ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ενότητα 2: Μηχανικές Ταλαντώσεις

Σκορδύλης Εμμανουήλ
Καθηγητής Σεισμολογίας, Τομέας Γεωφυσικής,
Τμήμα Γεωλογίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Κινήσεις που πραγματοποιούν τα σώματα όταν ασκούνται σ’ αυτά δυνάμεις εναλλασσόμενης φοράς

<u>Περιοδικές</u> (περίοδος ***T***, συχνότητα ***f***, ***f = 1/T***)

Είδη ταλαντώσεων:

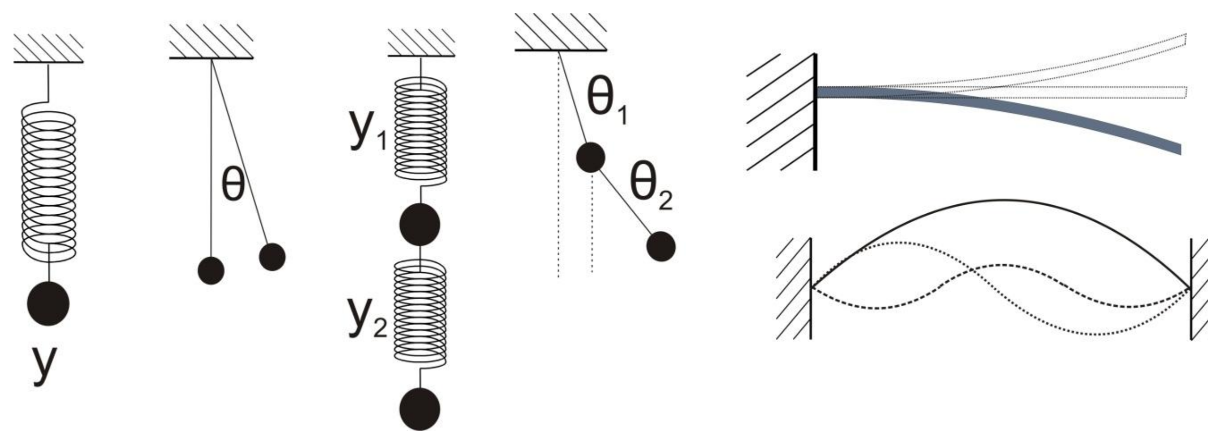
Ελεύθερες Ταλαντώσεις (εναλλασσόμενη δύναμη σύμφυτη του συστήματος, ιδιοπερίοδος, T_0 ή φυσική περίοδος*).*

<u>Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις</u> (εξωτερική εναλλασσόμενη δύναμη ανεξάρτητη του συστήματος, περίοδος ταλάντωσης, συντονισμός).

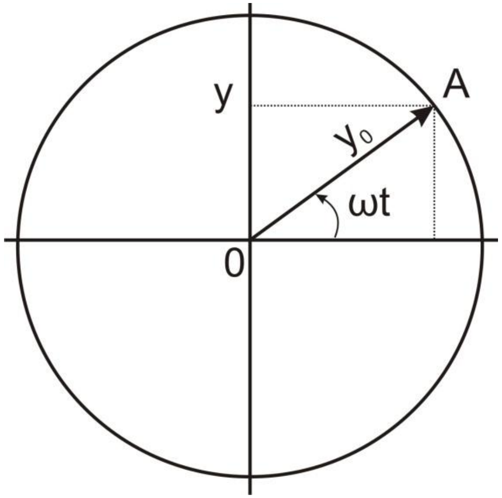
<u>Δυνάμεις Απόσβεσης</u> (φθίνουσες ελεύθερες ταλαντώσεις).

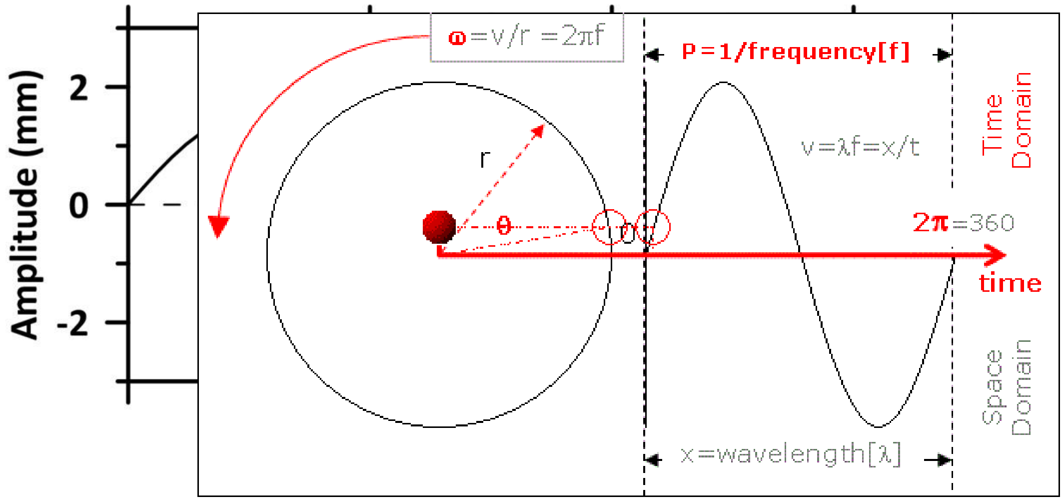
<u>Βαθμοί Ελευθερίας</u>

Κύριες ιδιομορφές ταλαντώσεων



ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ-1





http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html

Αρμονική ταλάντωση – ημιτονική ταλάντωση

$y=y_0 ημφ$,

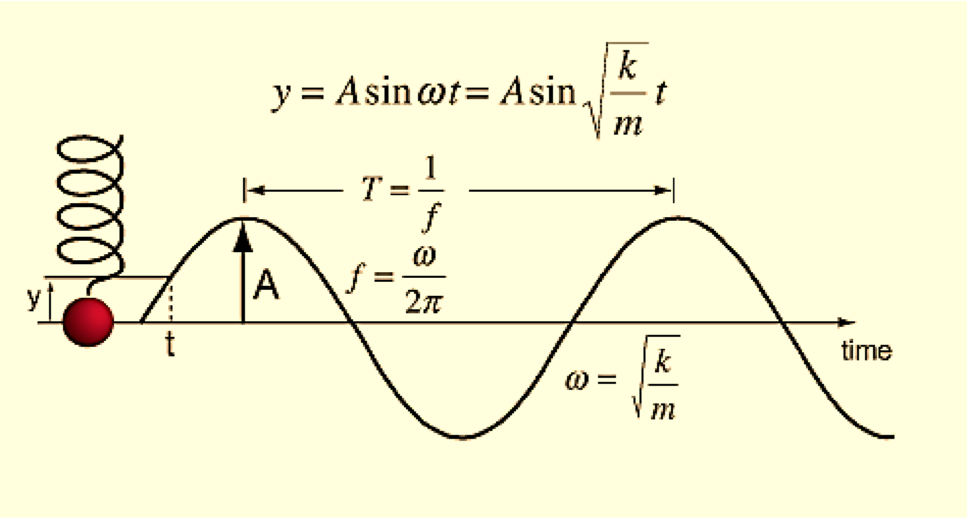
$φ$: φάση, $ω$: κυκλική συχνότητα (ή γωνιακή ταχύτητα)=> $φ=ωt$ =>

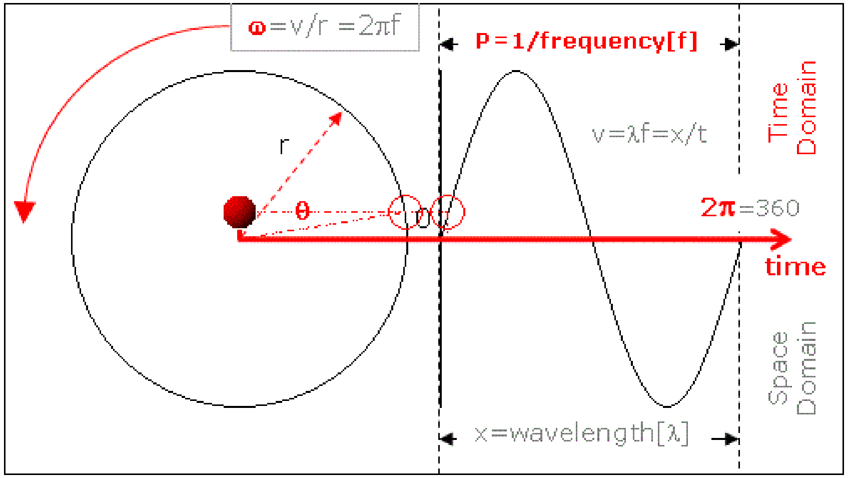
$y=y_0 ημ(ωt)$

Για $φ=2π$ απαιτείται χρόνος T: $2π= ωT$

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ-2





http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html

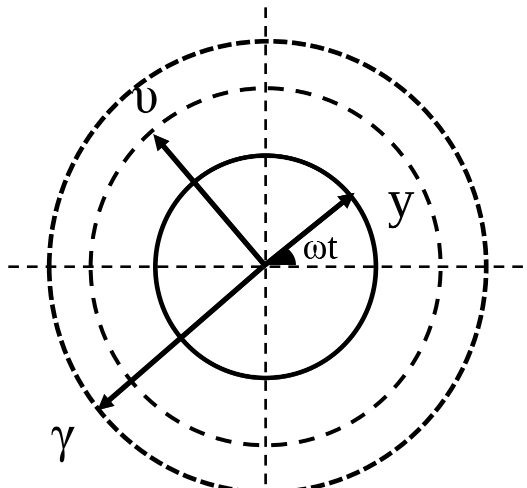
ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ-3

$$y = y_0 \eta\mu(\omega t)$$

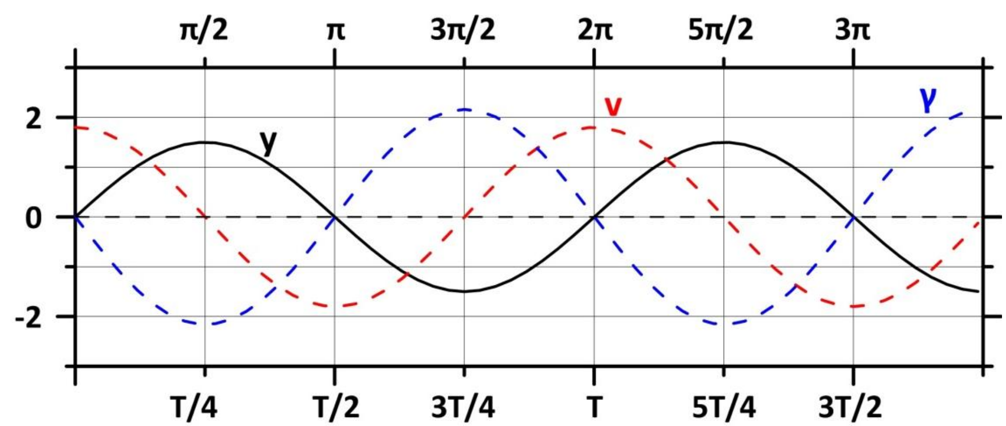
$$\upsilon = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \omega y_o \, \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \omega y_o \, \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\gamma = \ddot{y} = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega^2 y_o \eta\mu(\omega t) = \omega^2 y_o \eta\mu(\omega t + \pi) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0}$$

