ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Μαθηματικά Και Στατιστική Στη Βιολογία

Ενότητα 13 : Μοντέλα και Παραδείγματα

Στέφανος Σγαρδέλης
Τμήμα Βιολογίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Μοντέλα και Παραδείγματα

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα Ενότητας (1 από 2)

1. Μοντέλα Συστημάτων σε Συνεχή Χρόνο
2. Απλό Μοντέλο Δυναμικής Πληθυσμών
3. Επεκτάσεις του Απλού Μοντέλου Δυναμικής Πληθυσμών
4. Άσκηση: Μοντέλο Ραδιενεργού Διάσπασης
5. Παράδειγμα: Εκμετάλλευση Φυσικών Πληθυσμών (αλιεία)
6. Παράδειγμα: Σύστημα λείας – θηρευτή
7. Μοντέλα Αύξησης Βιομάζας Οργανισμών
8. Απλό Μοντέλο Αύξησης Σφαιρικού Κυττάρου
9. Αλλομετρική Εξάρτηση Μεγεθών
10. Μοντέλα Ροής Υλικών ή Ενέργειας με μία Δεξαμενή (Διαμέρισμα)
11. Μοντέλα Κινητικής Χημικών Αντιδράσεων και Επιδημιολογικά Μοντέλα
12. Παράδειγμα: Κινητική Ενζυμικών Αντιδράσεων

Περιεχόμενα Ενότητας (2 από 2)

13. Μοντέλα Συστημάτων σε Διακριτό Χρόνο: Μεταβολές Συχνότητας Αλληλομόρφων λόγω Φυσικής Επιλογής
14. Ασκήσεις
15. Μοντέλο Δυναμικής Πληθυσμών May

Σκοποί Ενότητας

- Στην Ενότητα 13 παρουσιάζονται μια σειρά μοντέλων και παραδειγμάτων.

Μοντέλα Συστημάτων σε Συνεχή χρόνο

- Διαφορικές εξισώσεις της μορφής $\frac{dX}{dt} = f(X)$ που X η μεταβλητή κατάστασης και f ο κανόνας μετασχηματισμού της.
- **1.Διαδικασίες γεννήσεων-θανάτων**
  Στα μοντέλα αυτής της κατηγορίας τα κέρδη είναι οι γεννήσεις και οι ζημιές οι θάνατοι. Ο αριθμός των γεννήσεων εξαρτάται από τον αριθμό των γεννητόρων και την πιθανότητα γένεσης νέου ατόμου από τον κάθε γεννήτρα σε ένα χρονικό διάστημα. Ο αριθμός των θανάτων εξαρτάται από τον αριθμό των ατόμων του πληθυσμού και από την πιθανότητα να πεθάνει ένα άτομο σε ένα χρονικό διάστημα.
  Το μοντέλο $\frac{dN}{dt} = bN - dN$ είναι το απλούστερο γενικό μοντέλο που περιγράφει διαδικασίες γεννήσεων-θανάτων.

Παράδειγμα

- 1) Μοντέλο ραδιενεργού διάσπασης

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

όπου N ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων και k η σταθερά ραδιενεργού διάσπασης (η πιθανότητα διάσπασης ενός πυρήνα στο διάστημα dt). Στο μοντέλο αυτό θέσαμε b=0, d=k.

Η διαφορική αυτή είναι πολύ απλή και έχει λύση εκτός από την N=0 την

$$N_t = N_0 e^{-kt}$$

Αν N0 ο αριθμός ραδιενεργών πυρήνων την χρονική στιγμή t=0 η σταθερά ραδιενεργού διάσπασης k υπολογίζεται

$$N_t = N_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-kt} \Rightarrow \ln(\frac{N_t}{N_0}) = -kt \Rightarrow k = -\frac{\ln(N_t) - \ln(N_0)}{t}$$

Για να υπολογίσουμε τον χρόνο υποδιπλασιασμού θέτουμε N0=2Nt και λύνουμε ως προς το ζητούμενο t.

$$N_t = 2N_t e^{-kt} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-kt} \Rightarrow \ln(\frac{1}{2}) = -kt \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.5)}{k}$$

Απλό Μοντέλο Δυναμικής Πληθυσμών

- Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού θα είναι: $$\frac{dN}{dt} = bN - dN$$
- **Ρυθμός μεταβολής = Σύνολο γεννήσεων - Σύνολο θανάτων**

Το μοντέλο διατυπώνεται και ως: $\frac{dN}{dt} = (b-d)N, = rN$ όπου r = (b-d) = σταθερά.

Η τελική διατύπωση του μοντέλου $\frac{dN}{dt} = rN$ δηλώνει ότι η μεταβολή του πληθυσμού με το χρόνο είναι ανάλογη του ήδη υπάρχοντος πληθυσμού με συντελεστή αναλογίας r.

