ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ενότητα 1: Στοιχεία Διανυσματικού Λογισμού

Σκορδύλης Εμμανουήλ

Καθηγητής Σεισμολογίας, Τομέας Γεωφυσικής,

Τμήμα Γεωλογίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

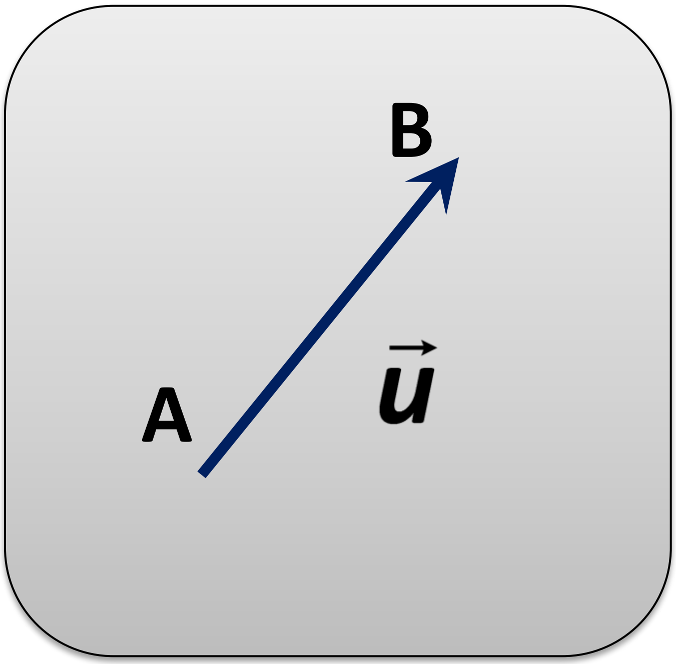
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ-1

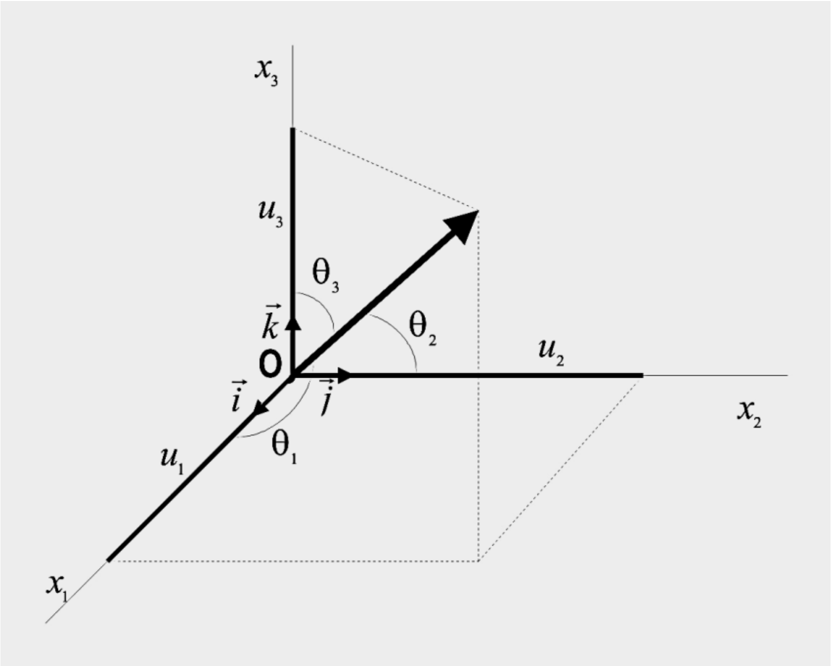


Μέτρο
Διεύθυνση
Κατεύθυνση (φορά)
Σημείο Εφαρμογής

Διανυσματικά Μεγέθη :
μετάθεση, ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη

Μονόμετρα Μεγέθη :
χρόνος, μάζα, όγκος, θερμοκρασία, πίεση, πυκνότητα

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ-2



Κατευθύνοντα συνημίτονα:

$\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1$, $\alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2$, $\alpha_3 = \sigma\upsilon\nu\theta_3$

συνιστώσες : u_1 , u_2 , u_3

<u>Παράσταση διανύσματος</u>

α) Μέτρο : u, (u), $|u|$ και κατευθύνοντα συνημίτονα

β) συνιστώσες : u_1, u_2, u_3

$$\vec{u} = u(u_1, u_2, u_3), \quad \vec{u} = u_i, \; i = 1, 2, 3$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \vec{i}u_1 + \vec{j}u_2 + \vec{k}u_3$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, μοναδιαία διανύσματα