(Διαφορική Εξίσωση Αρμονικής Ταλάντωσης)

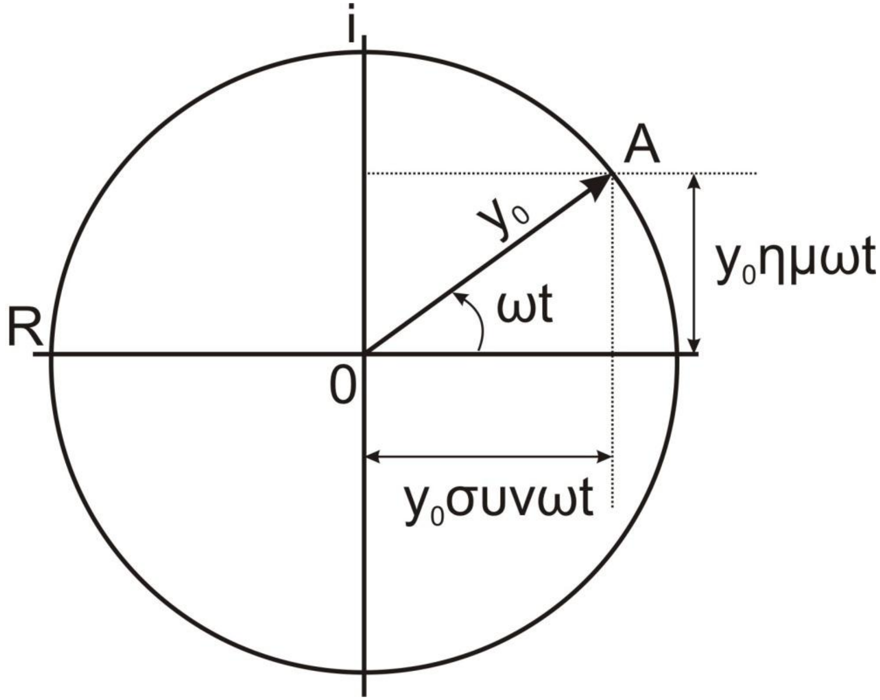


Διανυσματική παράσταση



Μεταβολή ως προς χρόνο

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ-4



Λύση της διαφορικής εξίσωσης
της αρμονικής ταλάντωσης είναι και η:

$$\left.\begin{array}{l} y = y_o \exp(i\omega t) \\ \exp(i\omega t) = \sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\eta\mu(\omega t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_o \sigma\upsilon\nu(\omega t) + i y_o \eta\mu(\omega t)$$

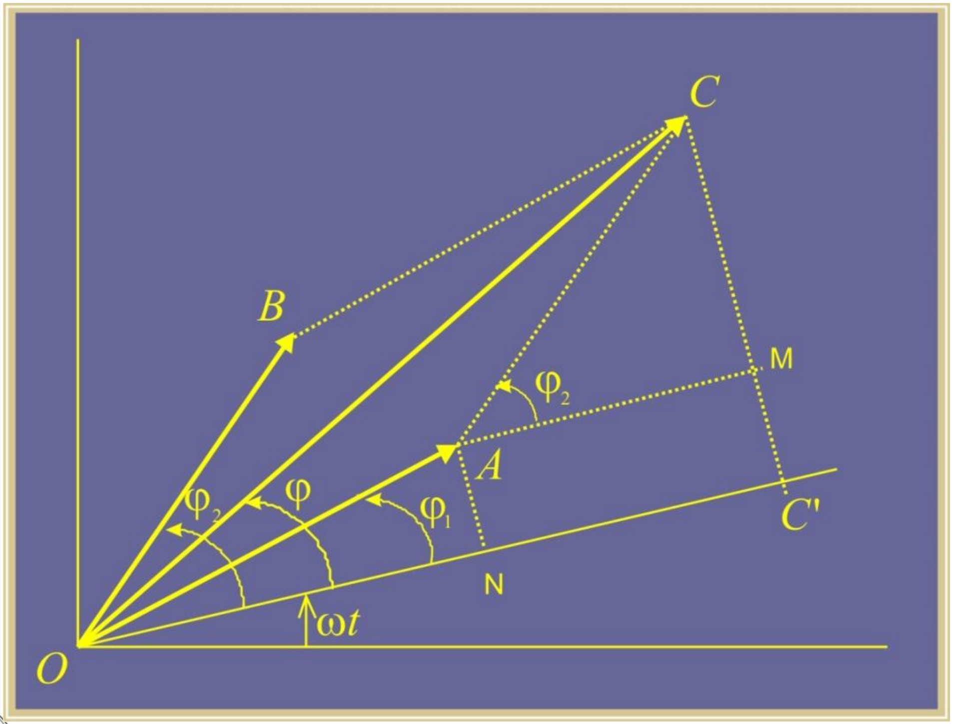
Παράσταση αρμονικής ταλάντωσης υπό μορφή μιγαδικής συνάρτησης με πραγματικό όρο ***y_0συν(ωt)*** και φανταστικό όρο ***y_0ημ(ωt)*** που παριστάνουν επίσης αρμονικές ταλαντώσεις

ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ-1

Αν $\mathbf{T_1=T_2} \Rightarrow$ αρμονική ταλάντωση

Αν $\mathbf{T_1 \neq T_2} \Rightarrow$ μη αρμονική περιοδική ταλάντωση

<u>Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Ίδιας Περιόδου</u> (γεωμετρική απόδειξη)



$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu(\omega t+\varphi_1) \\ y_2 &= B\eta\mu(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right| \Rightarrow (\sigma\acute{\upsilon}\nu\theta\varepsilon\sigma\eta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C\,\eta\mu(\omega t+\varphi)$$

$$\left|\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2+B^2+2AB\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \varepsilon\varphi\,\varphi &= \frac{A\,\eta\mu\,\varphi_1+B\,\eta\mu\,\varphi_2}{A\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_1+B\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi_2} \end{aligned}\right.$$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ-2

<u>Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Ίδιας Περιόδου</u> (αλγεβρική απόδειξη)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\eta\mu(\omega t+\varphi_1) \\ y_2 &= B\eta\mu(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right| \Rightarrow y = y_1 + y_2 = C\eta\mu(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$A\eta\mu(\omega t+\varphi_1)+B\eta\mu(\omega t+\varphi_2)=C\eta\mu(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$A\eta\mu(\omega t).\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + A\eta\mu\varphi_1.\sigma\upsilon\nu(\omega t)+B\eta\mu(\omega t).\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + B\eta\mu\varphi_2.\sigma\upsilon\nu(\omega t)=$$

$$=C\eta\mu(\omega t).\sigma\upsilon\nu\varphi+C\eta\mu\varphi.\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow$$

$$(A\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + B\sigma\upsilon\nu\varphi_2)\cdot\eta\mu(\omega t)+(A\eta\mu\varphi_1+B\eta\mu\varphi_2)\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t)=$$

$$=C\sigma\upsilon\nu\varphi.\eta\mu(\omega t)+C\eta\mu\varphi.\sigma\upsilon\nu(\omega t) \Rightarrow$$

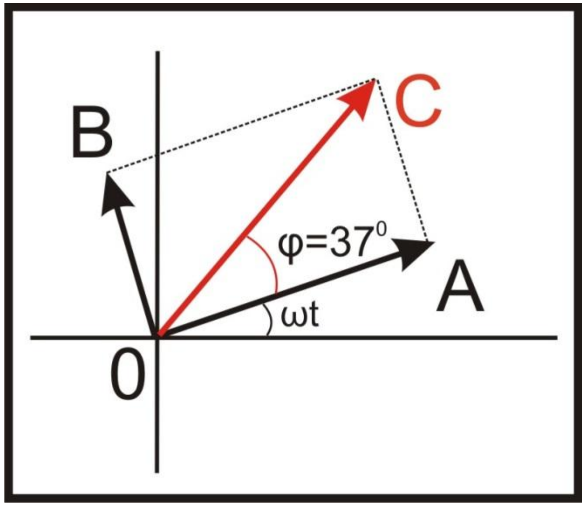
$$\left.\begin{aligned} A\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + B\sigma\upsilon\nu\varphi_2 &= C\sigma\upsilon\nu\varphi \\ A\eta\mu\varphi_1 + B\eta\mu\varphi_2 &= C\eta\mu\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \left| \begin{aligned} C &= \sqrt{A^2+B^2+2AB\sigma\upsilon\nu(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \varepsilon\varphi\,\varphi &= \frac{A\eta\mu\varphi_1+B\eta\mu\varphi_2}{A\sigma\upsilon\nu\varphi_1+B\sigma\upsilon\nu\varphi_2} \end{aligned}\right.$$