Μια άλλη διατύπωση του ίδιου μοντέλου προκύπτει αν διαιρέσουμε το δύο σκέλη της εξίσωσης με το N εφόσον $N \neq 0$

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r$$

Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης περιγράφει τη μεταβολή του πληθυσμού ανά ήδη υπάρχον άτομο (**κατά κεφαλή ρυθμός μεταβολής ή σχετικός ρυθμός μεταβολής**).

Ο συντελεστής r ονομάζεται συνεπώς **κατά κεφαλή ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού**.

Επεκτάσεις του Απλού Μοντέλου Δυναμικής Πληθυσμών (1 από 2)

- **Επεκτάσεις του απλού μοντέλου δυναμικής πληθυσμών.**

1. Συνθήκες ανταγωνισμού που αυξάνει όσο αυξάνει ο αριθμός των ατόμων και προκαλεί αύξηση της πιθανότητας θανάτων

$$\frac{dN}{dt} = bN - (aN)N = N(b - aN)$$

- Στο μοντέλο αυτό υποθέσαμε ότι η θνησιμότητα είναι ανάλογη του αριθμού των ατόμων N με συντελεστή αναλογίας a.
- Ετσι αντικαταστήσαμε την σταθερά d με την συνάρτηση aN.
- Αντίστοιχα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκθετικές, λογαριθμικές ή άλλες συναρτήσεις.
- Επίσης μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο ανταγωνισμός μειώνει τις γεννήσεις αντί να αυξάνει τους θανάτους ή επιδρά τόσο στις γεννήσεις όσο και στους θανάτους.

Επεκτάσεις του Απλού Μοντέλου Δυναμικής Πληθυσμών (2 από 2)

2. Μοντέλο μεταβολής πληθυσμών με περιοδικά μεταβαλλόμενο ρυθμό γεννήσεων

$$\frac{dN}{dt} = aCos(\omega t)N - dN$$

- Εδώ αντικαταστήσαμε το b με μια περιοδική συνάρτηση του χρόνου.
- Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε να περιγράφουμε τις μεταβολές πληθυσμών που τα άτομα γεννάνε όλους τους απογόνους τους σε μια εποχή του έτους (πολλά θηλαστικά όπως οι κατσίκες για παράδειγμα).

Άσκηση: Μοντέλο Ραδιενεργού Διάσπασης

- Έστω ότι σε κάποιο εύρημα το ποσοστό $\frac{N_t}{N_0} = 0.2$. Να υπολογιστεί η ηλικία του ευρήματος.

Λύση:

Από το χρόνο ημιζωής μπορώ να υπολογίσω το k

$$t_{1/2} = -\frac{\ln(0.5)}{k} \Rightarrow k = -\frac{\ln(0.5)}{t_{1/2}} = \frac{0.693147}{5568} = 0.000124$$

Στη συνέχεια πρέπει να λύσω ως προς τον χρόνο την εξίσωση $N_t = N_0 e^{-kt}$

$$N_t = N_0 e^{-kt} \Rightarrow \frac{N_t}{N_0} = e^{-kt} \Rightarrow 0.2 = e^{-0.000124t} \Rightarrow t = -\frac{\ln(0.2)}{0.000124} = 12928.5$$

Άρα το εύρημα είναι ηλικίας περίπου 12928.5 ετών ή περίπου τόσο.

Ασκήσεις

- Έστω ότι ο σχετικός ρυθμός αύξησης του ανθρώπινου πληθυσμού είναι σταθερός. Υπολογίζεται ότι το έτος 1650 μΧ ο πληθυσμός της γης ήταν 6x108 άτομα ενώ 300 χρόνια αργότερα ήταν 2.8x109 άτομα. Με βάση τα παραπάνω υπολογίστε πόσος προβλέπεται να είναι ο πληθυσμός το 2050 και σε ποιο έτος θα έχει φτάσει τα 2.5x1010 άτομα.
- Ο ρυθμός απώλειας μάζας του οργανικού υλικού στο έδαφος είναι ανάλογος της μάζας του υλικού με συντελεστή αναλογίας k που ονομάζεται σταθερά αποικοδόμησης. Αν στην αρχή του χρόνου (t=0) η μάζα του υλικού είναι Mo και στο χρόνο t=10 είναι M_{10} να υπολογιστεί ο συντελεστής αποικοδόμησης και ο χρόνος ημίσειας ζωής του υλικού.