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

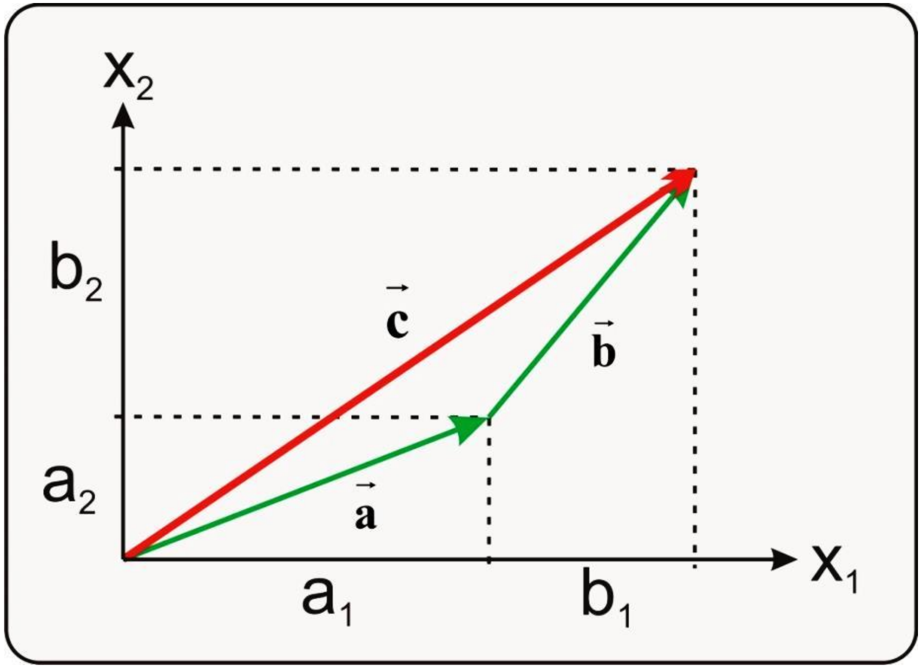
$$\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{u_1}{u}, \quad \alpha_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{u_2}{u}, \quad \alpha_3 = \sigma\upsilon\nu\theta_3 = \frac{u_3}{u}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-1

1.1 Πρόσθεση Διανυσμάτων

$$\vec{a} = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3$$

$$\vec{b} = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$$



Διανυσματικό (γεωμετρικό) άθροισμα :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{i}c_1 + \vec{j}c_2 + \vec{k}c_3$$

$$c_1 = a_1 + b_1$$

$$c_2 = a_2 + b_2$$

$$c_3 = a_3 + b_3$$

Αντίθετο του $\vec{u}$: $-\vec{u}$ (ίδιο μέτρο, αντίθετη φορά)

ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-2

1.2 Αφαίρεση διανυσμάτων

$\Rightarrow$ Πρόσθεση του αντιθέτου

$$\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$

$\gamma_1=\alpha_1-\beta_1$, $\gamma_2=\alpha_2-\beta_2$, $\gamma_3=\alpha_3-\beta_3$

Ίσα διανύσματα;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-3

1.3 Πολλαπλασιασμός διανυσμάτων

α) Εσωτερικό Γινόμενο (dot product)

(μονόμετρο μέγεθος)

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\sigma\upsilon\nu\phi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

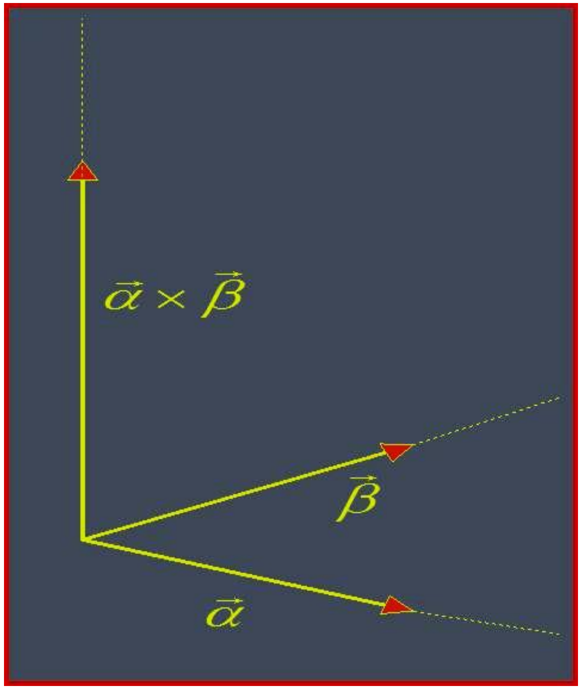
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = ?$$

$$\rightarrow \quad W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$$\rightarrow \quad \Pi = \vec{u} \cdot \vec{S}$$

$$\rightarrow \quad \Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-4



β) <u>Εξωτερικό Γινόμενο (vector/cross/outer product)</u>
<u>(διανυσματικό μέγεθος)</u>

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \quad \vec{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\times\vec{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\left|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right| = \alpha\beta\eta\mu\varphi$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\mathrm{i}}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \vec{\mathrm{j}}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \vec{\mathrm{k}}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

$$\rightarrow \quad \vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{F}}\times\vec{\mathrm{s}}$$

$$\rightarrow \quad \vec{\mathrm{S}} = \vec{\mathrm{B}}\times\vec{\mathrm{h}}$$

$$\rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{\upsilon}\times\vec{\mathrm{r}}$$

$$\vec{\alpha}\times\vec{\alpha} = ?$$

ΠΡΑΞΕΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-5

γ) <u>Δυαδικό γινόμενο (dyadic product)</u>

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i = \vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3, \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j e_j = \vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3$$

Το δυαδικό γινόμενο (dyadic product) δύο διανυσμάτων παρουσιάζεται ως τετραγωνικός πίνακας που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό του $\vec{a}$ ως διάνυσμα κολώνα (column vector) με το $\vec{b}$ ως διάνυσμα σειρά (row vector).

$$\square = \vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b}^{T} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

$$\square = \vec{a} \otimes \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i \otimes \sum_{j=1}^{3} b_j e_j = \left(\vec{i}a_1 + \vec{j}a_2 + \vec{k}a_3\right) \otimes \left(\vec{i}b_1 + \vec{j}b_2 + \vec{k}b_3\right)$$

$$= \vec{i}a_1\vec{i}b_1 + \vec{i}a_1\vec{j}b_2 + \vec{i}a_1\vec{k}b_3 + \vec{j}a_2\vec{i}b_1 + \vec{j}a_2\vec{j}b_2 + \vec{j}a_2\vec{k}b_3 + \vec{k}a_3\vec{i}b_1 + \vec{k}a_3\vec{j}b_2 + \vec{k}a_3\vec{k}b_3$$

