ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 12 : Λύση διαφορικών εξισώσεων & εξισώσεων διαφορών Μελέτη Ισορροπίας

Στέφανος Σγαρδέλης
Τμήμα Βιολογίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λύση διαφορικών εξισώσεων & εξισώσεων διαφορών
Μελέτη Ισορροπίας

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας (1 από 2)

Περιεχόμενα Ενότητας (2 από 2)

Σκοποί Ενότητας

- Στην Ενότητα 12 παρουσιάζονται οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων και των εξισώσεων διαφορών, καθώς και η έννοια της ισορροπίας συστήματος και η ευστάθεια της.

Λύση Μη Ομογενών Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων 1ης Τάξης

- Η εξίσωση $\mathbf{X_{\nu+1} = \alpha X_\nu + b}$, όπου α, b είναι σταθερές **έχει γενική λύση**

$$X_\nu = c\,\alpha^\nu + b/(1-\alpha), \text{ αν } \alpha \neq 1,$$

$$X_\nu = X_o + \nu b, \text{ αν } \alpha = 1$$

όπου c σταθερά που υπολογίζεται αν θέσουμε ν = 0 και λύσουμε ως προς **c**.

Γραμμικές ΕΔ Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές (1 από 2)

- Είναι εξισώσεις της μορφής:

$$X_{v+1} = g(X_v\ ,\ X_{v-1})$$

$$aX_{v+1} + bX_v + c\ X_{v-1} = 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$ Χαρακτηριστική εξίσωση

βρίσκουμε τις ρίζες της λ1, λ2

Γραμμικές ΕΔ Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές (2 από 2)

- Αν οι δύο ρίζες είναι πραγματικές η γενική λύση

$$X_v = c_1 \lambda_1^{\ v} + c_2 \lambda_2^{\ v}$$

- Αν λ διπλή πραγματική ρίζα η γενική λύση

$$X_v = c_1 \lambda^v + v c_2 \lambda^v$$

- Αν οι ρίζες είναι μιγαδικές η γενική λύση

$$X_v = r^v [c_1 \cos(v\theta) + c_2 \sin(v\theta)]$$

$$r = p^2 + q^2 \ , \cos(\theta) = \frac{p}{r}$$

Παράδειγμα (1 από 2)

- Να βρεθεί ο γενικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci που ορίζεται αναδρομικά ως $X_v = X_{v-1} + X_{v-2}$ και αρχικές τιμές $X_0 = 0, X_1 = 1.$

$$X_v = X_{v-1} + X_{v-2}$$

$$X_v - X_{v-1} - X_{v-2} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$X_v = c_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^v + c_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^v$$

Παράδειγμα (2 από 2)

$$X_0 = 0 \Rightarrow c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$$

$$X_1 = 1 \Rightarrow c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - c_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \Rightarrow c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\sqrt{5}c_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$X_v = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^v - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^v\right]$$

Λύσεις Μη Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών

- **Οι περισσότερες μη γραμμικές εξισώσεις διαφορών δεν λύνονται, ή απαιτούν ανώτερα μαθηματικά.**

$N_{t+1}=rN_t(1-N_t)$

$N_{t+2}=rN_{t+1}(1-N_{t+1})= rN_t(1-N_t)(1- rN_t(1-N_t))=$

$rN_t-2N_t^2+2r^2N_t^3-r^2N_t^4$

Παράδειγμα
(1 από 3)

- Το σώμα μας αποβάλει το 10 % ενός αντιβιοτικού κάθε ώρα. Ξεκινάμε ένα πρόγραμμα αντιβίωσης με χορήγηση 500 mg ως πρώτη δόση και εν συνεχεία με 100 mg κάθε εξάωρο.
- Κατασκευάστε μοντέλο για την ποσότητα αντιβιοτικού στο σώμα.
- Βρείτε τη μέγιστη ποσότητα μετά από μακροχρόνια δόση.

Παράδειγμα
(2 από 3)

- X_{τ} η ποσότητα σε χρόνο τ (μεταβλητή κατάστασης)
- Αν σε μια χρονική στιγμή έχω X_{τ} μετά από:
    - μια ώρα θα έχω $0.9\ X_{\tau}$
    - δύο ώρες θα έχω $0.9*(0.9X_{\tau})=0.92X_{\tau}$
    - 6 ώρες θα έχω $0.9^{6}X_{\tau}$
- Τότε θα προστεθούν 100 mg (νέα δόση).
- Θέτοντας το βήμα χρόνου στο εξάωρο και παρακολουθώντας την ποσότητα ακριβώς μετά στη δόση έχουμε

$$X_{\tau+1}=0.9^{6}{}_{X\tau}+100,$$

με $X_0=500$

$$X_{\tau+1}=0.9^{6}X_{\tau}+100$$

Παράδειγμα (3 από 3)