Παράδειγμα: Εκμετάλλευση Φυσικών Πληθυσμών – Αλιεία (1 από 2)

- Η διαφορική εξίσωση που εκφράζει τις μεταβολές αλιεύματος είναι η

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - qEN$$

- Το γινόμενο qE εκφράζει την θνησιμότητα των ψαριών εξαιτίας της αλιείας. Υποθέτουμε επίσης ότι ο αριθμός των ψαριών που συλλαμβάνονται ανά μονάδα αλιευτικής προσπάθειας είναι ανάλογος του συνολικού αριθμού ψαριών
- **Σημεία Ισορροπίας**

$$rN(1 - \frac{N}{K}) - qEN = 0 \Rightarrow N(r - \frac{rN}{K} - qE) = 0 \Rightarrow N = 0$$

ή

$$r - \frac{rN}{K} - qE = 0 \Rightarrow N = \frac{K(r - qE)}{r} = K(1 - \frac{qE}{r})$$

Παράδειγμα: Εκμετάλλευση Φυσικών Πληθυσμών – Αλιεία (2 από 2)

- Ασυμπτωτική ευστάθεια ισορροπίας

$$\frac{dN}{dt} = rN(1-\frac{N}{K}) - qEN = f(N)$$

$$f'(N) = (rN(1-\frac{N}{K}) - qEN)' = r - \frac{2rN}{K} - qE$$

- Στο **πρώτο σημείο ισορροπίας** $f'(0) = r - qE$ και η ισορροπία είναι ευσταθής αν $r - qE < 0 \Rightarrow r < qE$
- Στο **δεύτερο σημείο ισορροπίας**

$$f'(K(1-\frac{qE}{r})) =) = r - \frac{2r}{K}K(1-\frac{qE}{r}) - qE = r - 2r + 2qeE - qE = -r + qE$$

και το συμπέρασμα είναι φυσικά το αντίστροφο της πρώτης περίπτωσης.

Παράδειγμα: Σύστημα λείας – θηρευτή (1 από 5)

- Για το σχετικό ρυθμό μεταβολής του αριθμού των ατόμων λείας ισχύει ότι
$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} = 1 - \frac{N_1}{K} - bN_2$$
- Για το σχετικό ρυθμό μεταβολής του αριθμού των θηρευτών ισχύει αντίστοιχα η σχέση:
$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = -1 + aN_1$$
- **Μελέτη ισορροπίας**

  Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος είναι

$$\overset{*}{N}_1 = \overset{*}{N}_2 = 0, \quad \overset{*}{N}_1 = K, \overset{*}{N}_2 = 0, \quad \overset{*}{N}_1 = \frac{1}{K}, \overset{*}{N}_2 = \frac{1 - \frac{1}{aK}}{b}$$

  Παρατηρήστε ότι στο τελευταίο σημείο ισορροπίας αν $\frac{1}{aK} > 1 \Rightarrow \overset{*}{N}_2 < 0$

  Ισχύει συνεπώς ο περιορισμός αΚ>1 ώστε να είναι $\overset{*}{N}_2 \geq 0$

Παράδειγμα: Σύστημα λείας – θηρευτή (2 από 5)

Ανάλυση ευστάθειας

Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial f_1}{dN_1} = 1 - 2\frac{N_1}{K} - b\,N_2$$

$$\frac{\partial f_1}{dN_2} = -b\,N_1$$

$$\frac{\partial f_2}{dN_1} = a\,N_2$$

$$\frac{\partial f_2}{dN_2} = -1 + a\,N_1$$

Παράδειγμα: Σύστημα λείας – θηρευτή (3 από 5)

- **Για το πρώτο σημείο ισορροπίας** ο πίνακας Jacobi είναι

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- με χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \wedge \quad \lambda_2 = -1$$

- Η ισορροπία στο σημείο $\overset{*}{N}_1 = \overset{*}{N}_2 = 0$ είναι ασυμπτωτικά ασταθής.

Παράδειγμα: Σύστημα λείας – θηρευτή (4 από 5)

- **Για το δεύτερο σημείο ισορροπίας** ο πίνακας Jacobi είναι

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -bK \\ 0 & -1+aK \end{pmatrix}$$

- με χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -bK \\ 0 & -1+aK-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(-1+aK-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = -1+aK$$

- Η πρώτη ρίζα είναι πάντα αρνητική άρα για να είναι η ισορροπία ευσταθής αρκεί και η δεύτερη να είναι αρνητική δηλαδή -1+*αK* <0 ή *αK*<1.

Παράδειγμα: Σύστημα λείας – θηρευτή (5 από 5)

- **Για το τρίτο σημείο ισορροπίας** η χαρακτηριστική εξίσωση είναι (μετά από μερικές πράξεις)

$$\lambda^2 + \frac{1}{aK}\lambda + 1 - \frac{1}{aK} = 0$$

- χρησιμοποιούμε το κριτήριο ευστάθειας για συστήματα δύο διαφορικών. Αρκεί όλοι οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης να είναι θετικοί αριθμοί.
- Αρκεί δηλαδή να είναι $1/\alpha K > 0$ που ισχύει για κάθε $\alpha > 0$ (αφού $K > 0$) και $1 - (1/\alpha K) > 0$ ή $1/\alpha K < 1$ ή $\alpha K > 1$.