9 συσιστώσες => μέγεθος μονόμετρο; διανυσματικό;

ΔΥΑΔΙΚΗ ΟΝΤΟΤΗΤΑ => **Τανυστής β΄ Τάξης**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.2

Δίνονται τα δύο διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ $\quad$ $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$

Να βρεθούν το γεωμετρικό τους άθροισμα, η γεωμετρική τους διαφορά, το εσωτερικό, εξωτερικό και δυαδικό τους γινόμενο

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 6 - 3 = -7$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = 2\vec{i}\vec{i} - 4\vec{i}\vec{j} + 6\vec{i}\vec{k} + 3\vec{j}\vec{i} - 6\vec{j}\vec{j} + 9\vec{j}\vec{k} - \vec{k}\vec{i} + 2\vec{k}\vec{j} - 3\vec{k}\vec{k}$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

- **Μονόμετρες συναρτήσεις** (π.χ. χρόνος, πυκνότητα, θερμοκρασία) (μεταβολές μονόμετρων ποσοτήτων στο χώρο ή το χρόνο).

- **Διανυσματικές συναρτήσεις** (π.χ. ένταση πεδίου βαρύτητας) (μεταβολές διανυσματικών ποσοτήτων στο χώρο ή το χρόνο).

Λογισμός Διανυσμάτων

(1) Διαφορικός Λογισμός

(2) Ολοκληρωτικός Λογισμός

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Απλή περίπτωση:

παραγώγιση διανυσματικής ποσότητας ως προς μονόμετρη ποσότητα

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{i}\,\frac{du_1}{dt} + \vec{j}\,\frac{du_2}{dt} + \vec{k}\,\frac{du_3}{dt}$$

ΤΕΛΕΣΤΕΣ-1

Σύμβολα μπροστά από διανυσματικές ή μονόμετρες συναρτήσεις υποδεικνύοντας πραγματοποίηση πράξεων παραγώγισης

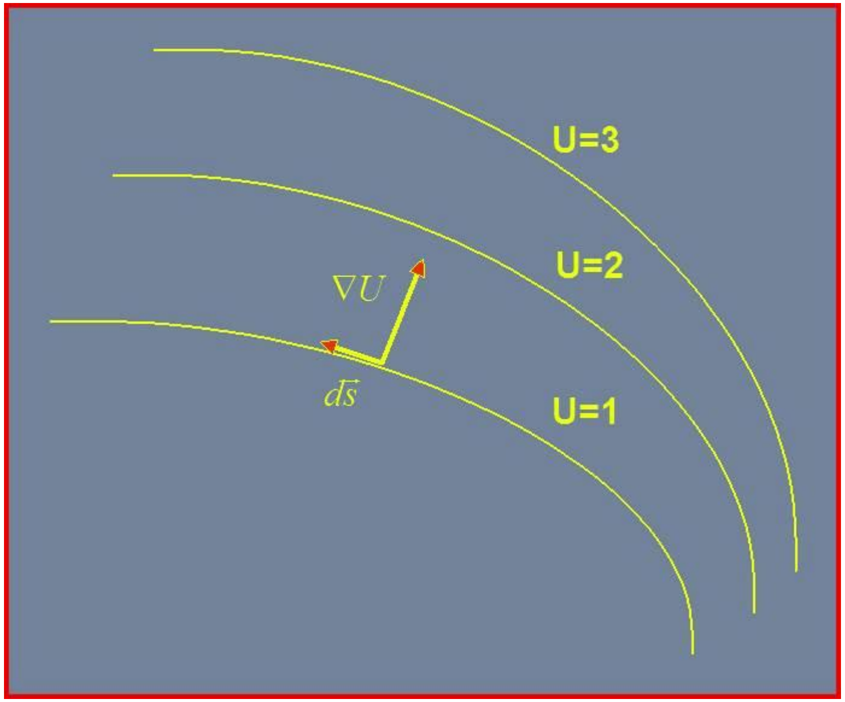
α) Διανυσματικός τελεστής ανάδελτα (nabla), ∇ (ΔΙΑΝΥΣΜΑ)

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Εφαρμόζεται σε μονόμετρες και διανυσματικές συναρτήσεις

ΤΕΛΕΣΤΕΣ-2

β) <u>Τελεστής βαθμίδα, grad</u> ***(ΔΙΑΝΥΣΜΑ)***



$$\vec{g} = gradU = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial x_3}$$

U=μονόμετρη ποσότητα

grad U = ∇U

Η **<u>βαθμίδα μεταβολής του υψομέτρου</u>** σε ένα σημείο μιας πλαγιάς είναι **διάνυσμα κάθετο στην ισοϋψή** στο σημείο αυτό και περιγράφει την τοπογραφική κλίση στο σημείο αυτό.