Αν κάποια από τις συνιστώσες δίνεται ως συνάρτηση συνημιτόνου τότε τη μετατρέπουμε σε ημιτονική:

συν(ωt+φ)=ημ[π/2-(ωt+φ)]=-ημ[ωt+φ-(π/2)] ή συν(ωt+φ)=ημ[π/2+(ωt+φ)]
συν(ωt+φ)=συν(ωt)συνφ-ημ(ωt)ημφ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.1

Να βρεθεί η συνισταμένη ταλάντωση των $y_1=A\eta\mu(\omega t)$ και $y_2=B\sigma\upsilon\nu(\omega t)$.
Να γίνει εφαρμογή για $A=4cm$ και $B=3cm$.



$$y_1 = A\eta\mu(\omega t)$$

$$y_2 = B\sigma\upsilon\nu(\omega t) = B\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$\varepsilon\phi\phi = \frac{A\eta\mu\phi_1 + B\eta\mu\phi_2}{A\sigma\upsilon\nu\phi_1 + B\sigma\upsilon\nu\phi_2}$$

$$\phi_1 = 0^0, \quad \phi_2 = \pi/2$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varepsilon\phi\phi = \frac{B}{A} \Rightarrow$$

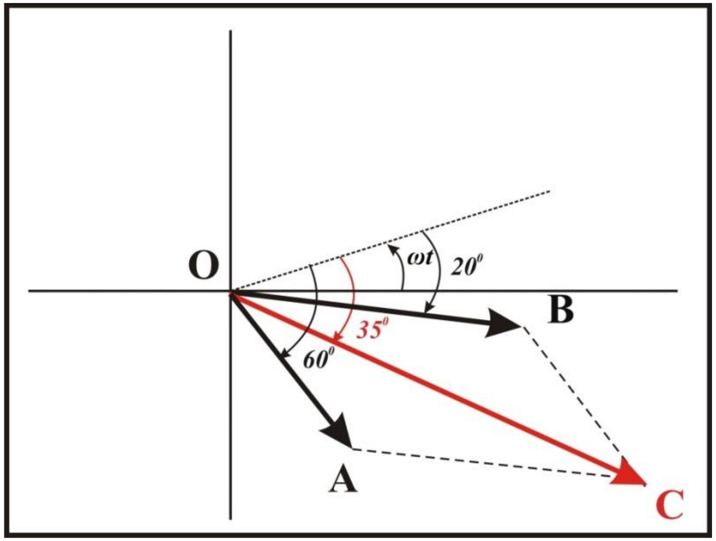
$$\Rightarrow \boxed{C = 5cm, \phi = 37^0}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.2

Να βρεθεί η συνισταμένη δύο αρμονικών ταλαντώσεων που περιγράφονται από τις σχέσεις: $y_1=3\sigma\upsilon\nu(\omega t+30^0)$, $y_2=5\sigma\upsilon\nu(\omega t+70^0)$

$$y_1 = 3\sigma\upsilon\nu(\omega t + 30^0) = 3\eta\mu(90^0 - \omega t - 30^0) = \\ = -3\eta\mu(\omega t - 60^0)$$

$$y_2 = 5\sigma\upsilon\nu(\omega t + 70^0) = 5\eta\mu(90^0 - \omega t - 70^0) = \\ = -5\eta\mu(\omega t - 20^0)$$

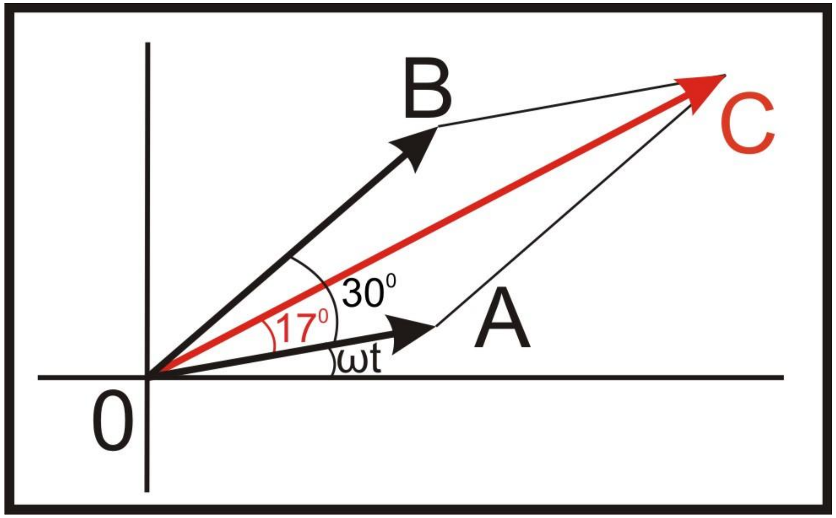


$$\left.\begin{array}{l} C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)} \\ \varepsilon\varphi\phi = \dfrac{A\eta\mu\phi_1 + B\eta\mu\phi_2}{A\sigma\upsilon\nu\phi_1 + B\sigma\upsilon\nu\phi_2} \\ A = -3, \quad B = -5, \quad \phi_1 = -60^0, \quad \phi_2 = -20^0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C = 7.5, \quad \phi = -35^0}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.3

Να βρεθεί η συνισταμένη των αρμονικών ταλαντώσεων:

y_1=3exp(iωt), y_2=4exp[i(ωt+30^0)]



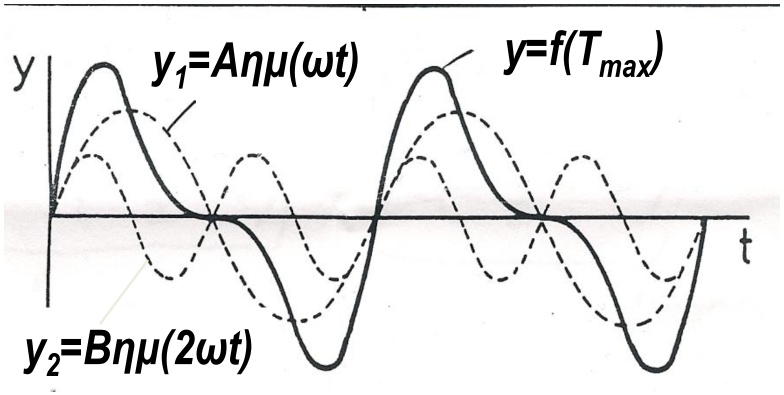
$$y = y_1 + y_2 = C\exp\left[i(\omega t + \phi)\right]$$

$$\left.\begin{array}{r} C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\sigma\upsilon\nu(\phi_2 - \phi_1)} \\ \varepsilon\phi\phi = \dfrac{\mathrm{A}\,\eta\mu\phi_1 + \mathrm{B}\,\eta\mu\phi_2}{\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\phi_1 + \mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\phi_2} \\ \phi_1 = 0^0, \quad \phi_2 = 30^0 \\ \mathrm{A} = 3cm, \quad B = 4cm \end{array}\right| \Rightarrow C = 6.8cm, \phi = 17^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 6.8\exp i(\omega t + 17)}$$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ-3

Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Διαφορετικών Περιόδων



1η Περίπτωση:

y_1=$A\eta\mu(\omega t)$, y_2=$B\eta\mu(2\omega t)$

y=$A\eta\mu(\omega t)+B\eta\mu(2\omega t)$

Η y_2 συναντά την y_1 σε χρόνο T οπότε:

$2\omega T-\omega T=2\pi \Rightarrow \mathbf{T=2\pi/\omega}$ (ίδια με της y_1)

2η Περίπτωση:

Έστω $y_1=A\eta\mu(\omega_1 t)$ και $y_2=B\eta\mu(\omega_2 t)$, $\omega_1>\omega_2$

Η y_1 συναντά τη y_2 όταν $\omega_1 T-\omega_2 T = 2\pi \Rightarrow \mathbf{T = 2\pi/(\omega_1-\omega_2)}$

$\Rightarrow \mathbf{f = (\omega_1-\omega_2)/2\pi}$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ-4

<u>Σύνθεση Αρμονικών Ταλαντώσεων Διαφορετικών Περιόδων που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους (ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑΤΑ)</u>

Αν $A=B$ και $|\omega_1-\omega_2|<<\ \Rightarrow\ y \approx$ αρμονική και $T\sim max$. Δηλαδή:

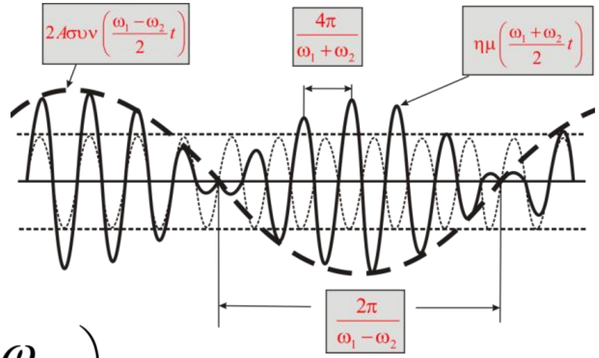
$$y = A\eta\mu\omega_1 t + A\eta\mu\omega_2 t = A(\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) = 2A(\eta\mu\frac{\omega_1 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 t}{2} + \eta\mu\frac{\omega_2 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_2 t}{2}) =$$

$$= 2A\left[\eta\mu\frac{\omega_1 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_1 t}{2}\left(\eta\mu^2\frac{\omega_2 t}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega_2 t}{2}\right) + \eta\mu\frac{\omega_2 t}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_2 t}{2}\left(\eta\mu^2\frac{\omega_1 t}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\omega_1 t}{2}\right)\right] =$$

$$= \underbrace{2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)}\underbrace{\eta\mu\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)}$$

αργή μεταβολή
$f=(f_1-f_2)/2$
$T=4\pi/(\omega_1-\omega_2)$

γρήγορη μεταβολή
$f=(f_1+f_2)/2$,
$T=4\pi/(\omega_1+\omega_2)$



<u>y=διακρότημα</u>~αρμονική ταλάντωση με πλάτος $2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$ (αργή μεταβολή)

και φάση $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$ (γρήγορη μεταβολή)