Μοντέλα Αύξησης Βιομάζας Οργανισμών

- Ένα γενικό μοντέλο αύξησης ενός οργανισμού έχει την μορφή

$$\frac{dW}{dt} = f(W) - g(W)W$$

δηλαδή ο ρυθμός αύξησης είναι ίσος με την συνολική αφομοίωση τροφής μείον τις απώλειες λόγω αναπνοής, απεκκριμάτων κλπ.

Απλό Μοντέλο Αύξησης Σφαιρικού Κυττάρου

- Έστω σφαιρικό κύτταρο που αναπτύσσεται σε θρεπτικό διάλυμα. Μοιάζει λογικό να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός πρόσληψης θρεπτικών από το κύτταρο και άρα ο ρυθμός αύξησης του όγκου του V εξαρτάται από την επιφάνειά του S.

  Ισχύει ότι

  $$\frac{dV}{dt} = aS$$

  Η σχέση που συνδέει την επιφάνεια της σφαίρας με τον όγκο της υπολογίζεται

  $$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = (\frac{3V}{4\pi})^{\frac{1}{3}} \ \kappa\alpha\iota \quad S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

  οπότε αντικαθιστώντας στην διαφορική έχουμε

  $$\frac{dV}{dt} = 4a\pi\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = bV^{\frac{2}{3}} \quad \text{με} \quad b = 4a\pi\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Αλλομετρική Εξάρτηση Μεγεθών

- Έστω ότι εξετάζουμε το μήκος L και το βάρος W ενός ψαριού από την εκκόλαψη του έως και το θάνατο του. Έστω ότι ο σχετικός ρυθμός μεταβολής του βάρους με το χρόνο είναι ευθέως ανάλογος του σχετικού ρυθμού μεταβολής του μήκους με το χρόνο. Διατυπώστε μια σχέση βάρος - μήκους έτσι ώστε δοθέντος του μήκους να υπολογίζεται το βάρος του ψαριού.

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = k\frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

$$\int \frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = k\int \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} \Rightarrow \ln(W) = k\ln(L) + c \Rightarrow W = e^{c}\,(e^{\ln(L)})^{k} \Rightarrow$$

$$W = aL^{k}$$

όπου α = σταθερά που η τιμή της εξαρτάται από το βάρος του ζώου στο χρόνο t=0.

Άσκηση
(1 από 2)

- Ο ρυθμός αύξησης του βάρους ενός οργανισμού δίνεται από τη διαφορική

$$\frac{dW}{dt} = aW^{\frac{2}{3}}$$

Από ένα επαρκές στατιστικά δείγμα ατόμων υπολογίστηκε ότι μέσο βάρος των ατόμων σε χρόνο t=0 ήταν 1 g ενώ σε χρόνο t=10 ήταν 8 g. Ποιο το αναμενόμενο μέσο βάρος σε χρόνο t=20;

Άσκηση
(2 από 2)

- **Λύση**

Πρέπει να λύσουμε την διαφορική και να υπολογίσουμε την παράμετρο α από τα δεδομένα

$$\frac{dW}{dt} = aW^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{1}{W^{\frac{2}{3}}} dW = adt \Rightarrow \int W^{-\frac{2}{3}} dW = \int adt \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{2}{3}} W^{1-\frac{2}{3}} = at + c$$

$$3W^{\frac{1}{3}} = at + c \Rightarrow W = \left(\frac{at+c}{3}\right)^3$$

Αν W_0 το βάρος στην αρχή του χρόνου ισχύει ότι $W_0 = \left(\frac{c}{3}\right)^3 \Rightarrow W_0^{\frac{1}{3}} = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 3W_0^{\frac{1}{3}}$

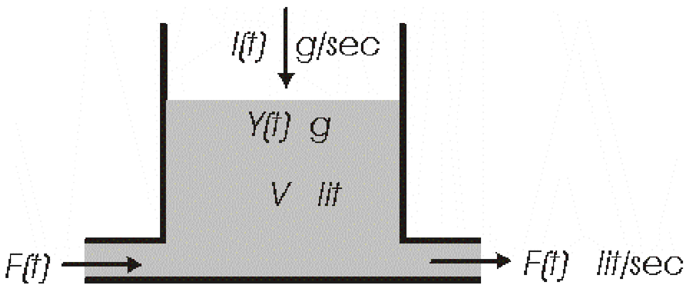
οπότε η λύση που επαληθεύει και την αρχική συνθήκη είναι η $W_t = \left(\frac{at + 3W_0^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3$

