβαίνει μετά από μια μέρα με χιόνι.
- Αν μετά από βροχή αλλάξει ο καιρός, τότε στις μισές των περιπτώσεων αλλαγής ο καιρός θα είναι αίθριος. Το ίδιο συμβαίνει μετά από μια μέρα με χιόνι.



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (1 από 9)

- **Βήμα 1^ο:** Ορίζω καταστάσεις (States). Τρεις καταστάσεις διακριτές μεταξύ τους:

Βροχή (συμβολικά B)

Χιόνι (συμβολικά X)

Αίθριος καιρός (συμβολικά A)

Με το χρόνο μεταβαίνουμε από την μια κατάσταση σε μια άλλη (ή και στην ίδια). Βήμα χρόνου η ημέρα

Μεταβάσεις

- Από B σε B Από X σε X Από A σε A
- Από B σε A Από X σε B Από A σε B
- Από B σε X Από X σε A Από A σε X



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (2 από 9)

- Βήμα 2ο: Σχηματίζω τετραγωνικό πίνακα με αριθμό στηλών (και γραμμών) όσες και οι καταστάσεις. Ο πίνακας αυτός ονομάζεται πίνακας μετάβασης. Στο παράδειγμα μας είναι πίνακας $P_{3,3}$

$$P = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

- Βήμα 3ο: Συμβατικά ορίζουμε ως είσοδο (Από) στον πίνακα τις στήλες και ως έξοδο (Σε) από τον πίνακα τις γραμμές του.

$$P = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Από} \\ \downarrow \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \text{Σε} \end{matrix}$$



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (3 από 9)

- Βήμα 4ο : Δηλώνουμε σε κάθε στήλη και γραμμή την κατάσταση που αντιστοιχεί

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} B & A & X \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array}$$

και σε κάθε κελί τοποθετούμε την πιθανότητα να μεταβούμε από μια κατάσταση A σε μια κατάσταση B.



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (4 από 9)

- Δεν υπάρχει περίπτωση να έχουν αίθριο καιρό για δύο συνεχόμενες μέρες.
- Μετά από αίθριο καιρό ή θα βρέχει ή θα χιονίζει.

Από αίθριο καιρό

	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>X</i>
<i>B</i>	1/2	1/2	1/4
<i>A</i>	1/4	0	1/4
<i>X</i>	1/4	1/2	1/2



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (5 από 9)

- Αν βρέξει μια μέρα, θα βρέχει και την επόμενη στις μισές των περιπτώσεων.

Το ίδιο συμβαίνει μετά από μια μέρα με χιόνι.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccc} & B & A & X \\ \hline B & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ A & 1/4 & 0 & 1/4 \\ X & 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (6 από 9)

- Αν μετά από βροχή αλλάξει ο καιρός, τότε στις μισές των περιπτώσεων αλλαγής ο καιρός θα είναι αίθριος.
Το ίδιο συμβαίνει μετά από μια μέρα με χιόνι.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccc} & B & A & X \\ \hline B & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ A & 1/4 & 0 & 1/4 \\ X & 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$


Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (7 από 9)

- Ο πίνακας P είναι στοχαστικός.

$$P = \begin{array}{c|ccc} & B & A & X \\ \hline B & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ A & 1/4 & 0 & 1/4 \\ X & 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

- Ένας πίνακας μετάβασης στον οποίο το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης (Γενικότερα εισόδου) ισούται με την μονάδα θα λέγεται **στοχαστικός πίνακας μετάβασης**.
- Σε ένα στοχαστικό πίνακα όλα τα στοιχεία του είναι πιθανότητες .



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (8 από 9)

- Ο πίνακας μετάβασης περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες για τον καιρό στη χώρα του Οζ.
- Επιτρέπει προβλέψεις για το μέλλον αν είναι γνωστή η παρούσα κατάσταση του συστήματος.
- Έστω ότι σήμερα έχει αίθριο καιρό.