Συχνότητα-περίοδος διακροτήματος : $\omega_\delta = \frac{\omega_1-\omega_2}{2} \Rightarrow f_\delta = \frac{f_1-f_2}{2} \Rightarrow T_\delta = \frac{2}{f_1-f_2}$

ΑΣΚΗΣΗ 2.1

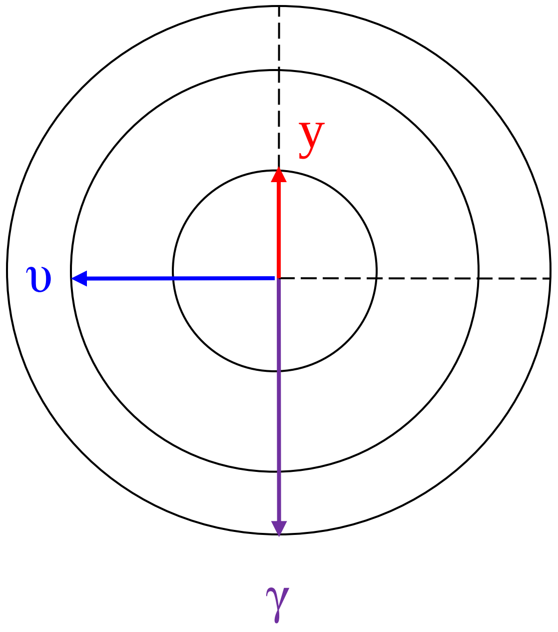
Αρμονική ταλάντωση με πλάτος $y_0=3cm$ και περίοδο $T=2sec$. Τη στιγμή $t=0sec$, $y=0$. α) f, ω, β) υ_{max}, γ_{max}, γ) διανυσματική παράσταση y, υ, γ όταν $t=0.5sec$.

$$a)\quad \left.\begin{array}{l} y = y_0\eta\mu(\omega t) \Rightarrow y = 3\eta\mu(\omega t) \\ f = \dfrac{1}{T} = 0.5Hz \\ \omega = 2\pi f = \pi\ rad/\sec \end{array}\right| \Rightarrow y = 3\eta\mu(\pi t)$$

$$\beta)\quad \left.\begin{array}{l} y = 3\eta\mu(\pi t) \Rightarrow \upsilon = \dfrac{dy}{dt} = 3\pi\sigma\upsilon\nu(\pi t) \\ \upsilon \to \max \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\pi t) \to \max(=1) \end{array}\right| \Rightarrow \upsilon_{\max} = 3\pi$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -3\pi^2\eta\mu(\pi t) \\ \gamma \to \max \Rightarrow \eta\mu(\pi t) \to \min(=-1) \end{array}\right| \Rightarrow \gamma_{\max} = 3\pi^2$$

$$\gamma)\quad \left.\begin{array}{l} y = 3\eta\mu(\pi t) \\ \upsilon = 3\pi\sigma\upsilon\nu(\pi t) = 3\pi\eta\mu\left(\pi t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \gamma = -3\pi^2\eta\mu(\pi t) = 3\pi^2\eta\mu\left(\pi t + \pi\right) \\ t = 0.5\sec \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} y = 3\eta\mu(\dfrac{\pi}{2}) = 3cm \\ \upsilon = 3\pi\eta\mu\pi = 0 \\ \gamma = 3\pi^2\eta\mu(\dfrac{3\pi}{2}) = -29.61cm/\sec^2 \end{array}$$



ΑΣΚΗΣΗ 2.2-1

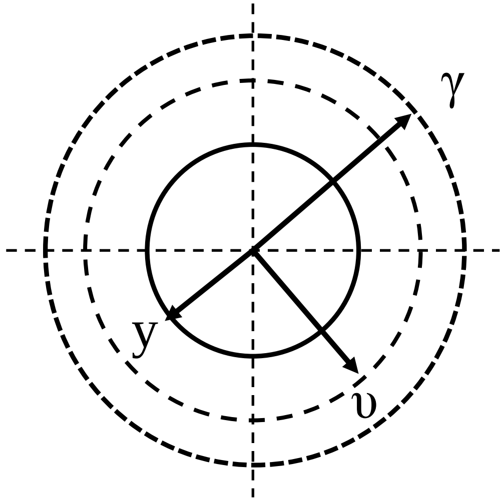
Αρμονική ταλάντωση *y=5ημ(0.4πt+π/5)*. *α) f, ω, T β)* εξίσωση *υ, γ γ)* διανυσματική παράσταση *y, υ, γ* όταν *t=2.5sec*, *δ)* Γραφική παράσταση *y, υ, γ = f(t)*.

$$a)\ \omega = 0.4\pi, \quad \omega = 2\pi f \Rightarrow f = 0.2Hz, \quad T = 1/f = 5\sec$$

$$\beta)\ \upsilon = \frac{dy}{dt} = 5*0.4*\pi*\sigma\upsilon\nu\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{5}\right) = 6.28*\eta\mu\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$$

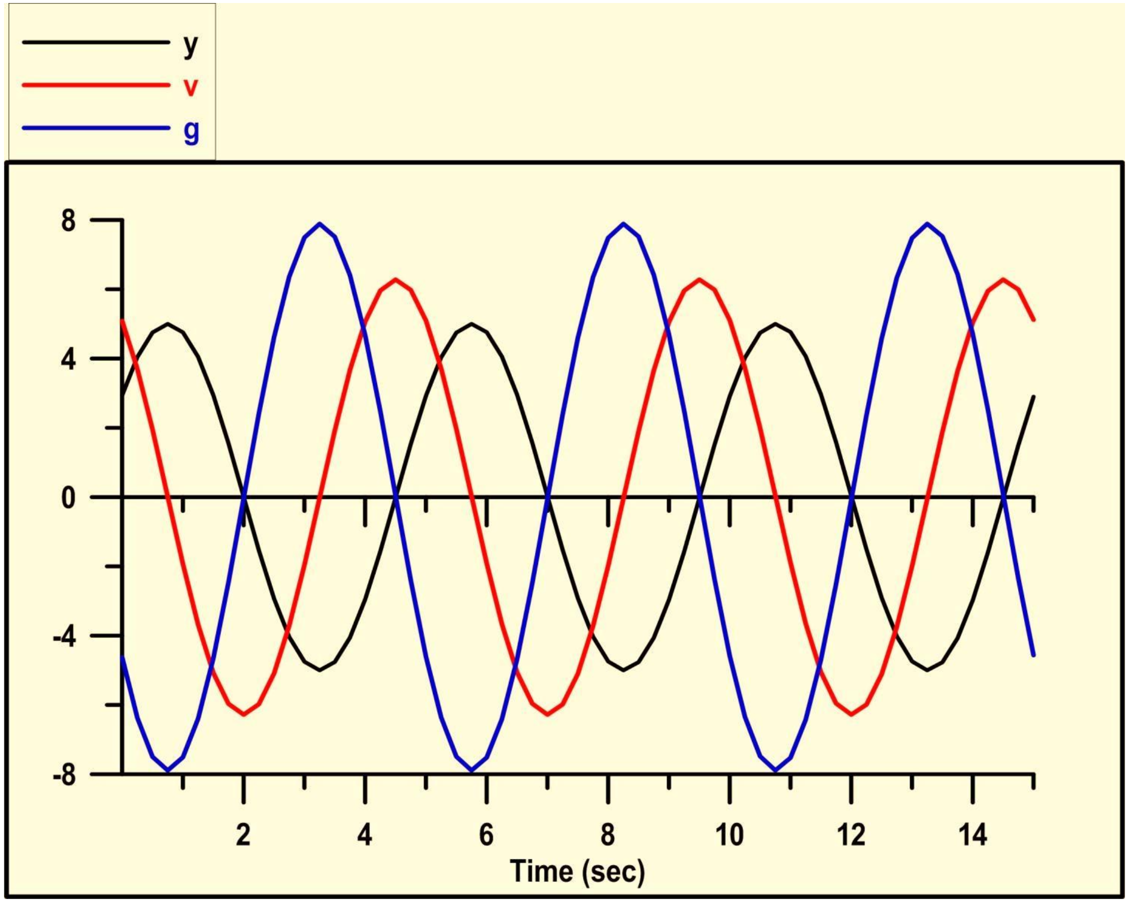
$$\gamma = \frac{d\upsilon}{dt} = 6.28*0.4*\pi*\sigma\upsilon\nu\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = 7.89*\eta\mu\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{5} + \pi\right)$$

$$\gamma)\quad t = 2.5 \Rightarrow \left| \begin{aligned} & y = 5*\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) = -2.94cm \\ & \upsilon = 6.28*\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = -5.08cm/\sec \\ & \gamma = 7.89*\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{5} + \pi\right) = 4.64cm/\sec^2 \end{aligned} \right.$$



ΑΣΚΗΣΗ 2.2-2

δ) Γραφική παράσταση



$$y = 5.0 * \eta\mu\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$$

$$v = 6.28 * \eta\mu\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g = 7.89 * \eta\mu\left(0.4\pi t + \frac{\pi}{5} + \pi\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.3

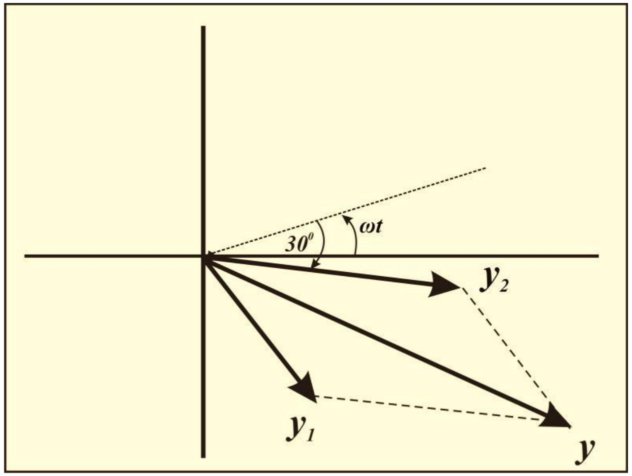
Δίνονται οι αρμονικές ταλαντώσεις ***y_1=6συν(ωt+40^0), y_2=8συν(ωt+60^0)***
Να βρεθούν *α)* εξίσωση συνιστάμενης *β)* διανυσματική παράσταση.