και δεδομένου ότι W_0=1 $\Rightarrow W_t = \left(\frac{at+3}{3}\right)^3$

Από το δεδομένο W_{10}=5 έχουμε $8 = \left(\frac{10a+3}{3}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = \frac{10a+3}{3} \Rightarrow a = \frac{6-3}{10} = 0.3$ οπότε

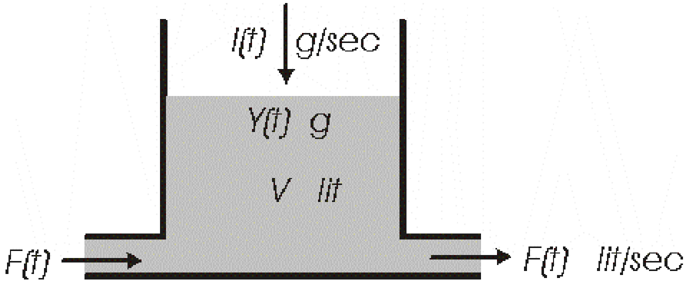
$W_t = \left(\frac{0.3t+3}{3}\right)^3$ και $W_{20} = \left(\frac{0.3(20)+3}{3}\right)^3 = 27$

Μοντέλα Ροής Υλικών ή Ενέργειας με μία Δεξαμενή – Διαμέρισμα (1 από 2)



- Έστω δεξαμενή γεμάτη με V lit νερού στο οποίο έχει διαλυθεί κάποια ουσία της οποίας την ποσότητα Y(t) g θέλουμε να παρακολουθήσουμε καθώς μεταβάλλεται στο χρόνο. Υπάρχει μια ροή καθαρού νερού στην δεξαμενή με ρυθμό F(t) lit/sec. Το διάλυμα εξέρχεται από τη δεξαμενή με ρυθμό F(t) lit/sec ώστε ο όγκος στην δεξαμενή να διατηρείται σταθερός. Στην δεξαμενή εισάγεται η ουσία που μας ενδιαφέρει με ρυθμό I(t) g/sec.

Μοντέλα Ροής Υλικών ή Ενέργειας με μία Δεξαμενή – Διαμέρισμα (2 από 2)



- Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το ρυθμό μεταβολής της ποσότητας της ουσίας στην δεξαμενή είναι η

$$\frac{dY}{dt} = I(t) - F(t)\frac{Y}{V} \qquad \frac{g}{\sec} = \frac{g}{\sec} - \frac{lit}{\sec}\frac{g}{lit}$$

Στην ειδική περίπτωση που *I(t)*=0 και *F(t)*=*F*=σταθερά η διαφορική γίνεται

$\frac{dY}{dt} = -\frac{F}{V}Y$ και έχει λύση την $Y_t = Y_0 e^{-\frac{F}{V}t}$

δηλαδή η ποσότητα της ουσίας στην δεξαμενή μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Για να υπάρχει συνεχώς η ουσία στη δεξαμενή πρέπει *I(t)*≠0.

Παράδειγμα
(1 από 3)

- **Παράδειγμα**

  Έστω δεξαμενή ύδρευσης όγκου 500 m3. Στην αρχή της λειτουργίας της ρίχνουμε 5 m3 χλωρίου στην δεξαμενή. Καθαρό νερό εισέρχεται στη δεξαμενή με ρυθμό 10 m3 /sec και χλωριωμένο νερό εξέρχεται με τον ίδιο ρυθμό. Με την έναρξη λειτουργίας της δεξαμενής προσθέτουμε χλώριο με ρυθμό I m3/sec. Να υπολογιστεί ο ρυθμός εισόδου χλωρίου I έτσι ώστε μακροχρόνια η συγκέντρωση του χλωρίου στην δεξαμενή να είναι 1/1000 όγκος/ όγκο.

  Λύση

  Η διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{dY}{dt} = I - \frac{10}{500}Y \qquad \frac{m^3}{\sec} = \frac{m^3}{\sec} - \frac{\frac{m^3}{\sec}}{m^3}m^3$$

  Πρόκειται για μια μη ομογενή διαφορική πρώτης τάξης της οποίας η λύση (επαληθεύστε την) είναι η

$$Y_t = 50I + ce^{-0.02t}$$

Παράδειγμα (2 από 3)

- Η σταθερά της ολοκλήρωσης θα υπολογιστεί από την αρχική συνθήκη. Στο χρόνο 0 υπήρχαν 5 m3 χλωρίου στη δεξαμενή (Y_0=5). Άρα

$$5 = 50I + c \Rightarrow c = 5 - 50I$$

και η λύση που επαληθεύει και την αρχική συνθήκη γίνεται

$$Y_t = 50I + (5 - 50I)e^{-0.02t}.$$

Το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε το I έτσι ώστε μακροχρόνια (διάβαζε σε άπειρο χρόνο) το Y να έχει τέτοια τιμή ώστε η κατ όγκο συγκέντρωση του χλωρίου στη δεξαμενή να είναι 1/1000. Με άλλα λόγια θέλουμε να υπάρχουν 0.5 m3 χλωρίου στη δεξαμενή των 500 m3. Από την λύση της εξίσωσης παρατηρήστε ότι του χρόνου τείνοντος στο άπειρο ο εκθετικός όρος τείνει στο μηδέν.