Τι καιρό θα έχει αύριο;

Πόσες μέρες πρέπει να περάσουν (κατά μέσο όρο) ώστε να ξαναδούμε αίθριο καιρό; (χρόνος επαναφοράς)

Στη διάρκεια μιας μεγάλης χρονικής περιόδου πόσες μέρες θα βρέχει;



Ο καιρός στη χώρα του Οζ: Μαθηματική Περιγραφή (9 από 9)

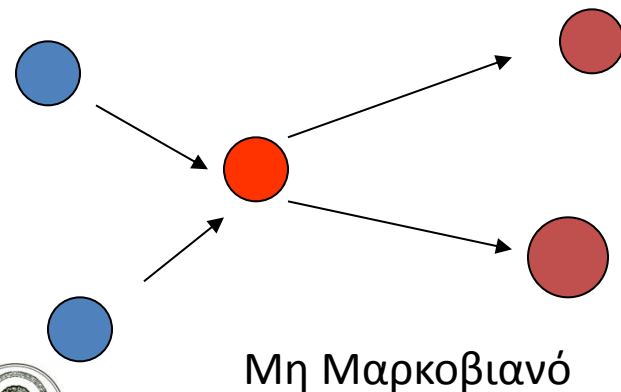
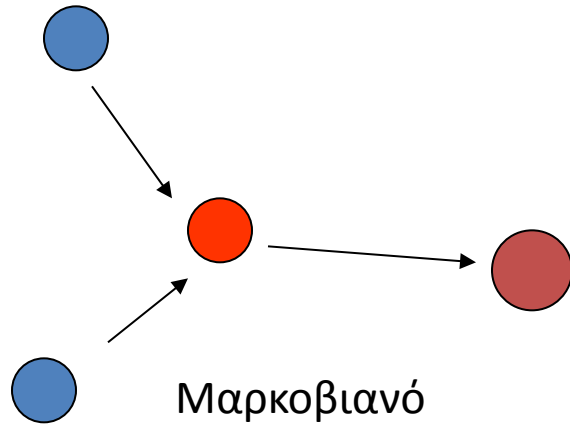
- Τα ερωτήματα μπορούν να απαντηθούν δεδομένου του πίνακα μετάβασης και της **αρχικής συνθήκης**, με άλγεβρα πινάκων.
- Αρχική συνθήκη: $\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ σε χρόνο 0 αίθριος καιρός στη χώρα του Οζ.

$$\xi_1 = P\xi_0 \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xi_2 = P\xi_1 = P(P\xi_0) = P^2\xi_0 \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 2/8 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$



Μαρκοβιανά vs. Μη Μαρκοβιανά Συστήματα (1 από 2)



- $\xi_{\tau+1} = P\xi_{\tau}$, αναδρομικός τύπος ακολουθίας διανυσμάτων
- $\xi_{\tau} = P^{\tau}\xi_0$, γενική λύση
- **Μαρκοβιανό Σύστημα:**
Το μέλλον εξαρτάται από το παρόν.
Η ιστορία δεν έχει σημασία
Το σύστημα δεν έχει μνήμη

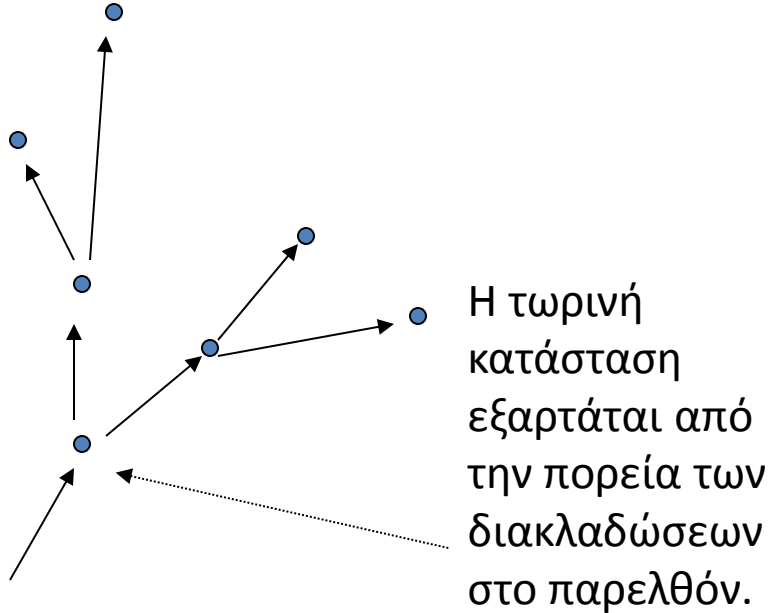


Μαρκοβιανά vs. Μη Μαρκοβιανά Συστήματα (2 από 2)

- Αν το μέλλον εξαρτιόταν από το χθες....
θα το είχαμε κερδίσει από προχθές.
- Κοινωνικά, ιστορικά φαινόμενα δεν είναι Μαρκοβιανά.
- Η εξέλιξη της ζωής στη γη δεν μπορεί να περιγραφεί ως Μαρκοβιανή διαδικασία.
- Οι οργανισμοί είναι δέσμιοι της φυλογενετικής τους θέσης.