$$\alpha)\quad \left.\begin{array}{l} y_1 = 6\sigma\upsilon\nu(\omega t + 40^0) \\ y_2 = 8\sigma\upsilon\nu(\omega t + 60^0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = -6\eta\mu(\omega t + 40^0 - 90^0) \\ y_2 = -8\eta\mu(\omega t + 60^0 - 90^0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = -6\eta\mu(\omega t - 50^0) \\ y_2 = -8\eta\mu(\omega t - 30^0) \\ y = C\eta\mu(\omega t + \phi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C = \sqrt{36 + 64 + 96 * \sigma\upsilon\nu 20^0} \\ \varepsilon\varphi\phi = \dfrac{-6\eta\mu(-50^0) - 8\eta\mu(-30^0)}{-6\sigma\upsilon\nu(-50^0) - 8\sigma\upsilon\nu(-30^0)} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C = 13.8 \\ \phi = -38.6^0 \end{array}\right.$$

$$y = 13.8\eta\mu(\omega t - 38.6^0)$$

$\beta)$



ΑΣΚΗΣΗ 2.4

Δίνεται αρμονική ταλάντωση ***y=5ημ(3t+50^0).*** *Να βρεθούν οι συνιστώσες ταλαντώσεις της όταν η μία προηγείται σε φάση κατά 40^0 και η άλλη έπεται κατά 30^0.*

$$y = 5\eta\mu(3t+50^0)\left\langle \begin{aligned} y_1 &= \mathrm{A}\,\eta\mu(3t+50^0+40^0) \\ y_2 &= \mathrm{B}\,\eta\mu(3t+50^0-30^0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} y_1 &= \mathrm{A}\,\eta\mu(3t+90^0) \\ y_2 &= \mathrm{B}\,\eta\mu(3t+20^0) \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} C &= \sqrt{A^2+B^2+2AB\sigma\upsilon\nu(\phi_1-\phi_2)} \\ \varepsilon\phi\phi &= \frac{\mathrm{A}\eta\mu\phi_1+\mathrm{B}\eta\mu\phi_2}{\mathrm{A}\sigma\upsilon\nu\phi_1+\mathrm{B}\sigma\upsilon\nu\phi_2} \\ \phi_1 &= 90^0, \phi_2 = 20^0, \phi = 50^0, C = 5 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 2.66 \\ B &= 3.42 \end{aligned}\right| \quad \acute{\eta} \quad \left.\begin{aligned} A &= -2.66 \\ B &= -3.42 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{aligned} y_1 &= 2.66\eta\mu(3t+90^0) \\ y_2 &= 3.42\eta\mu(3t+20^0) \end{aligned}\right. \quad \acute{\eta} \quad \left\langle \begin{aligned} y_1 &= -2.66\eta\mu(3t+90^0) \\ y_2 &= -3.42\eta\mu(3t+20^0) \end{aligned}\right.$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΚΙΝΗΣΗ *y(t)* (περιοδική ή απεριοδική)

Μετάθεση ως προς χρόνο

$\Downarrow$ (Φασματική Ανάλυση)

Μετάθεση ως προς συχνότητα (φάσμα κίνησης)=

=άθροισμα αρμονικών κινήσεων *G(f)* διαφόρων συχνοτήτων

Ανάλυση **περιοδικών** κινήσεων $\Rightarrow$ φάσμα ***διακεκριμένων*** τιμών συχνοτήτων

Ανάλυση **απεριοδικών** κινήσεων $\Rightarrow$ φάσμα ***συνεχών*** τιμών συχνοτήτων

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ-1

Περιοδική συνάρτηση → άθροισμα ημιτονικών + συνημιτονικών συναρτήσεων

$$\boldsymbol{y(\omega t)} = a_0 ημ(0\omega t) + a_1 ημ(\omega t) + a_2 ημ(2\omega t) + a_3 ημ(3\omega t) + \ldots +$$

$$+ b_0\, συν(0\omega t) + b_1\, συν(\omega t) + b_2\, συν(2\omega t) + b_3\, συν(3\omega t) + \ldots$$

(σειρά ***Fourier***)

Αν $\omega t=\varphi$ τότε:

Ημιτονικοί όροι → *αντισυμμετρικές συναρτήσεις [ημ(-φ) = -ημφ]*

Συνημιτονικοί όροι → *συμμετρικές συναρτήσεις [συν(-φ) = συνφ]*

b_0 → συμμετρική συνάρτηση

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y \cdot ημ(n\varphi)\, d\varphi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y \cdot συν(n\varphi)\, d\varphi$$

$$b_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y \cdot d\varphi$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ-2

Συμμετρική συνάρτηση αν F(x)=F(-x), π.χ. **συν(-x)=συν(x)**

<u>*Αντι-συμμετρική* συνάρτηση</u> αν: F(x)=-F(-x) π.χ. <u>*ημ(-x)=-ημ(x)*</u>

1) Συμπεριφορά της <u>*y(φ)συν(φ)*</u>:

Αν *y(-φ)=y(φ)* **(συμμετρική)** τότε

y(φ)συν(φ)=y(-φ)συν(-φ), άρα **συμμετρική**

Αν *y(-φ)=-y(φ)* *(**αντι-συμμετρική**)* τότε

y(φ)*συν(φ)*=-y(-φ)συν(-φ), άρα ***αντι-συμμετρική***, άρα $b_n=0$

2) Συμπεριφορά της *y(φ)ημ(φ):*

Αν *y(-φ)=y(φ)* (**συμμετρική**) τότε

y(φ)ημ(φ)=-y(-φ)ημ(-φ), άρα <u>**αντι-συμμετρική**</u> άρα $a_n=0$

Αν *y(-φ)=-y(φ)* (**αντι-συμμετρική**) τότε

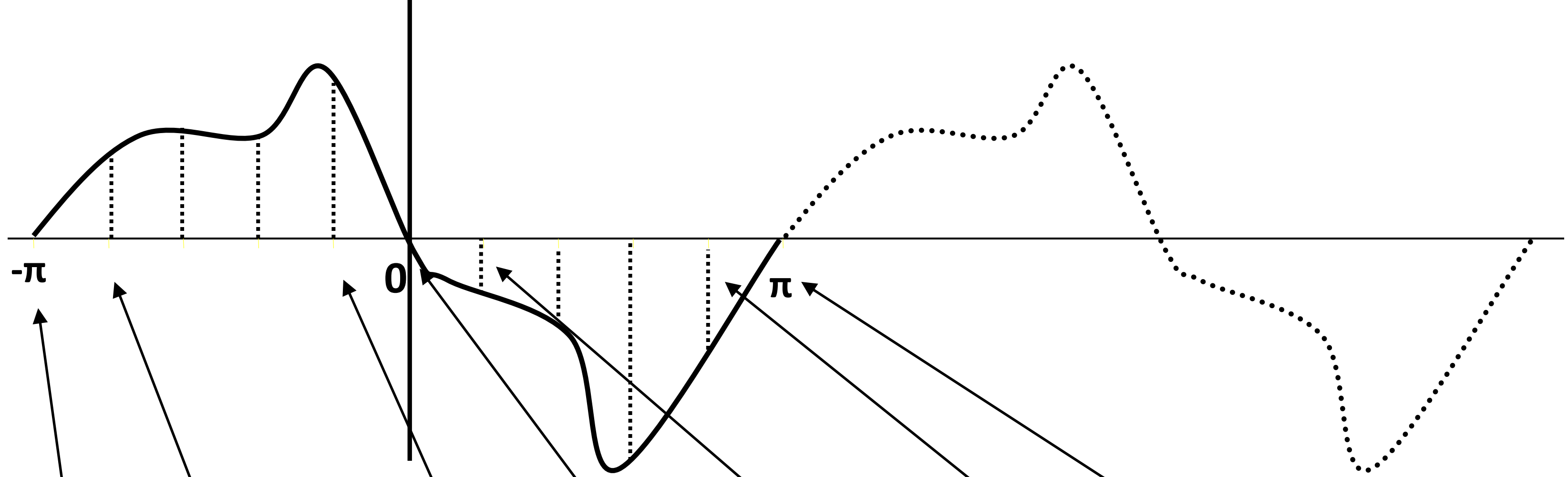
y(φ)ημ(φ)=-y(-φ)[-ημ(-φ)], άρα <u>**συμμετρική**</u>

3) Συμπεριφορά της ***y(φ)****:*

Αν ***y(-φ)= -y(φ)*** (<u>**αντι-συμμετρική**</u>) τότε $b_0=0$ (μέση στάθμη της συνάρτησης)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER-1

Αν η *y(φ)* δίνεται υπό μορφή πίνακα τιμών ή καμπύλης:



(1) Χωρίζουμε μια περίοδο σε *2N* διαστήματα (άρτιο αριθμό) ορίζοντας *2N+1* (περιττό αριθμό) τιμών *φ(=ωt)* και *y(φ)*:

$$-\frac{N-0}{N}\pi,\ -\frac{N-1}{N}\pi,\ \ldots,\ -\frac{N-(N-1)}{N}\pi,\ \frac{N-N}{N}\pi,\ \frac{N-(N-1)}{N}\pi,\ \ldots,\ \frac{N-1}{N}\pi,\ \frac{N-0}{N}\pi$$

(2) Για κάθε *φ* (-5/5π, -4/5π, -3/5π, -2/5π, -1/5π, 0/5π, 1/5π, 2/5π, 3/5π, 4/5π, 5/5π) ορίζεται (με μέτρηση) το αντίστοιχο *y(φ)*.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΣΕΙΡΑΣ FOURIER-2

Υπολογίζονται τα αντίστοιχα α_n, b_n, b_0 :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N+1} y(\varphi_i)\,\eta\mu(n\varphi_i) \\ b_n &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{2N+1} y(\varphi_i)\,\sigma\upsilon\nu(n\varphi_i) \\ b_o &= \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{2N+1} y(\varphi_i) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Sigma\upsilon\nu\tau\varepsilon\lambda\varepsilon\sigma\tau\acute{\varepsilon}\varsigma\ \tau\eta\varsigma\ \sigma\varepsilon\iota\rho\acute{\alpha}\varsigma\ FOURIER$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Περιοδική συνάρτηση = άθροισμα αρμονικών συναρτήσεων.
<u>Όσο μεγαλύτερος ο αριθμός των αρμονικών τόσο μεγαλύτερος ο αριθμός των διαστημάτων (2N)</u>

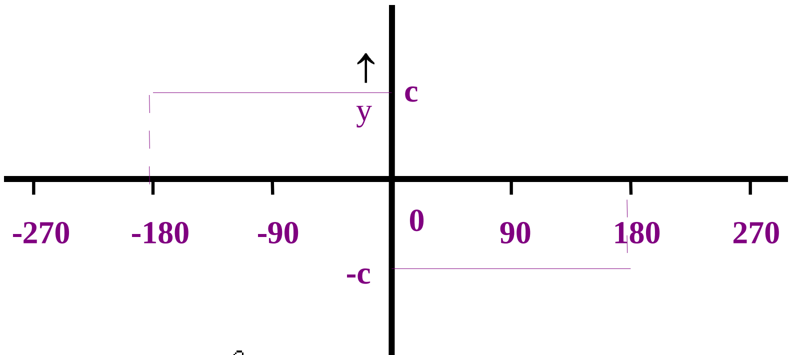
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.4-1

Να αναλυθεί σε αρμονικές ταλαντώσεις η περιοδική ταλάντωση η οποία σε διάστημα μιας περιόδου ορίζεται ως:

$y(\varphi) = c$ για $-\pi<\varphi<0$

$y(\varphi) = -c$ για $0<\varphi<\pi$

όπου $\varphi=\omega t$ η κυκλική συχνότητα της περιοδικής ταλάντωσης



$y(\varphi)= -y(-\varphi)$ => αντισυμμετρική => $\boldsymbol{b_n=0}$

Μέση στάθμη=0 => $\boldsymbol{b_0=0}$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} c\,\eta\mu(n\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} -c\,\eta\mu(n\varphi)\,d\varphi \\ \int \eta\mu(n\phi)\,d\phi &= -\frac{1}{n}\sigma\upsilon\nu(n\phi)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_n = \frac{c}{n\pi}\Big[\left[-\sigma\upsilon\nu(n\phi)\right]_{-\pi}^{0} + \left[\sigma\upsilon\nu(n\phi)\right]_{0}^{\pi}\Big] =$$

$$= \frac{c}{n\pi}\left[-\sigma\upsilon\nu 0 + \sigma\upsilon\nu(-n\pi) + \sigma\upsilon\nu(n\pi) - \sigma\upsilon\nu 0\right] = \frac{2c}{n\pi}\left[\sigma\upsilon\nu(n\pi) - 1\right]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.4-2

$$\alpha_n = \frac{2c}{n\pi}\left[\sigma\upsilon\nu(n\pi)-1\right]$$

n=άρτιο => $\sigma\upsilon\nu(n\pi)=1$ => $\alpha_n=0$

n=περιττό => $\sigma\upsilon\nu(n\pi)=-1$ => $a_n = -\frac{4c}{n\pi}$

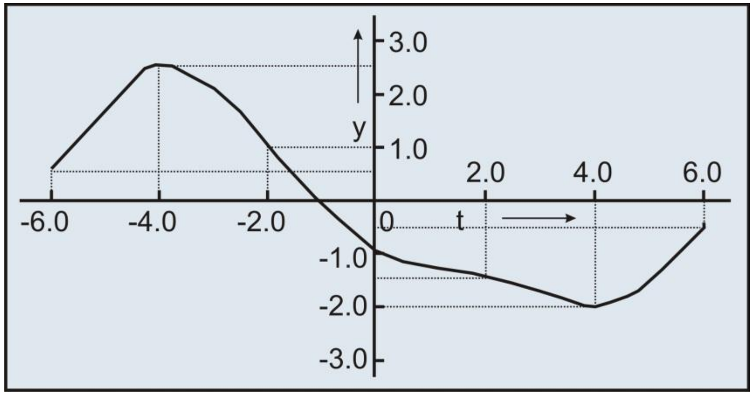
$$\mathbf{y(\omega t)} = \overset{0}{\cancel{a_0\eta\mu}}(0\omega t) + a_1\eta\mu(\omega t) + \overset{0}{\cancel{a_2\eta\mu}}(2\omega t) + a_3\eta\mu(3\omega t) + \ldots +$$

$$\overset{0}{\cancel{+ b_0\,\sigma\upsilon\nu(0\omega t) + b_1\,\sigma\upsilon\nu(\omega t) + b_2\,\sigma\upsilon\nu(2\omega t) + b_3\,\sigma\upsilon\nu(3\omega t) + \ldots}}$$

$$y(\phi) = -\frac{4c}{\pi}\left[\eta\mu(\omega t) + \frac{1}{3}\eta\mu(3\omega t) + \frac{1}{5}\eta\mu(5\omega t) + \ldots\right]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.5-1

Να αναλυθεί σε αρμονικές ταλαντώσεις η περιοδική ταλάντωση η οποία δίνεται στο γράφημα που ακολουθεί (*T=12sec*) .

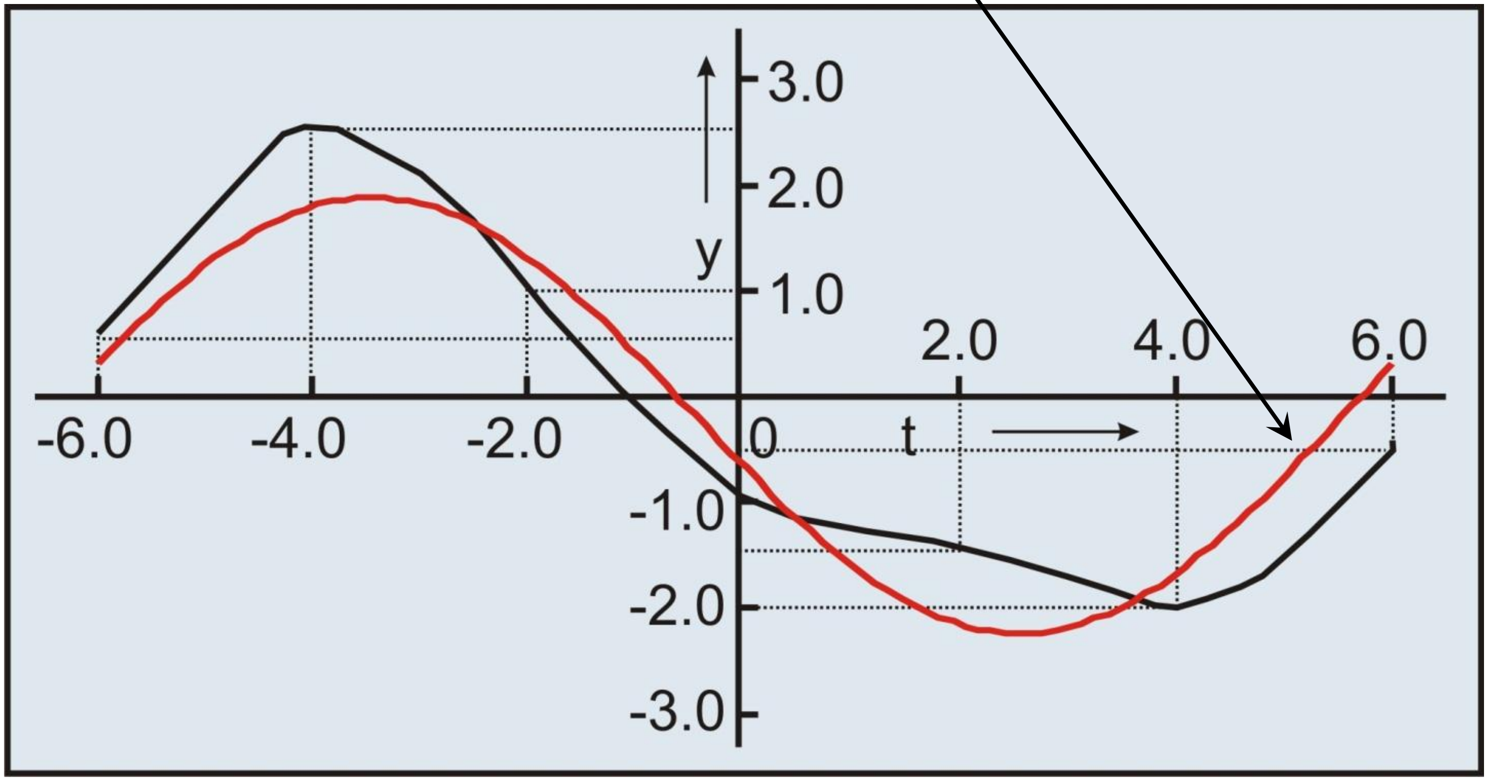


t_i	$\varphi_i=\omega t_i=2\pi t_i/T \Rightarrow \varphi_i=t_i\pi/6$	$y(\varphi_i)$	$\underbrace{y(\phi_i)\eta\mu(\omega t_i)}_{A}$	$\underbrace{y(\phi_i)\sigma\upsilon\nu(\omega t_i)}_{B}$
-6	-π	0.5	0	-0.50
-4	-2/3 π	2.5	-2.17	-1.25
-2	-1/3 π	1	-0.87	0.50
0	0	-1	0	-1.00
2	1/3 π	-1.5	-1.30	-0.75
4	2/3 π	-2	-1.73	1.00
6	π	-0.5	0	0.50
		$S_0 = -1.0$	$S_1 = -6.07$	$S_1' = -1.50$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2N+1} A = -2.02 \\ b_1 &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{2N+1} B = -0.50 \\ b_0 &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{2N+1} y = -0.17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -2.02\cdot\eta\mu(\omega t) - 0.50\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega t) - 0.17$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.5-2

$$y = -2.02 \cdot \eta\mu(\omega t) - 0.50 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) - 0.17$$