Για να είναι $Y_\infty = 0.5$ πρέπει $0.5 = 50I \Rightarrow I = \dfrac{0.5}{50} = 0.01 \quad \dfrac{m^3}{\sec}$

Παράδειγμα (3 από 3)

- Παρατήρηση: Η λύση της διαφορικής δεν είναι απαραίτητη για να απαντηθεί το συγκεκριμένο ερώτημα. Αν υπάρχει κάποιο σημείο ισορροπίας του συστήματος τότε μακροχρόνια το σύστημα θα ισορροπήσει.
- Στην ισορροπία θα ισχύει ότι

$$I - \frac{10}{500}\overset{*}{Y} = 0 \Rightarrow \overset{*}{Y} = 50I$$

$$\overset{*}{Y} = 0.5 = 50I \Rightarrow I = 0.01$$

Μοντέλα Κινητικής Χημικών Αντιδράσεων και Επιδημιολογικά Μοντέλα

- Σε όλα τα μοντέλα αυτής της κατηγορίας ο ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από τον αριθμό των επαφών μεταξύ στοιχείων. Η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης εξαρτάται από το πόσο συχνά δυο μόρια αντιδρώντων θα βρεθούν κοντά το ένα στο άλλο. Ο ρυθμός διάδοσης μιας επιδημίας εξαρτάται από την συχνότητα επαφής ενός αρρώστου ή φορέα με έναν υγιή. Ο ρυθμός διάδοσης μιας φήμης ή πληροφορίας εξαρτάται από τον αριθμό των επαφών μεταξύ αυτών που κατέχουν την πληροφορία και αυτών που δεν την κατέχουν. Γενικά αν διακρίνουμε τον πληθυσμό N (μορίων, ανθρώπων κ.λ.π.) σε δύο ομάδες με πλήθος A και B αντίστοιχα ($A+B=N$) τότε ο συνολικός αριθμός των περιπτώσεων που ένα μέλος της ομάδας A θα έρθει σε επαφή με μέλος της ομάδας B θα είναι $D=AB$. Είναι δηλαδή ίσος με όλους τους πιθανούς συνδυασμούς των A με τα B. Όλοι όμως οι συνδυασμοί δεν είναι πάντα εφικτοί και επιπλέον η συνάντηση των A με τα B δεν οδηγεί πάντα σε κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Αν p η πιθανότητα να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους ένα A με ένα B στην μονάδα του χρόνου τότε ο αντίστοιχος αριθμός τέτοιων αλληλεπιδράσεων θα είναι pAB.

Παράδειγμα:
Κινητική Ενζυμικών Αντιδράσεων

- Μεταβλητές κατάστασης.

  Για την περιγραφή του συστήματος απαιτούνται 4 μεταβλητές.

  Έστω E η συγκέντρωση του ενζύμου, S η συγκέντρωση του υποστρώματος,

  C η συγκέντρωση του συμπλόκου και P η συγκέντρωση του προϊόντος.

- **Κανόνες μετασχηματισμού**

  Η εξίσωση της κινητικής της αντίδρασης γράφεται:

$$\mathbf{E} + \mathbf{S} \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} \mathbf{C} \xrightarrow{k_2} \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Και το σύστημα περιγράφεται από τις παρακάτω 4 διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dE}{dt} = -k_1 ES + k_{-1}C + k_2 C, \quad \frac{dS}{dt} = -k_1 ES + k_{-1}C, \quad \frac{dC}{dt} = k_1 ES - k_{-1}C - k_2 C, \quad \frac{dP}{dt} = k_2 C.$$

Μοντέλα Συστημάτων σε Διακριτό Χρόνο: Μεταβολές Συχνότητας Αλληλομόρφων Λόγω Φυσικής Επιλογής (1 από 6)

- Έστω ότι μελετάμε τη συχνότητα δύο αλληλομόρφων ενός γονιδιακού τόπου σε μεγάλο Μενδελικό πληθυσμό που βρίσκεται σε ισοζύγιο Hardy-Weinberg. Κατασκευάστε μοντέλο που να περιγράφει τις μεταβολές της συχνότητας των δύο αλληλομόρφων λόγω δράσης της φυσικής επιλογής. Υποθέστε ότι δε συμβαίνουν μεταλλάξεις.
- Μεταβλητές κατάστασης: Έστω A και α τα δύο αλληλόμορφα με συχνότητα εμφάνισης στον πληθυσμό p και q αντίστοιχα. Ισχύει ότι $p+q=1$ και $0 \leq p,q \leq 1$. Έχουμε μία μεταβλητή κατάστασης έστω την p εφόσον η $q = 1-p$ υπολογίζεται εύκολα.