Μαρκοβιανά vs. Μη Μαρκοβιανά Συστήματα: Φυλογένεση



- Η φυλογένεση είναι μια διαδικασία διακλάδωσης.
- Οι διαδικασίες διακλαδώσεων **δεν** είναι Μαρκοβιανές.



Ερώτηση

- Στο μοντέλο του καιρού ο πίνακας P μπορεί να κατανοηθεί ως μετασχηματιστής διανυσμάτων.
- Ο πολλαπλασιασμός του με ένα διάνυσμα μας δίνει ένα διάνυσμα ίδιας διάστασης με το αρχικό.
- Υπάρχει διάνυσμα που πολλαπλασιαζόμενο με τον πίνακα απλά αναπαράγει τον εαυτό του;
- Πώς λέγεται ένα τέτοιο διάνυσμα και τι λένε τα στοιχεία του για τον καιρό στην χώρα του Οζ;



Μοντέλο Leslie

Η ιστορία ζωής ενός ζώου περιγράφεται ως εξής:

- Ζει τρία το πολύ έτη
- Αναπαραγωγικά ώριμα είναι τα ζώα τριών ετών και μόνο αυτά.
- Κάθε αναπαραγωγικά ώριμο ζώο παράγει κατά μέσο όρο 6 απογόνους
- Από τον αριθμό των ατόμων ηλικίας ενός έτους μόνο τα μισά επιβιώνουν έως και το επόμενο έτος
- Από τον αριθμό των ατόμων ηλικίας δύο ετών μόνο το $1/3$ επιβιώνει και γίνεται αναπαραγωγικά ώριμο το επόμενο έτος.



Μοντέλο Leslie: Πίνακας Μετάβασης (1 από 5)

- Έχουμε τρεις διακριτές καταστάσεις (States):
άτομα 1ος , 2 ή 3ων ετών
- Βήμα χρόνου το **1 έτος**

Μεταβάσεις

Από 1 σε 1

Από 1 σε 2

Από 1 σε 3

Από 2 σε 1

Από 2 σε 2

Από 2 σε 3

Από 3 σε 1

Από 3 σε 2

Από 3 σε 3



Μοντέλο Leslie: Πίνακας Μετάβασης (2 από 5)

- Σε κάθε βήμα χρόνου η ηλικία του ζώου αλλάζει.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Πίνακας Leslie: Πίνακας που στην 1η γραμμή περιλαμβάνει δεδομένα γεννήσεων.



Μοντέλο Leslie: Πίνακας Μετάβασης (3 από 5)

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Η ηλικία συνεχώς αυξάνει.
- Δεν υπάρχει περίπτωση να αυξηθεί η ηλικία κατά δύο έτη σε ένα βήμα χρόνου.



Μοντέλο Leslie:

Πίνακας Μετάβασης (4 από 5)

- Από τον αριθμό των ατόμων ηλικίας ενός έτους μόνο τα μισά επιβιώνουν έως και το επόμενο έτος.
- Η πιθανότητα επιβίωσης των ατόμων ενός έτους έως το επόμενο έτος είναι ίση με $1/2$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Πιθανότητα επιβίωσης ατόμου ηλικίας 2 ετών για ένα βήμα χρόνου

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$



Μοντέλο Leslie: Πίνακας Μετάβασης (5 από 5)

- Αναπαραγωγικά ώριμα είναι τα ζώα τριών ετών και μόνο αυτά.
- Κάθε αναπαραγωγικά ώριμο ζώο παράγει κατά μέσο όρο 6 απογόνους.
- Δεν υπάρχει πιθανότητα μετάβασης ατόμου ηλικίας 3ων ετών σε ηλικία 1ος έτους

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- όμως κάθε άτομο ηλικίας 3ων ετών αντικαθίσταται στον πληθυσμό από 6 άτομα ηλικίας 1ος έτους



Γενική μορφή πίνακα Leslie

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \cdot & \cdot & \cdot & F_n \\ S_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Μοντέλο Leslie

$$\xi_{\tau+1} = \mathbf{L}\xi_{\tau}$$

n : αριθμός καταστάσεων

F_i : μέσος αριθμός απογόνων που παράγει
ένα άτομο που βρίσκεται στην κατάσταση i ,
 $i=1,2,\dots,n$

S : πιθανότητα μετάβασης από την
κατάσταση i στην $i+1$



Θεωρία παιγνίων και ηθολογία ζώων (Maynard Smith)