ΤΕΛΕΣΤΕΣ-3

γ) <u>Τελεστής απόκλιση, div</u> ***(ΜΟΝΟΜΕΤΡΗ)***

$$\theta = div\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Εφαρμόζεται σε διάνυσμα – προκύπτει μονόμετρη

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{u}} = \nabla \cdot \vec{\mathrm{u}} = \left(\vec{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1} + \vec{\mathrm{j}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2} + \vec{\mathrm{k}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_3} \right) \cdot \left(\vec{\mathrm{i}}\mathrm{u}_1 + \vec{\mathrm{j}}\mathrm{u}_2 + \vec{\mathrm{k}}\mathrm{u}_3 \right) =$$

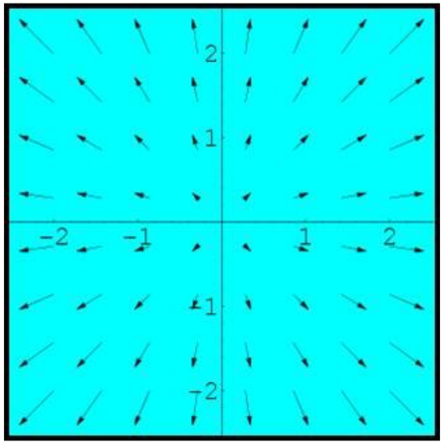
$$= \frac{\partial \mathrm{u}_1}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{\partial \mathrm{u}_2}{\partial \mathrm{x}_2} + \frac{\partial \mathrm{u}_3}{\partial \mathrm{x}_3}$$

$$\text{Αν} \quad \nabla \cdot \vec{\mathrm{u}} = 0 \Rightarrow \textbf{Σωληνοειδές διάνυσμα}$$

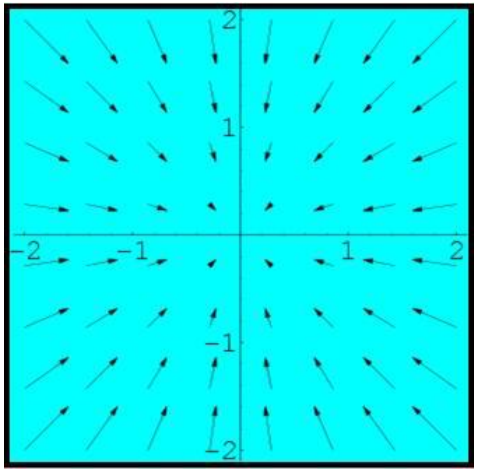
ΤΕΛΕΣΤΕΣ-4

Αν θεωρήσουμε έναν ***ιδεατό χώρο*** μέσα στον οποίο πραγματοποιείται ροή ρευστού. Έστω ότι η $\vec{F}(x,y,z)$ είναι μια διανυσματική συνάρτηση που περιγράφει την ταχύτητα του ρευστού στη θέση (x,y,z) του χώρου αυτού. **Απόκλιση** της $\vec{F}$ είναι η μεταβολή της στο χώρο.

Αν το υγρό κινείται προς τα έξω (π.χ. υπάρχουν πηγές μέσα στον ιδεατό χώρο που μελετούμε) τότε η τιμή $div\ \vec{F}$ είναι θετική και περιγράφει ποσοτικά αυτήν την διόγκωση (κίνηση προς τα έξω, εκροή από τον ιδεατό χώρο).



Αντίθετα, αν η κίνηση του υγρού είναι προς τα μέσα (π.χ. υπάρχει συνεχής τροφοδοσία από έξω προς τα μέσα και κατανάλωση ρευστού στο εσωτερικό του ιδεατού χώρου) τότε η τιμή $div\vec{F}$ είναι αρνητική.



Σε μια άλλη προσέγγιση, η απόκλιση θα περιέγραφε, την κυβική παραμόρφωση, τη μεταβολή, δηλαδή, του όγκου του υλικού που παραμορφώνεται.

ΤΕΛΕΣΤΕΣ-5

δ) <u>Τελεστής περιστροφή, rot ή curl</u> ***(ΔΙΑΝΥΣΜΑ)***

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\vec{u} = \mathrm{curl}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)$$

Αν το διάνυσμα $\vec{u}$ περιγράφει την ταχύτητα κίνησης ενός υγρού σε ένα ιδεατό χώρο, η διανυσματική συνάρτηση $curl\,\vec{u}$ περιγράφει το στροβιλισμό του υγρού μέσα στο χώρο αυτό

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}$$

$$\text{Αν} \quad \nabla \times \vec{u} = 0 \Rightarrow \textbf{Αστρόβιλο διάνυσμα}$$

ΤΕΛΕΣΤΕΣ-6

ε) <u>Τελεστής λαπλασιανή, ∇^2</u> ***(ΜΟΝΟΜΕΤΡΗ – ΔΙΑΝΥΣΜΑ)***

$$\Phi = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2}$$

Εφαρμογή σε μονόμετρη (U)

$$\nabla^2 \vec{u} = \vec{i}\nabla^2 u_1 + \vec{j}\nabla^2 u_2 + \vec{k}\nabla^2 u_3$$

Εφαρμογή σε διανυσματική $(\vec{u})$

<u>Φυσική σημασία</u>: η εφαρμογή της σε μια ποσότητα δείχνει τη μεταβολή της τιμής της ποσότητας από ένα σημείο σε ένα γειτονικό του.

$$\nabla^2 \mathbf{U} = \left|\mathbf{U} - \mathbf{U_0}\right|, \quad \acute{o}\pi o\upsilon$$

U_0 = τιμή ποσότητας στο σημείο 0

U = » » στη γειτονιά του σημείου 0

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.3

Δίνεται η μονόμετρη συνάρτηση: $U = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2$
Να βρεθούν η βαθμίδα (grad) και η λαπλασιανή της (∇^2*) στο σημείο (0, 1, -1)*

$$\mathrm{grad}\,U = \nabla U = \vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial x_3} =$$

$$= \vec{i}(2x_1) + \vec{j}(4x_2) + \vec{k}(-6x_3) = 4\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = 2 + 4 - 6 = 0$$