- Γραμμική ΕΔ με σταθερούς συντελεστές

  $X_{v+1} = aX_v + b,$
  Α=0.9^6 και β=100

  $X_v=c(0.9^6)^v+(100/(1-0.9^6)$

Ασκήσεις

- **Άσκηση 1**

  Το σώμα μας αποβάλει το **10 %** ενός αντιβιοτικού κάθε ώρα.
  Ξεκινάμε ένα πρόγραμμα αντιβίωσης με χορήγηση **200 mg** σε κάθε δόση (και στην αρχική).
  Θέλουμε η μέγιστη ποσότητα μακροχρόνια να είναι **1000 mg**
  Πόσο συχνά πρέπει να χορηγούμε το φάρμακο;

- **Άσκηση 2**

  Ένα κοπάδι βουβάλια αυξάνει κάθε χρόνο κατά 15%.

  Ένας αριθμός **h** βουβαλιών αφαιρείται στο τέλος κάθε χρονιάς από τον πληθυσμό.

  Αν στον χρόνο **τ** υπάρχουν $\mathbf{N_\tau}$ βουβάλια, υπολογίστε το h έτσι ώστε ο πληθυσμός να είναι μεγαλύτερος ή ίσος με $\mathbf{2N_\tau}$ μετά από **10** χρόνια.

Διαφορικές Εξισώσεις

- **Συνήθεις διαφορικές**

Τάξη και Βαθμός

$$\frac{dX}{dt} = 2X \qquad \frac{dX}{dt} = aX + bX^2$$

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dX}{dt}\right)}{dt} = a + bX \qquad \frac{d^7X}{dt^7} + \frac{d^3X}{dt^3} + \frac{dX}{dt} = a$$

$$\frac{dX}{dt} = a + bX(\cos(t) + 1)$$

Γενικές Λύσεις Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων και Συστημάτων

- Λύση διαφορικής= απομάκρυνση των παραγώγων = ολοκλήρωση (συνάρτηση ή οικογένεια συναρτήσεων)
- Λύση της συνάρτησης $\frac{dX}{dt} = rX$ κάθε συνάρτηση φ(X,t) που επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση.
- Η συνάρτηση $\varphi(t) = e^{rt}$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης.
- Αντικαθιστώντας το X με την φ(t)

$$\frac{d(\varphi(t))}{dt} = \frac{d(e^{rt})}{dt} = re^{rt} = r\varphi(t)$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Διαφορικές Εξισώσεις που Λύνονται

- **Ομογενής γραμμική διαφορική 1ης τάξης**

$$\frac{dY}{dt} = p(t)Y$$

- **Μη ομογενής γραμμική διαφορική 1ης τάξης**

$$\frac{dY}{dt} = p(t)Y + g(t)$$

- **Ομογενής γραμμική διαφορική 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές**

$$a\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right) + b\left(\frac{dY}{dt}\right) + cY = 0$$

- **Οι διαφορικές με χωριζόμενες μεταβλητές**

Διαφορικές Εξισώσεις με Χωριζόμενες Μεταβλητές

- Οι συνήθεις μεταβλητές είναι η X και t

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t)$$

- Αν μπορεί να γραφτεί σε μορφή

$$f_1(X)dX = f_2(t)dt$$

δηλ. το διαφορικό της μιας να βρεθεί στο ένα σκέλος και της άλλης στο άλλο, τότε λύνεται με **ολοκλήρωση.**

Παράδειγμα

$$\frac{dX}{dt} = aX^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{1}{X^{\frac{2}{3}}}\frac{dX}{dt} = a$$

$$X^{-\frac{2}{3}}dX = adt$$

$$\int X^{-\frac{2}{3}}dX = \int adt$$

$$\int X^{-\frac{2}{3}}dX = \int adt$$

$$3X^{\frac{1}{3}} = at + c$$

Λύση Μη Ομογενούς Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης

- **Λύση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης**

  Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις γενικής μορφής

$$\frac{dY}{dt} = a(t)Y + b(t)$$

  έχουν γενική λύση

$Y = u(t)e^{A(t)} + ce^{A(t)}$ όπου $A(t) = \int a(t)dt$ και $u(t) = \int b(t)e^{-A(t)}dt$

Παράδειγμα
(1 από 2)

- Έστω η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dW}{dt} = f - mW$$

έχουμε

$$a(t) = -m \;\; \kappa\alpha\iota \;\; b(t) = f$$

$$A(t) = \int a(t)dt = \int -m dt = -mt$$

$$u(t) = \int b(t) e^{-A(t)} dt = \int f e^{-(-mt)} dt = f \int e^{mt} dt = \frac{f}{m} e^{mt}$$

Παράδειγμα
(2 από 2)

- Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$W = u(t)e^{A(t)} + ce^{A(t)} = \frac{f}{m}e^{mt}e^{-mt} + ce^{-mt} = \frac{f}{m}ce^{-mt}$$

$$W_0 = \frac{f}{m} + ce^0 \Rightarrow c = W_0 - \frac{f}{m}$$ όπου W_0 η τιμή του W στο t=0.