- Έστω σ' ένα πληθυσμό ζώων τα άτομα μπορούν να επιλέξουν μία από τις τέσσερις δυνατές στρατηγικές διεκδίκησης ενός πόρου.
- **Στρατηγικές Διεκδίκησης:** Περιγράφουν την συμπεριφορά κάθε ατόμου όταν βρεθεί αντιμέτωπο με άλλο άτομο
- Η συμπεριφορά αναλύεται σε δύο φάσεις
 1. Διερεύνηση προθέσεων
 2. Αντίδραση
- **Στρατηγικές Διεκδίκησης:**
 - Φιλειρηνική
 - Επιθετική
 - Του Παλικαρά
 - Αντεκδικητική



Ειρηνική διευθέτηση (Περιστέρι, D)

- **1η φάση:**

Πρόταση για ειρηνική διευθέτηση διαφοράς, να μοιράσουμε τους πόρους

- **2η φάση:**

- Ο αντίπαλος δέχεται οπότε η διαφορά λύνεται
- Ο αντίπαλος επιτίθεται οπότε το περιστέρι αποχωρεί



Άμεση επίθεση (Γεράκι, Η)

- **1η φάση:**
Επίθεση
- **2η φάση:**
 - Ο αντίπαλος αποχωρεί και όλα καλά
 - Ο αντίπαλος επιτίθεται και η σύγκρουση μπορεί να είναι αιματηρή ή μοιραία για τον ένα



Στρατηγική παλικαρά (B)

- **1η φάση:**
Επίθεση
- **2η φάση:**
 - Ο αντίπαλος αποχωρεί και όλα καλά
 - Ο αντίπαλος επιτίθεται και ο παλικαράς το βάζει στα πόδια



Στρατηγική αντεκδίκησης (R)

- **1η φάση:**
Ειρηνική Επίλυση
- **2η φάση:**
 - Ο αντίπαλος δέχεται και μοιράζονται οι πόροι
 - Ο αντίπαλος επιτίθεται αλλά δέχεται ισχυρή αντεπίθεση



Βαθμολογία

κατάληψη ενός πόρου = 6 βαθμοί

αποχώρηση = 0 βαθμοί

απώλεια χρόνου = -1 βαθμός

τραυματισμός = -10 βαθμοί



Πίνακας Κερδών (1 από 3)

	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>B</i>	<i>R</i>
<i>D</i>	2	6	6	2
<i>H</i>	0	-2	0	-2
<i>B</i>	0	6	3	6
<i>R</i>	2	-2	0	2

D: Συναντώντας άτομο

H: Τι κερδίζει το άτομο

- συνάντηση τύπου D-D
- τα δύο άτομα μοιράζονται από 6 - 2 = 4
- το καθένα παίρνει από 2 βαθμούς



Πίνακας Κερδών (2 από 3)

	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>B</i>	<i>R</i>
<i>D</i>	2	6	6	2
P = <i>H</i>	0	-2	0	-2
<i>B</i>	0	6	3	6
<i>R</i>	2	-2	0	2

- Συνάντηση D-H το άτομο D δεν παίρνει τίποτα , ενώ το άτομο H παίρνει 6 βαθμούς



Πίνακας Κερδών (3 από 3)

	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>B</i>	<i>R</i>
<i>D</i>	2	6	6	2
P = <i>H</i>	0	-2	0	-2
<i>B</i>	0	6	3	6
<i>R</i>	2	-2	0	2

- Συνάντηση H-H το ένα άτομο D παίρνει 6 βαθμούς το άλλο τιμωρείται με 10 βαθμούς.
- Συνολική απώλεια $(6-10)/2=-2$



Μοντέλο παιγνίου

- Αν θεωρήσουμε ότι η συμμετοχή (%) των ατόμων στρατηγικής X σε ένα πληθυσμό είναι ανάλογη των κερδών της μπορούμε να διαπιστώσουμε πια θα είναι η τελικά επικρατούσα στρατηγική.



Παράδειγμα Leslie

- Σε πληθυσμό εντόμων διακρίνονται δύο αναπτυξιακά στάδια: οι προνύμφες και τα ώριμα έντομα.
- προνύμφες από φθινόπωρο έως άνοιξη.
- Την άνοιξη το $1/3$ από αυτές μεταμορφώνονται σε ώριμα άτομα
- Οι υπόλοιπες αδυνατούν να μεταμορφωθούν και πεθαίνουν.
- Τα ώριμα αναπαράγονται στη διάρκεια της άνοιξης και του καλοκαιριού και εν συνεχεία πεθαίνουν.
- τελικό αποτέλεσμα της αναπαραγωγής: κάθε ώριμο αντικαθίσταται στην επόμενη γενιά του πληθυσμού (νέο έτος) από :
 - 2 προνύμφες κατά μέσο όρο αν η χρονιά είναι κακή
 - 4 προνύμφες αν η χρονιά είναι καλή
 - 3 προνύμφες αν η χρονιά είναι μέτρια.