Σε κάθε σημείο

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.4

Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{u}(x_1, 2x_1x_2x_3, -x_1^2x_2^2x_3)$ *Να βρεθούν η απόκλιση (div), η περιστροφή (rot ή curl) και η λαπλασιανή της (* ∇^2*) στο σημείο (1, -2, -1)*

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 1 + 2x_1x_3 - x_1^2x_2^2 = -5$$

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot}\vec{u} = \operatorname{curl}\vec{u} = \nabla\times\vec{u} = \vec{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) =$$

$$= \vec{i}(-2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2) + \vec{j}(2x_1x_2^2x_3) + \vec{k}(2x_2x_3) = 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\nabla^2\vec{u} = \vec{i}\nabla^2u_1 + \vec{j}\nabla^2u_2 + \vec{k}\nabla^2u_3 =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_3^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_3^2}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_3^2}\right) =$$

$$= 0 + 0 + \vec{k}(-2x_2^2x_3 - 2x_1^2x_3) = -2x_3(x_2^2 + x_1^2)\vec{k} = 10\vec{k}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.1

α) μέτρα, κατευθύνοντα συνημίτονα, γωνίες με τους άξονες

β) άθροισμα, διαφορά

γ) εσωτερικό, εξωτερικό, δυαδικό γινόμενο

$$\vec{a}(2, 3, -1), \quad \vec{b}(-1, 4, 1)$$

$$a = \sqrt{4+9+1} = 3.74$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{2}{3.74} \Rightarrow \theta_1 = 57.7^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{3}{3.74} \Rightarrow \theta_2 = 36.7^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_3 = -\frac{1}{3.74} \Rightarrow \theta_3 = 105.5^0$$

$$b = \sqrt{1+16+1} = 4.24$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = -\frac{1}{4.24} \Rightarrow \theta_1 = 103.6^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{4}{4.24} \Rightarrow \theta_2 = 19.5^0, \quad \sigma\upsilon\nu\theta_3 = \frac{1}{4.24} \Rightarrow \theta_3 = 76.4^0$$

$$\vec{a}(2,3,-1) + \vec{b}(-1,4,1) = \vec{\gamma}(1,7,0), \quad \vec{a} + \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + (-\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + 7\vec{j}$$

$$\vec{a}(2,3,-1) - \vec{b}(-1,4,1) = \vec{\delta}(3,-1,-2), \quad \vec{a} - \vec{b} = (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - (-\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 = 9$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = -2\vec{i}\vec{i} + 8\vec{i}\vec{j} + 2\vec{i}\vec{k} - 3\vec{j}\vec{i} + 12\vec{j}\vec{j} + 3\vec{j}\vec{k} + \vec{k}\vec{i} - 4\vec{k}\vec{j} - \vec{k}\vec{k}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2

Δίνεται μονόμετρη συνάρτηση $\Phi = x_1^2x_2 + x_2^3x_3 - x_1x_2x_3$.
Να βρεθούν η βαθμίδα (grad) και η λαπλασιανή της (∇^2*) στο σημείο (1, 2, 0)*

$$\mathrm{grad}\Phi = \nabla\Phi = \vec{i}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \vec{j}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \vec{k}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_3} =$$

$$= (2x_1x_2 - x_2x_3)\vec{i} + (x_1^2 + 3x_2^2x_3 - x_1x_3)\,\vec{j} + (x_2^3 - x_1x_2)\vec{k} =$$

$$= 4\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2} = 2x_2 + 6x_2x_3 = 4$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Δίνεται διανυσματική συνάρτηση $\vec{u} = \vec{i}x_1x_2^2 + \vec{j}x_1x_2x_3 + \vec{k}x_2x_3^2$

Να βρεθούν η απόκλιση (div), η περιστροφή (rot ή curl) και η λαπλασιανή της (∇^2*) στο σημείο (1, 1, -1)*

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = x_2^2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 = -2$$

$$\operatorname{rot}\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1x_2^2 & x_1x_2x_3 & x_2x_3^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial x_2x_3^2}{\partial x_2} - \frac{\partial x_1x_2x_3}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial x_1x_2^2}{\partial x_3} - \frac{\partial x_2x_3^2}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial x_1x_2x_3}{\partial x_1} - \frac{\partial x_1x_2^2}{\partial x_2}\right) =$$

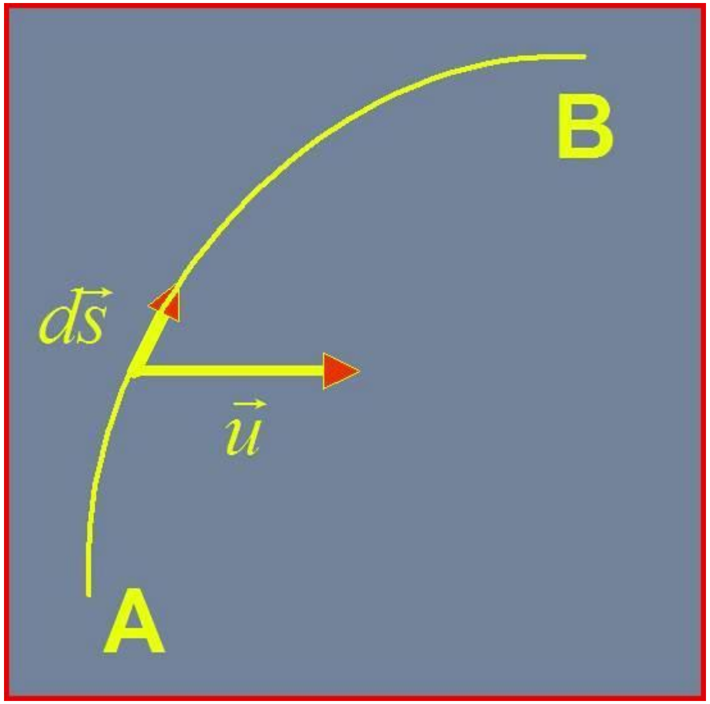
$$= \vec{i}(x_3^2 - x_1x_2) + \vec{j}(0) + \vec{k}(x_2x_3 - 2x_1x_2) = -3\vec{k}$$