Άρα:

$$W = \frac{f}{m} + (W_0 - \frac{f}{m})e^{-mt}$$

Συστήματα Διαφορικών (1 από 2)

- Δύο γραμμικές διαφορικές με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{dX_1}{dt} = aX_1 + bX_2$$

$$\frac{dX_2}{dt} = cX_1 + dX_2$$

Η λύση είναι γινόμενο μιας εκθετικής συνάρτησης των ιδιοτιμών του πίνακα των σταθερών συντελεστών Χ επί τα συνοδεύοντα ιδιοδιανύσματα.

Συστήματα Διαφορικών (2 από 2)

- Έστω οι ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 με συνοδεύοντα ιδιοανύσματα τα ξ και η αντίστοιχα.

Η λύση είναι

$$X_1 = c_1 \xi_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_1 e^{\lambda_2 t}$$

$$X_2 = c_1 \xi_2 e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_2 e^{\lambda_2 t}$$

όπου c_1, c_2 σταθερές ολοκλήρωσης.

Μελέτη Ισορροπίας

- Έστω ότι η συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t)$$ όπου Χ μεταβλητή κατάστασης.

- Το σύστημα ισορροπεί στο σημείο $\overset{*}{X}$ όπου η τιμή της μεταβλητής κατάστασης δε μεταβάλλεται.
- Δηλ. ισχύει ότι

$$\frac{d\overset{*}{X}}{dt} = f(\overset{*}{X},t) = 0$$

Παράδειγμα

- Έστω ότι το μοντέλο πληθυσμιακής μεταβολής έχει τη μορφή

$$\frac{dN}{dt} = bN + aN^2$$

- Ο πληθυσμός ισορροπεί όταν

$$bN + aN^2 = 0$$

$$bN + aN^2 = 0 \Rightarrow N(b + aN) = 0 \Rightarrow N = 0 \text{ ή } N = -b/a$$

- Δύο σημεία ισορροπίας:
  - όταν ο πληθυσμός δεν υφίσταται
  - ο πληθυσμός με την πάροδο του χρόνου φτάνει σε ένα οριακό μέγεθος (-b/α) & παύει να μεταβάλλεται

Μελέτη Ισορροπίας: Εξισώσεις διαφορών

- Έστω ότι η συμπεριφορά ενός φυσικού συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$X_{\nu+1} = g(X_\nu, t)$$

- Το σύστημα ισορροπεί στο σημείο $\overset{*}{X}$ **όπου εξ ορισμού ισχύει ότι**

$$\overset{*}{X}_{\nu+1} = g(\overset{*}{X}_\nu, t) = X$$

- Παράδειγμα

$$X_{\nu+1} = 3X_\nu - 5$$

$$X = 3X - 5 \Rightarrow X = 5/2$$

Μελέτη Ισορροπίας: Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

- Έστω το σύστημα

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, X_2, t)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1, X_2, t)$$

- Έστω ένα σημείο ισορροπίας $(\overset{*}{X}_1, \overset{*}{X}_2)$ **όπου εξ ορισμού ισχύει ότι**

$$\frac{d\overset{*}{X}_1}{dt} = f_1(\overset{*}{X}_1, \overset{*}{X}_2, t) = 0$$

$$\frac{d\overset{*}{X}_2}{dt} = f_2(\overset{*}{X}_1, \overset{*}{X}_2, t) = 0$$

Παράδειγμα

$$\frac{dX}{dt} = X(1 - X - Y)$$

$$\frac{dY}{dt} = Y(0.75 - Y - 0.5X)$$

$$X(1 - X - Y) = 0$$

$$Y(0.75 - Y - 0.5X) = 0$$

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$X = 0$$

$$(0.75 - Y - 0.5X) = 0$$

$$(1 - X - Y) = 0$$

$$Y = 0$$

$$(1 - X - Y) = 0$$

$$(0.75 - Y - 0.5X) = 0$$

Ευστάθεια Ισορροπίας: Διαφορικές Εξισώσεις

- Έστω το σύστημα

$$\frac{dX}{dt} = f(X,t) \text{ που ισορροπεί στο σημείο } \overset{*}{X}$$

- Μετατοπίζουμε ελαφρά το σύστημα από την κατάσταση ισορροπίας. Η ισορροπία στο σημείο $\overset{*}{X}$ είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής αν η παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το X υπολογισμένη στο σημείο ισορροπίας είναι αρνητικός αριθμός:**