Μοντέλα Συστημάτων σε Διακριτό Χρόνο: Μεταβολές Συχνότητας Αλληλομόρφων Λόγω Φυσικής Επιλογής (2 από 6)

- Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζεται η κατάσταση του συστήματος

Γενότυπος	ΑΑ	Αα	αα
Βιωσιμότητα Λόγω επιλογής	1+s	1	1+h
Αρχική συχνότητα	p^2	2pq	q^2

Επειδή η δράση της επιλογής είναι σχετική, θεωρήσαμε αυθαίρετα τη βιωσιμότητα του ετεροζυγώτη ίση με τη μονάδα και των δύο ομοζυγωτών διαφορετική της μονάδας. Οι συντελεστές s και h μπορεί να είναι αρνητικοί αριθμοί οπότε η επιλογή δρα εναντίον των αντίστοιχων γενοτύπων. Ωστόσο οι τιμές τους δεν πρέπει να υπολείπονται του -1 καθόσον δε νοείται αρνητική βιωσιμότητα ($s,h \geq -1$).

Μοντέλα Συστημάτων σε Διακριτό Χρόνο: Μεταβολές Συχνότητας Αλληλομόρφων Λόγω Φυσικής Επιλογής (3 από 6)

- Για τη σχετική συμμετοχή των 3 γενοτύπων στην επόμενη γενιά έχουμε

Γενότυπος	ΑΑ	Αα	αα
Συμμετοχή στον πληθυσμό	$(1+s)\ p^2$	$2pq$	$(1+h)\ q^2$

Ωστόσο υπάρχει ένα πρόβλημα με το παραπάνω αποτέλεσμα. Αν αθροίσουμε τη συμμετοχή όλων των γενοτύπων έχουμε:

$W=(1+s)p^2 +2pq+(1+h)q^2 = p^2 +sp^2 +2pq+q^2+hq2=$

$(p^2+2pq+q^2) +sp^2+hq^2= (p+q)^2 +sp^2+hq^2=$ $\mathbf{1+sp^2+hq^2}$.

Αυτό το άθροισμα δεν ισούται με τη μονάδα. Για να διατηρήσουμε το άθροισμα συχνοτήτων των γενοτύπων στην επόμενη και κάθε επόμενη γενιά ίσο με τη μονάδα αρκεί να διαιρέσουμε τον κάθε όρο με το άθροισμα W οπότε η σχετική συμμετοχή στον πληθυσμό είναι:

Γενότυπος	ΑΑ	Αα	αα
Σχετική συμμετοχή στον πληθυσμό	$(1+s)\ p^2 /W$	$2pq/W$	$(1+h)\ q^2/W$

Μοντέλα Συστημάτων σε Διακριτό Χρόνο: Μεταβολές Συχνότητας Αλληλομόρφων Λόγω Φυσικής Επιλογής (4 από 6)

- Για την ώρα έχουμε διατυπώσει τον κανόνα μετασχηματισμού της συχνότητας των γενοτύπων υπό την πίεση της επιλογής.
- Το αρχικά ζητούμενο όμως ήταν ο κανόνας μετασχηματισμού της συχνότητας p του αλληλομόρφου Α από γενιά σε γενιά.
- Με βάση τα παραπάνω δεδομένα είναι εύκολο να διατυπωθεί ο κανόνας:
- Το αλληλόμορφο Α κληρονομείται στην επομένη γενιά από κάθε γενότυπο ΑΑ (πιθανότητα 1) και από τους μισούς γενοτύπους Αα (πιθανότητα 0.5). Ετσι στην επόμενη γενιά (και κάθε επόμενη) θα ισχύει για τη συχνότητα του Α η διατύπωση:

$$p_{t+1} = \frac{(1+s)p_t^{\,2} + p_t q_t}{W} = \frac{p_t(p_t + sp_t + q_t)}{W} = \frac{p_t(1+sp_t)}{W}$$

Μοντέλα Συστημάτων σε Διακριτό Χρόνο: Μεταβολές Συχνότητας Αλληλομόρφων Λόγω Φυσικής Επιλογής (5 από 6)

- **Μελέτη ισορροπίας.**

  Στην ισορροπία ισχύει ότι $p_{t+1} = p_t = p$ οπότε

$$p \;\; = \frac{p \;\, (1+sp \;\,)}{1+sp^{\,2}+hq^{\,2}} \Rightarrow p(1+sp^{\,2}+hq^{\,2})-p \;\,(1+sp \;\,)=0 \Rightarrow$$