$$\nabla^2\vec{u} = \vec{i}\nabla^2u_1 + \vec{j}\nabla^2u_2 + \vec{k}\nabla^2u_3 =$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_1}{\partial x_3^2}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_2}{\partial x_3^2}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial^2u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2u_3}{\partial x_3^2}\right) =$$

$$= \vec{i}\,2x_1 + \vec{k}\,2x_2 = 2\vec{i} + 2\vec{k}$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-1



α) Απλό Ολοκλήρωμα Διανύσματος

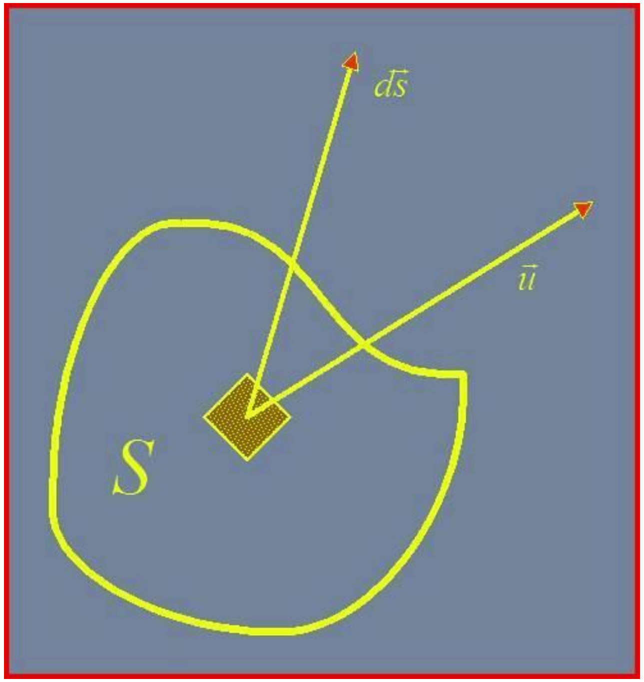
$$W = \int_A^B \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3)$$

u_1, u_2, u_3 συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u}$
dx_1, dx_2, dx_3 συνιστώσες του διανύσματος $d\vec{s}$

π.χ. έργο

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-2

β) <u>Διπλό Ολοκλήρωμα Διανύσματος</u>



$$\iint_S \underbrace{\vec{u}\cdot d\vec{S}}_{\text{εσωτερικό γινόμενο}} = \iint_S (u_1\, dS_1 + u_2\, dS_2 + u_3\, dS_3)$$

u_1, u_2, u_3 συνιστώσες του διανύσματος $\vec{u}$
dS_1, dS_2, dS_3 συνιστώσες του διανύσματος $d\vec{S}$

$$\text{Αν} \quad \vec{u} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{u}\cdot d\vec{S} = |u|.|dS|.\cos 90 = 0$$

π.χ. *αν* $\vec{u}$ *η ένταση ενός ηλεκτρικού/μαγνητικού πεδίου το διπλό ολοκλήρωμα είναι η ηλεκτρική/μαγνητική ροή του πεδίου δια μέσου της επιφάνειας* $\vec{S}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ-3

γ) Τριπλό Ολοκλήρωμα Διανύσματος

$$\iiint_V \vec{u}\,dV = \iiint_V \left[\left(\vec{i}u_1 + \vec{j}u_2 + \vec{k}u_3 \right) dV \right] =$$

$$= \vec{i} \iiint_V u_1 dV + \vec{j} \iiint_V u_2 dV + \vec{k} \iiint_V u_3 dV$$

$$\frac{\iiint_V \vec{u}\,dV}{V} =$$

Μέση τιμή του διανύσματος στο χώρο του όγκου ***V***

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ (ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS)

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{u}\, dV = \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης διανυσματικής συνάρτησης σε όγκο ***V*** ισοδυναμεί με

Το διπλό ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης στην επιφάνεια ***S*** που περιβάλλει τον ***V***

*π.χ. Ο ρυθμός απόκλισης υγρού από όγκο **V** ιδεατού δοχείου = ρυθμό εκροής του από την επιφάνεια **S** που περιβάλλει τον όγκο (δοχείο)*

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ STOKES

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{u}\right) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Το διπλό ολοκλήρωμα της περιστροφής διανύσματικής συνάρτησης
σε επιφάνεια ***S*** ισοδυναμεί με
Το απλό κλειστό ολοκλήρωμα της διανύσματικής συνάρτησης
στη γραμμή ***s*** που περιβάλλει την ***S***