Παράδειγμα

- Σχηματίστε πίνακα μετάβασης Leslie για τον πληθυσμό
- αν στην αρχή των χρόνων ο πληθυσμός ξεκινήσει με 90 προνύμφες και 3 ώριμα, πόσες θα είναι οι προνύμφες και τα ώριμα μετά 1, 2, 3, 4 γενιές στην περίπτωση όπου
 - i. οι 4 επόμενες χρονιές είναι κακές,
 - ii. οι 4 επόμενες χρονιές είναι καλές,
 - iii. οι 4 επόμενες χρονιές είναι μέτριες.
- Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα μετάβασης για κάθε περίπτωση (διαδοχικές καλές χρονιές, κακές χρονιές, μέτριες χρονιές). Προσπαθήστε για κάθε περίπτωση να συνδέστε την τιμή της μεγαλύτερης από τις ιδιοτιμές με το μέλλον του πληθυσμού (αυξητικός, σε ισορροπία, τείνει προς εξαφάνιση). Διατυπώστε τα συμπεράσματά σας σε ένα όσο γίνεται πιο απλό κανόνα.



Παράδειγμα: Ερώτημα α

- Διακρίνονται δύο στάδια: τα ώριμα και τα ανώριμα.
- Πίνακας Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$f = 2$ αν η χρονιά είναι κακή

$f = 4$ αν η χρονιά είναι καλή

$f = 3$ αν η χρονιά είναι μέτρια



Παράδειγμα: Ερώτημα β (1 από 2)

- Διάνυσμα που περιγράφει τον πληθυσμό στην αρχή των χρόνων

$$\xi_0 = \begin{pmatrix} 90 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Διανύσματα που περιγράφουν τον πληθυσμό στις επόμενες γενιές

$$\xi_1 = L\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3f \\ \frac{90}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3f \\ 30 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = L\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3f \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30f \\ \frac{3f}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30f \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\xi_3 = L\xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30f \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^2 \\ 10f \end{pmatrix} \quad \xi_4 = L\xi_3 = \begin{pmatrix} 0 & f \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^2 \\ 10f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10f^2 \\ \frac{f^2}{3} \end{pmatrix}$$



Παράδειγμα: Ερώτημα β (2 από 2)

- Αν η χρονιά είναι καλή ($f=4$)

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 120 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ 40 \end{pmatrix} \quad \xi_4 = \begin{pmatrix} 160 \\ 16/3 \end{pmatrix}$$

Ο πληθυσμός αυξάνει ταλαντούμενος από γενιά σε γενιά

- Αν η χρονιά είναι κακή ($f=2$)

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \xi_4 = \begin{pmatrix} 40 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Ο πληθυσμός μειώνεται ταλαντούμενος από γενιά σε γενιά

- Αν η χρονιά είναι μέτρια ($f=3$)

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 90 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 30 \end{pmatrix} \quad \xi_4 = \begin{pmatrix} 90 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ο πληθυσμός ταλαντώνεται από γενιά σε γενιά.



Παράδειγμα: Ερώτημα γ

- Χαρακτηριστική εξίσωση πίνακα μετάβασης

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & f \\ \frac{1}{3} & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{f}{3} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{f}{3}}$$

- Διαδοχικά καλές χρονιές $\lambda_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ & $\max(\lambda_1, \lambda_2) = \sqrt{\frac{4}{3}} > 1$

- Διαδοχικά κακές χρονιές $\lambda_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ & $\max(\lambda_1, \lambda_2) = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$

- Διαδοχικά μέτριες χρονιές $\lambda_1 = \sqrt{\frac{3}{3}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{3}{3}}$ & $\max(\lambda_1, \lambda_2) = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1$

- Το μέλλον του πληθυσμού εξαρτάται από το λ_{max}

- $\lambda_{max} > 1$: ο πληθυσμός αυξάνει
- $\lambda_{max} < 1$: ο πληθυσμός μειώνεται και εξαφανίζεται
- $\lambda_{max} = 1$: ο πληθυσμός ισορροπεί



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