$$\lambda = f\,'(\overset{*}{X},t) < 0$$

Παράδειγμα

$$\frac{dN}{dt} = bN + aN^2$$

$$\overset{*}{N} = -b/a$$

$$f(N) = bN + aN^2$$

$$f'(N) = b + 2aN$$

$$f'(\overset{*}{N}) = b + 2a(-\frac{b}{a}) = -b$$

Ασυμπτωτικά ευσταθής ισορροπία αν *b*>0

Ευστάθεια Ισορροπίας: Εξισώσεις Διαφορών

- Έστω το σύστημα
  $X_{\nu+1} = g(X_\nu, t)$ που ισορροπεί στο σημείο $\overset{*}{X}$

- Μετατοπίζουμε ελαφρά το σύστημα από την κατάσταση ισορροπίας. Η ισορροπία στο σημείο $\overset{*}{X}$ είναι **ασυμπτωτικά ευσταθής αν :**

$$|\lambda| = \left| g'(\overset{*}{X}, t) \right| < 1$$

Παράδειγμα

$$X_{\nu+1} = (\mu - 3) X_\nu - 5$$

$$\overset{*}{X} = 5/(\mu - 3)$$

$$g(X) = (\mu - 3) X - 5$$

$$g'(X) = \mu - 3$$

$$g'(\overset{*}{X}) = \mu - 3$$

Ασυμπτωτικά ευσταθής ισορροπία αν:

$$|\mu - 3| < 1 \Rightarrow -1 < \mu - 3 < 1 \Rightarrow 2 < \mu < 4$$

Ευστάθεια Ισορροπίας: Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

- Έστω το σύστημα

$$\frac{dX_1}{dt} = f_1(X_1, X_2, t)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = f_2(X_1, X_2, t)$$

- Έστω ένα σημείο ισορροπίας $(\overset{*}{X}_1, \overset{*}{X}_2)$
- Υπολογίζω τα στοιχεία του πίνακα J (πίνακας Jacobi) στο σημείο ισορροπίας

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \end{pmatrix}$$

- **Αν λ1,λ2 είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα J, η ισορροπία ασυμπτωτικά ευσταθής αν Re(λ1)<0 και Re(λ1)<0.**

Παράδειγμα (1 από 2)

$$\frac{dX}{dt} = X(1 - X - Y)$$

$$(\overset{*}{X} = 0.5, \overset{*}{Y} = 0.5)$$

$$\frac{dY}{dt} = Y(0.75 - Y - 0.5X)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial X} = \frac{\partial [X(1 - X - Y)]}{\partial X} = 1 - 2X - Y$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Y} = \frac{\partial [X(1 - X - Y)]}{\partial Y} = -X$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial X} = \frac{\partial [Y(0.75 - Y - 0.5X)]}{\partial X} = -0.5Y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Y} = \frac{\partial [Y(0.75 - Y - 0.5X)]}{\partial Y} = 0.75 - 2Y - 0.5X$$

Παράδειγμα (2 από 2)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1-2X-Y & -X \\ -0.5Y & 0.75-2Y-0.5X \end{pmatrix}$$

Στο $(\overset{*}{X} = 0.5, \overset{*}{Y} = 0.5)$ $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -0.5-\lambda & -0.5 \\ -0.25 & -0.5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + 0.125 = 0$$

Κριτήρια Ευστάθειας (1 από 2)

- Για συστήματα δύο διαφορικών με χαρακτηριστική εξίσωση **$\lambda^2+\beta\lambda+\gamma=0$** με ρίζες λ1, λ2
- Η ισορροπία είναι ασυμπτωτικά ευσταθής αν $Re(\lambda_1)<0$ και $Re(\lambda_2)<0$
- Ζητάμε συνθήκες για να έχει η δευτεροβάθμια εξίσωση:
  - δύο πραγματικές αρνητικές ρίζες ή
  - δύο συζυγείς μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος ή
  - καθαρά φανταστικές ρίζες.

Κριτήρια Ευστάθειας (2 από 2)

- Η δευτεροβάθμια εξίσωση $\boldsymbol{\lambda^2+\beta\lambda+\gamma=}0$ έχει:
    - δύο πραγματικές αρνητικές ρίζες ή αρνητική διπλή ρίζα ή μιγαδικές ρίζες με αρνητικό πραγματικό μέρος όταν **$\beta>0$ και $\gamma>0$.**
    - αν επιπλέον **$\beta^2-4\gamma>0$** οι ρίζες είναι μιγαδικές
    - αν **$\beta=0$ και $\gamma>0$** οι ρίζες είναι φανταστικές.

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.