*π.χ. Στροβιλισμός υγρού σε επιφάνεια **S** ισοδυναμεί με το μέσο στροβιλισμό υγρού κατά μήκος της γραμμής, **s**, που περιβάλλει την επιφάνεια **S**.*

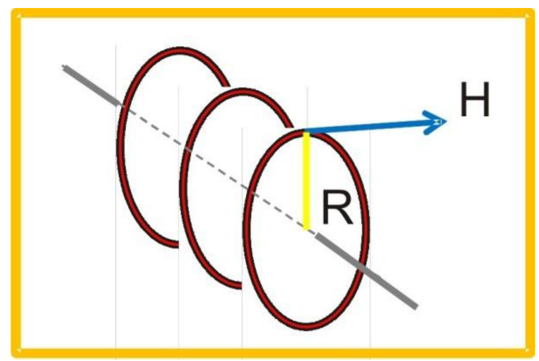
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.5

*Ευθύγραμμος ηλεκτρικός αγωγός ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα έντασης **i** δημιουργεί μαγνητικό πεδίο έντασης **H** (σε απόσταση **r** από τον αγωγό) η οποία εφάπτεται κύκλου ακτίνας **r** και έχει μέτρο ίσο με **ki/r**, όπου **k** σταθερά. Να βρεθεί το απλό ολοκλήρωμα της έντασης κατά μήκος περιφέρειας κύκλου που έχει το κέντρο του στον αγωγό και ακτίνα **R**.*

Έστω στοιχειώδες μήκος $d\vec{s}$ πάνω στον κύκλο. Τότε :

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = \oint \left(\frac{ki}{R} ds \cdot \cos 0\right) = \frac{ki}{R}\oint ds = \frac{ki}{R}\cdot 2\pi R = 2\pi ki$$

(εσωτερικό γινόμενο) => H·ds·cos(0)=H·ds



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.6

*Η ένταση, **E**, του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο που απέχει απόσταση **r** από ηλεκτρικό φορτίο **q** <u>έχει τη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει το φορτίο με το σημείο</u>**(1)** και μέτρο που δίνεται από τη σχέση **E=kq/r²**. Να βρεθεί η ηλεκτρική ροή που περνάει από την επιφάνεια σφαίρας που έχει κέντρο το φορτίο **q** και ακτίνα **R.***

(1) => διεύθυνση της **E** // διεύθυνση ακτίνων **R** =>

Ηλεκτρική ροή:

$$\vec{E}\cdot d\vec{S} = |E|\cdot|dS|\cdot\cos 0 = |E|\cdot|dS|$$

όπου $d\vec{S}$ στοιχείο της επιφάνειας της σφαίρας.

$$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{kq}{R^2} dS = \frac{kq}{R^2}\iint_S dS = \frac{kq}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kq$$

Άρα η συνολική ροή είναι ανεξάρτητη της επιφάνειας.

ΤΑΝΥΣΤΕΣ-1

Τανυστής ***n*** *τάξης* στο χώρο των ***r*** διαστάσεων:

- r^n συνιστώσες,
- κατά την αλλαγή των αξόνων υπακούει σε ορισμένο μετασχηματισμό

➢ *τανυστές 0ής τάξης*, **$r^0=3^0=1$ →** ***μονόμετρα μεγέθη***

➢ *τανυστές 1ης τάξης*, **$r^1=3^1=3$ → διανυσματικά μεγέθη**

➢ *τανυστές 2ης τάξης*, **$r^2=3^2=9$ → τάση, ανηγμένη παραμόρφωση**

$$S_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

ΤΑΝΥΣΤΕΣ-2

Ιδιότητες Τανυστών Δεύτερης Τάξης

Α) ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ

$$S_{ij} = S_{ji} \Rightarrow S_{12} = S_{21}, \quad S_{23} = S_{32}, \quad S_{13} = S_{31} \qquad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Β) ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ (ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΕΑΣ/ΣΤΡΟΦΕΑΣ)

$$S_{ij} = -S_{ji} \Rightarrow \begin{cases} S_{12} = -S_{21}, \quad S_{23} = -S_{32}, \quad S_{13} = -S_{31} \\ S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0 \end{cases} \qquad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Γ) ΙΣΟΤΡΟΠΟΣ

$$S_{11} = S_{22} = S_{33}, \quad S_{12} = S_{21} = S_{23} = S_{32} = S_{13} = S_{31} \qquad \text{π.χ.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Στους **ισότροπους τανυστές** :

(α) οι άξονες θεωρούνται **ισοδύναμοι** και
(β) εναλλαγή των αξόνων δεν επηρεάζει τις τιμές των συνιστωσών

Ίχνος τανυστή : $S_{11} + S_{22} + S_{33}$

ΤΑΝΥΣΤΕΣ-3

Τανυστής = Συμμετρικός (με ίδιο ίχνος) + Αντισυμμετρικός (1)

Τανυστής = Ισότροπος (με ίδιο ίχνος) + Τανυστής (με μηδενικό ίχνος)

Συμμετρικός τανυστής = Ισοτροπέας + Εκτροπέας (2)

(1) Λ (2) => *<u>Τανυστής = Ισοτροπέας + Εκτροπέας + Αντισυμμετρικός</u>*

Τανυστής Kroneker, δ_{ij}

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

για $i=j$ $\delta_{ij}=1$, για $i \neq j$ $\delta_{ij}=0$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.7