•

$$p(1+sp^{\,2}+hq^{\,2}-1-sp) \Rightarrow p=0 \quad \eta \quad sp^{\,2}+hq^{\,2}-sp=0$$

$$sp(p-1)+hq^{\,2}=0 \Rightarrow sp(-q)+hq^2=0 \Rightarrow q(-sp+hq)=0 \Rightarrow q=0 \quad \eta$$

$$-sp+hq=0 \Rightarrow -sp+h(1-p)=0 \Rightarrow -hp-sp=-h \Rightarrow p=\frac{h}{h+s}$$

Μοντέλα Συστημάτων σε Διακριτό Χρόνο: Μεταβολές Συχνότητας Αλληλομόρφων Λόγω Φυσικής Επιλογής (6 από 6)

- **Υπάρχουν τρία σημεία ισορροπίας**
  - p=0, q=(1-p)=1 (Ο πληθυσμός αποτελείται μόνο από γενοτύπους αα)
  - q=0, p=(1-q)=1 (Ο πληθυσμός αποτελείται μόνο από γενοτύπους ΑΑ)
  - $p=\frac{h}{h+s}, q=1-\frac{h}{h+s}=\frac{s}{h+s}$

(Ο πληθυσμός αποτελείται από μείγμα όλων των γενοτύπων)

Είναι αυτονόητο ότι το σύστημα ισορροπεί στα σημεία p=0 και p=1 καθώς η συχνότητα του αλληλομόρφου Α δε μεταβάλλεται με το χρόνο όταν απουσιάζει το α (p=1) ή όταν απουσιάζει το ίδιο το Α από τον πληθυσμό (δε συμβαίνουν μεταλλάξεις του Α σε α και αντίστροφα).

Το τρίτο σημείο ισορροπίας είναι σημαντικό καθόσον προσδιορίζει ισοζύγιο των δύο αλληλομόρφων όταν η φυσική επιλογή επιδρά με σταθερούς ρυθμούς επί των τριών πιθανών γενοτύπων.

Ασκήσεις

- Στο μοντέλο φυσικής επιλογής η ποσότητα W είναι ενδεικτική της μέσης Δαρβινικής προσαρμογής των ατόμων του πληθυσμού. Για ποιες τιμές των p,q είναι μέγιστη; Σχολιάστε το αποτέλεσμα.

- Η κυστική ίνωση είναι μια γενετική ασθένεια που προκαλεί σοβαρά αναπνευστικά προβλήματα και οδηγεί στο θάνατο των ασθενών σε μικρή ηλικία (πριν από την αναπαραγωγή). Η ασθένεια εκδηλώνεται όταν ένα υποτελές γονίδιο βρεθεί σε ομοζυγωτία. Οι ετεροζυγώτες φορείς δεν εμφανίζουν συμπτώματα και αναπαράγονται κανονικά. Διατυπώστε μαθηματικό μοντέλο που να περιγράφει τις μεταβολές της συχνότητας του γονιδίου από γενιά σε γενιά. Αν σε κάποια χρονική στιγμή η συχνότητα του γονιδίου σε ένα πληθυσμό είναι p πόσες γενιές πρέπει να περάσουν για να υποδιπλασιαστεί;

Μοντέλο Δυναμικής Πληθυσμών May (1 από 2)

- Ένα από τα απλούστερα στην διατύπωσή τους μοντέλα δυναμικής πληθυσμών με λογιστικού τύπου αύξηση είναι το

$$N_{v+1} = rN_v(1 - N_v)$$

$$N = rN(1-N) \Rightarrow N - rN(1-N) = 0 \Rightarrow N(1 - r(1-N)) = 0$$

- Στο μοντέλο αυτό η βιοχωρητικότητα έχει τεθεί ίση με την μονάδα. Το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει την δυναμική αλλά απλοποιεί (και γενικεύει) το μοντέλο.

Σημεία ισορροπίας

N=0 και $1 - r + rN = 0 \Rightarrow N = \dfrac{r-1}{r}$

Μοντέλο Δυναμικής Πληθυσμών May (2 από 2)

- Ευστάθεια ισορροπίας

$$g'(N) = r - 2rN$$

$$g'(0) = r$$

$$|r| \le 1$$

η ισορροπία στο N=0 είναι ευσταθής αν

$$g'\left(\frac{r-1}{r}\right) = r - 2r\frac{r-1}{r} = r - 2r + 2 = 2 - r$$

Για να είναι ευσταθής η ισορροπία στο $N = \frac{1-r}{r}$

πρέπει $|2-r| < 1 \Rightarrow -1 < 2 - r < 1 \Rightarrow -3 < -r < -1 \Rightarrow 1 < r < 3$

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Αλμπανίδου

Θεσσαλονίκη, Χειμερινό Εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.