Για παραπάνω αρμονικές, n = 2, 3, …

Μεγάλο n => μεγαλύτερο και το Ν

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΚΙΝΗΣΕΩΝ

Στις περιοδικές κινήσεις : διακριτές τιμές *ω*
Στις απεριοδικές κινήσεις : συνεχείς τιμές *ω*
Κάθε ταλάντωση ***y(t)*** περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega$$

F(ω)*=ολοκλήρωμα Fourier ή φάσμα συχνοτήτων*

$$\left.\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\exp(-i\omega t)\,dt \\ \exp(-i\omega t) &= \sigma\upsilon\nu(\omega t) - i\eta\mu(\omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\sigma\upsilon\nu(\omega t)\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\eta\mu(\omega t)\,dt\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\omega) = R(\omega) + iI(\omega) \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} R(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\sigma\upsilon\nu(\omega t)\,dt \\ \mathrm{I}(\omega) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\eta\mu(\omega t)\,dt \end{aligned}\right.$$

$$\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o : A(\omega) = \sqrt{R^2 + \mathrm{I}^2}, \quad \varphi\acute{\alpha}\sigma\eta : \varepsilon\phi\,\phi(\omega) = \frac{\mathrm{I}}{R}$$

Αν αναλυτική μορφή της ***y(t)*** γνωστή υπολογίζονται τα ***R, I***
Αν έχουμε καμπύλη ή πίνακα τιμών εφαρμόζεται ο κανόνας Simpson ή η γραφική μέθοδος.

ΚΑΝΟΝΑΣ Simpson-1

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Διαιρούμε το *[a,b]* σε άρτιο αριθμό *n* ίσων διαστημάτων.
Προσεγγίζουμε την *f(x)* με 2βάθμιες καμπύλες που περνούν από 3 σημεία η κάθε μία:

Η 1η από τα σημεία x_0, x_1, x_2
Η 2η από τα σημεία x_3, x_4, x_5
………………………………
Η nή από τα σημεία x_{n-2}, x_{n-1}, x_n

Γεωμετρικά περιγράφουμε την καμπύλη με διαδοχικά παραβολικά τόξα.
Στην πράξη μετράμε τιμές *y(t)* στην καμπύλη ανά χρονικά διαστήματα t_i

Για να υπολογίσουμε την *F(ω)* πρέπει:

$$\delta t = t_i - t_{i-1} \langle \frac{1}{2\omega}$$

ΚΑΝΟΝΑΣ Simpson-2

Αντίστροφα:

Αν γνωρίζουμε τις τιμές *F(ω)*, δηλαδή τα ***R(ω)***, ***I(ω)***, μπορούμε να αναπαράγουμε την ***y(t)***:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t)\, d\omega$$

$$F(\omega)\exp(i\omega t) = \left[R(\omega) + i\mathrm{I}(\omega)\right].\left[\sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\eta\mu(\omega t)\right] =$$

$$= R(\omega)\sigma\upsilon\nu(\omega t) + i\overbrace{\left[R(\omega)\eta\mu(\omega t) + \mathrm{I}(\omega)\sigma\upsilon\nu(\omega t)\right]}^{0} - \mathrm{I}(\omega)\eta\mu(\omega t)$$

Αφού η *y(t)* είναι πραγματική συνάρτηση ως προς χρόνο, το φανταστικό μέρος του αθροίσματος είναι ίσο με *0*:

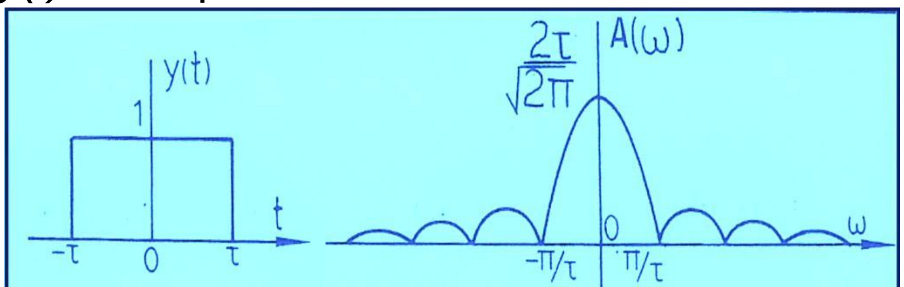
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\sigma\upsilon\nu\left(\omega t\right) d\omega \;-\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{I}(\omega)\eta\mu\left(\omega t\right) d\omega \right]$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.6

Να βρεθεί το φάσμα *A(ω)* της απεριοδικής κίνησης που δίνεται από τη σχέση:

y(t) = 1 για $-\tau<t<\tau$

y(t) = 0 για $t<-\tau$ *και* $t>\tau$



(Παπαζάχος, 1985)

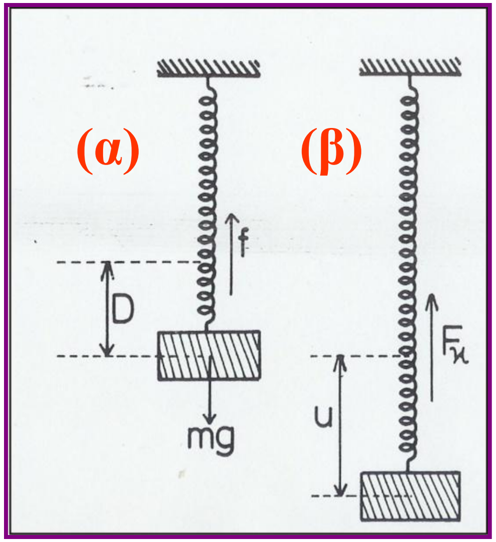
$$\left.\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\exp(-i\omega t)\,dt \\ \exp(-i\omega t) &= \sigma\upsilon\nu\omega t - i\eta\mu\omega t \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} & F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,\sigma\upsilon\nu\omega t\,dt - i\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,\eta\mu\omega t\,dt\right] \\ & \int \sigma\upsilon\nu(\omega t)dt = \frac{1}{\omega}\eta\mu(\omega t),\ \int \eta\mu(\omega t)dt = -\frac{1}{\omega}\sigma\upsilon\nu(\omega t) \end{aligned}\right\}\Rightarrow F(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}}\left[\left[\eta\mu(\omega t)\right]_{-\tau}^{\tau} + i\left[\sigma\upsilon\nu(\omega t)\right]_{-\tau}^{\tau}\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}}\left[\eta\mu(\omega\tau)+\eta\mu(\omega\tau)\right]}_{R} + i\,\underbrace{\frac{1}{\omega\sqrt{2\pi}}\left[\sigma\upsilon\nu(\omega\tau)-\sigma\upsilon\nu(-\omega\tau)\right]}_{I} = \mathbf{0}\ \ \frac{2}{\omega\sqrt{2\pi}}\eta\mu(\omega\tau)$$

$$\left.\begin{aligned} & A = \sqrt{R^2+I^2} \Rightarrow \boxed{A = \left|\frac{2\eta\mu(\omega\tau)}{\omega\sqrt{2\pi}}\right|} \\ & \omega \to 0 \Rightarrow \omega\tau \to \min \Rightarrow \eta\mu(\omega\tau) \to \omega\tau \end{aligned}\right\}\Rightarrow A = \frac{2\omega\tau}{\omega\sqrt{2\pi}} \Rightarrow A = \frac{2\tau}{\sqrt{2\pi}}$$

Ελεύθερη Ταλάντωση Χωρίς Απόσβεση-1



(Παπαζάχος, 1985)

Στη θέση ισορροπίας ***(α)***:

B(=mg)+f(=-kD)=0 => mg=kD =>m/k=D/g (1)

D=Στατική απόκλιση

Σε απόσταση *u* από τη θέση ισορροπίας ***(β)***:

$$\left.\begin{array}{l} F_k = -ku \\ F_k = m\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow m\gamma + ku = 0 \Rightarrow m\frac{d^2u}{dt^2} + ku = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = 0}$$

(Διαφορική εξίσωση ελεύθερης ταλάντωσης χωρίς απόσβεση)

Μερική λύση της η: ***u=Αημ(ω₀t)***:

$$-A\omega_0^2\eta\mu(\omega_0 t) + \frac{kA}{m}\eta\mu(\omega_o t) = 0 \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{g}{D}}$$

$$\omega_0 = 2\pi f \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{D}} = 2\pi f \Rightarrow \left\langle \begin{array}{ll} f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}, & f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{D}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}, & T = 2\pi\sqrt{\dfrac{D}{g}} \end{array}\right.$$

Ελεύθερη Ταλάντωση Χωρίς Απόσβεση-2

Δυναμική ενέργεια του σώματος που εκτελεί αρμονική ταλάντωση χωρίς απόσβεση και βρίσκεται σε στοιχειώδη μετάθεση ***du***:

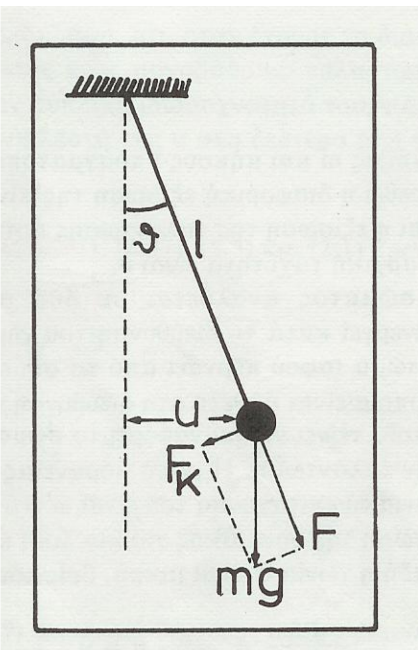
$$dE = F_k du \Rightarrow dE = ku\, du \Rightarrow$$

$$\int dE = \int ku\, du \Rightarrow E = k\frac{u^2}{2} \Rightarrow \boldsymbol{E = \frac{1}{2}ku^2}$$