Δίνεται ο τανυστής 2ης τάξης :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 8 & 3 & 11 \\ 5 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Να αναλυθεί σε άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή

$$S_{ij}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_2 \\ y_1 & 3 & y_3 \\ y_2 & y_3 & 8 \end{pmatrix} \qquad S_{ij}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 \\ x_1 & 0 & -x_3 \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lr} x_1 + y_1 = 8 & (1) \\ x_2 + y_2 = 5 & (2) \\ y_1 - x_1 = 4 & (3) \\ y_2 - x_2 = -5 & (4) \\ y_3 - x_3 = 11 & (5) \\ x_3 + y_3 = -7 & (6) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (1)+(3) \Rightarrow y_1 = 6 \\ (1) \Rightarrow x_1 = 2 \\ (5)+(6) \Rightarrow y_3 = 2 \\ (6) \Rightarrow x_3 = -9 \\ (2)+(4) \Rightarrow y_2 = 0 \\ (2) \Rightarrow x_2 = 5 \end{array}\right|$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.8

Να αναλυθεί σε άθροισμα ενός ισοτροπέα και ενός εκτροπέα

$$S_{ij}^{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ισότροπος → ομόλογα στοιχεία ίσα, ίδιο ίχνος με αρχικό

$$S_{ij}^{\iota\sigma} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Στοιχεία διαγωνίου = (1+3+8)/3 = 4

$$S_{ij}^{\sigma} = S_{ij}^{\iota\sigma} + S_{ij}^{\varepsilon\kappa} \Rightarrow S_{ij}^{\varepsilon\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{ij}^{\varepsilon\kappa} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Άρα:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.4

Δίνεται διανυσματική συνάρτηση $\vec{u} = \vec{i}(x_1 - 1) - \vec{j}x_2$

Να αποδειχθεί ότι είναι αστρόβιλη $(\mathrm{rot}\vec{u} = 0)$ *και* $\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = 0$

$$\mathrm{rot}\,\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = \vec{i}(0) + \vec{j}(0) + \vec{k}(0) = 0$$

Θεώρημα STOKES: $$\oint \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_S (\underbrace{\nabla \times \vec{u}}_{0}) \cdot d\vec{S} = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.5

Δίνεται διανυσματική συνάρτηση $\vec{u} = \vec{i}(x_1 - 1) - \vec{j}x_2$
Να αποδειχθεί ότι είναι σωληνοειδής (div $\vec{u}$ *=0) και* $\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = 0$

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 1 - 1 = 0$$

=> Σωληνοειδής

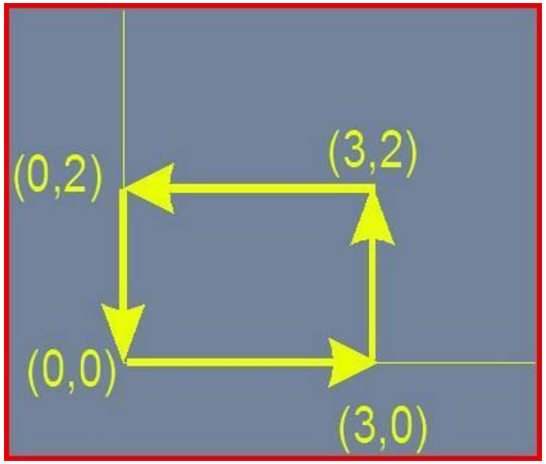
Θεώρημα της απόκλισης (θεώρημα GAUSS)

$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\underbrace{\nabla \cdot \vec{u}}_{0})\, dV = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.6

Να υπολογιστεί το απλό ολοκλήρωμα του διανύσματος $\vec{u} = \vec{i}x_1 + \vec{j}x_2$
κατά μήκος της διαδρομής (0,0) → (3,0) → (3,2) → (0,2) → (0,0)

$$A = \int_{(a,b)}^{(c,d)} \vec{u}\cdot d\vec{s} = \int_{(a,b)}^{(c,d)} x_1.dx_1 + \int_{(a,b)}^{(c,d)} x_2.dx_2 = \left.\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}\right|_{(a,b)}^{(c,d)}$$



$$(0,0) \to (3,0) \Rightarrow A_1 = \left(\frac{9}{2} + \frac{0}{2} - \frac{0}{2} - \frac{0}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$(3,0) \to (3,2) \Rightarrow A_2 = \left(\frac{9}{2} + \frac{4}{2} - \frac{9}{2} - \frac{0}{2}\right) = 2$$

$$(3,2) \to (0,2) \Rightarrow A_3 = \left(\frac{0}{2} + \frac{4}{2} - \frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

$$(0,2) \to (0,0) \Rightarrow A_4 = \left(\frac{0}{2} + \frac{0}{2} - \frac{0}{2} - \frac{4}{2}\right) = -2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{9}{2} + 2 - \frac{9}{2} - 2 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.8

Να βρεθούν τα ίχνη ενός α) στροφέα, β) εκτροπέα, γ) ισοτροπέα με ένα διαγώνιο στοιχείο -4

α) Στροφέας (αντισυμμετρικός): $S_{ij} = -S_{ji} \Rightarrow S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0 \Rightarrow$ ίχνος = 0

β) Συμμετρικός = ισοτροπέας + εκτροπέας

$\downarrow$

Ισότροπος τανυστής με ίχνος ίσο με του αρχικού και στοιχεία διαγωνίου ίσα

Άρα, ίχνος εκτροπέα = 0

γ) Ισοτροπέας $\Rightarrow$ στοιχεία διαγωνίου ίσα, κ=-4 $\Rightarrow$ ίχνος = 3.(-4) = -12

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Βεντούζη Χρυσάνθη

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.