Δυναμική ενέργεια σε απόσταση *u* από τη θέση ισορροπίας

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.7-1

Απλό εκκρεμές μάζας ***m*** και μήκους ***l*** πραγματοποιεί ταλάντωση μικρής γωνίας ***θ***. Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση της κίνησης, η ιδιοπερίοδος του εκκρεμούς και η εξίσωση της ταλάντωσης αυτής αν η αρχική μετάθεση είναι $\boldsymbol{u_0}$ και η αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_0}$



(Παπαζάχος, 1985)

Δύναμη επαναφοράς : $F_k = -mg\eta\mu\theta$

Ροπή επαναφοράς : $P = F_k l = -mgl\eta\mu\theta \approx -mgl\theta$ (1)

Γωνιακή ταχύτητα : $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

Γωνιακή επιτάχυνση: $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

Θεμελειώδης εξίσωση δυναμικής για κυκλική κίνηση:

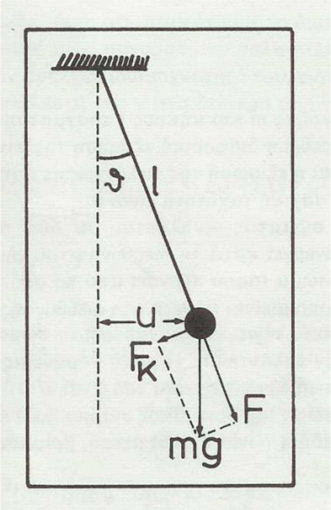
$$\left.\begin{aligned} P &= I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \\ I &= ml^2 \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Rightarrow} -mgl\theta = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}}$$

Διαφορική εξίσωση κίνησης με μεταβλητή τη γωνία θ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.7-2

ημθ~θ=u/l. Άρα

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0\Rightarrow\frac{d^2(u/l)}{dt^2}+\frac{g}{l}\frac{u}{l}=0\Rightarrow\quad \boldsymbol{\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{g}{l}u=0}$$



(Παπαζάχος, 1985)

Διαφορική εξίσωση κίνησης με μεταβλητή τη μετάθεση u

Μερική λύση η $u=A\eta\mu(\omega_0 t)$:

$$\frac{d^2\left[A\eta\mu(\omega_0 t)\right]}{dt^2}+\frac{g}{l}A\eta\mu(\omega_0 t)=0\Rightarrow -A\omega_0^2\eta\mu(\omega_0 t)+\frac{g}{l}A\eta\mu(\omega_0 t)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega_0^2=\frac{g}{l}\Rightarrow\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=\frac{g}{l}\Rightarrow\quad \boldsymbol{T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Γενική λύση η $u=A\eta\mu(\omega_0 t)+B\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t)\Rightarrow\upsilon=\dot{u}=A\omega_0\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t)-B\omega_0\eta\mu(\omega_0 t)$

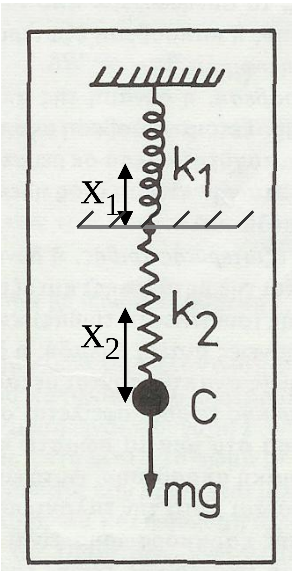
Αρχικές συνθήκες: $t=0,\ u=u_0,\ \upsilon=\upsilon_0 \Rightarrow u_0=B,\ \upsilon_0=A\omega_0 \Rightarrow A=\upsilon_0/\omega_0$

Έτσι, από τη γενική λύση προκύπτει η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς για τις αρχικές συνθήκες:

$$\boldsymbol{u=\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\eta\mu(\omega_0 t)+u_0\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.8

Να βρεθεί η ιδιοπερίοδος του συστήματος που δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(Παπαζάχος, 1985)

Έστω x_1, x_2 οι μετατοπίσεις του 1ου και 2ου ελατηρίου.

Η συνολική μετάθεση της διάταξης είναι **$x=x_1+x_2$**

Στο 2ο ελατήριο η δύναμη επαναφοράς είναι: **$f_2 =-k_2x_2 =-B$**

Στο 1ο ελατήριο η δύναμη επαναφοράς είναι: **$f_1= =-k_1x_1 =-B$**

Σε ένα ισοδύναμο ελατήριο η δύναμη επαναφοράς είναι: **$f= -kx=-B$** $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} B = kx \Rightarrow x = \dfrac{B}{k} \\ x_1 = \dfrac{B}{k_1}, \quad x_2 = \dfrac{B}{k_2} \\ x = x_1 + x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{B}{k} = \frac{B}{k_1} + \frac{B}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.5-1

Να αναλυθεί σε αρμονικές η περιοδική ταλάντωση που σε μια περίοδο είναι:

y(φ) = φ για *0<φ<π*

y(φ) = -φ για *–π<φ<0*

y(φ)=y(-φ) => συμμετρική => $a_n=0$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\mathrm{y}\cdot\sigma\upsilon\nu(\mathrm{n}\varphi)\mathrm{d}\varphi\right] \Rightarrow \mathrm{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[(-\phi)\cdot\sigma\upsilon\nu(n\phi)d\phi\right] + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\phi\cdot\sigma\upsilon\nu(n\phi)d\phi\right] \\ &\eta\mu'(n\phi) = n\cdot\sigma\upsilon\nu(n\phi) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(n\phi) = \frac{1}{n}\eta\mu'(n\phi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{b_n} = -\frac{1}{\mathrm{n}\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\phi\cdot\eta\mu'(n\phi)d\phi\right] + \frac{1}{\mathrm{n}\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\phi\cdot\eta\mu'(n\phi)d\phi\right]$$

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες: $\int\left[f(x).g'(x)dx\right] = f(x).g(x) - \int\left[f'(x).g(x)dx\right]$

$$\mathrm{b_n} = -\frac{1}{\mathrm{n}\pi}\left[\left[\phi\eta\mu(n\phi)\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\eta\mu(n\phi)d\phi\right] + \frac{1}{\mathrm{n}\pi}\left[\left[\phi\eta\mu(n\phi)\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\eta\mu(n\phi)d\phi\right]$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.5-2

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left[\left[\phi\eta\mu(n\phi)\right]_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\eta\mu(n\phi)d\phi\right] + \frac{1}{n\pi}\left[\left[\phi\eta\mu(n\phi)\right]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\eta\mu(n\phi)d\phi\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\cancelto{0}{\left[\phi\eta\mu(n\phi)\right]_{-\pi}^{0}} - \left[-\frac{1}{n}\sigma\upsilon\nu(n\phi)\right]_{-\pi}^{0}\right] + \frac{1}{n\pi}\left[\cancelto{0}{\left[\phi\eta\mu(n\phi)\right]_{0}^{\pi}} - \left[-\frac{1}{n}\sigma\upsilon\nu(n\phi)\right]_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left[0-(-\pi)\eta\mu(-n\pi) - \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sigma\upsilon\nu(-n\pi)\right) - \pi\eta\mu(n\pi) + 0 + \left(-\frac{1}{n}\sigma\upsilon\nu(n\pi)+\frac{1}{n}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b_n = \frac{2}{n^2\pi}\left[\sigma\upsilon\nu(n\pi)\text{-}1\right]}$$

$$\text{n=άρτιο} \Rightarrow b_n = 0$$

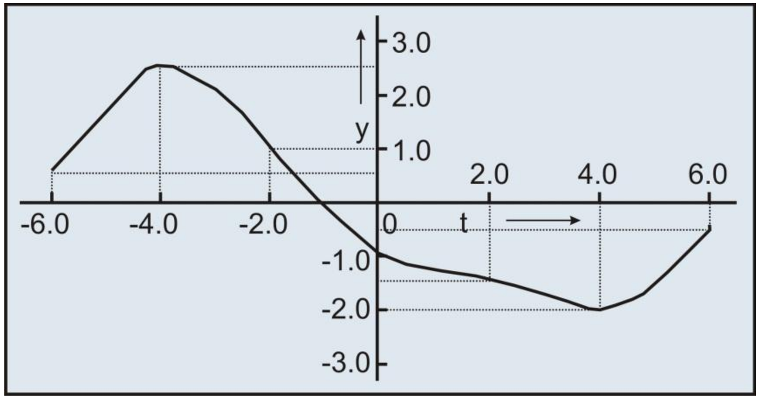
$$\text{n=περιττό} \Rightarrow b_n = -\frac{4}{n^2\pi}$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\phi d\phi) + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\phi d\phi \Rightarrow b_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\phi^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\phi^2}{2}\right]_{0}^{\pi} \Rightarrow \boldsymbol{b_0 = \frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{y\ (\varphi) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{1^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\ (3\varphi)}{3^2} + \frac{\sigma\upsilon\nu\ (5\varphi)}{5^2} + \dots\right]}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.6-1

Να υπολογιστούν οι συντελεστές της πρώτης αρμονικής ταλάντωσης της περιοδικής ταλάντωσης του σχήματος (2.13) (εφαρμογή 2.5)



t_i	$\varphi_i=\omega t_i=2\pi t_i/T \Rightarrow$ $\varphi_i=t_i\pi/6$	$y(\varphi_i)$	$\underbrace{y(\phi_i)\eta\mu(2\phi_i)}_{A_i}$	$\underbrace{y(\phi_i)\sigma\upsilon\nu(2\phi_i)}_{B_i}$
-6	-π	0.5	0	0.50
-4	-2π/3	2.5	2.17	-1.25
-2	-π/3	1	-0.87	-0.50
0	0	-1	0	-1.00
2	π/3	-1.5	-1.30	0.75
4	2π/3	-2	1.73	1.00
6	π	-0.5	0	-0.50
		S_0 = -1.0	S_1 = 1.73	S_1' = -1.0

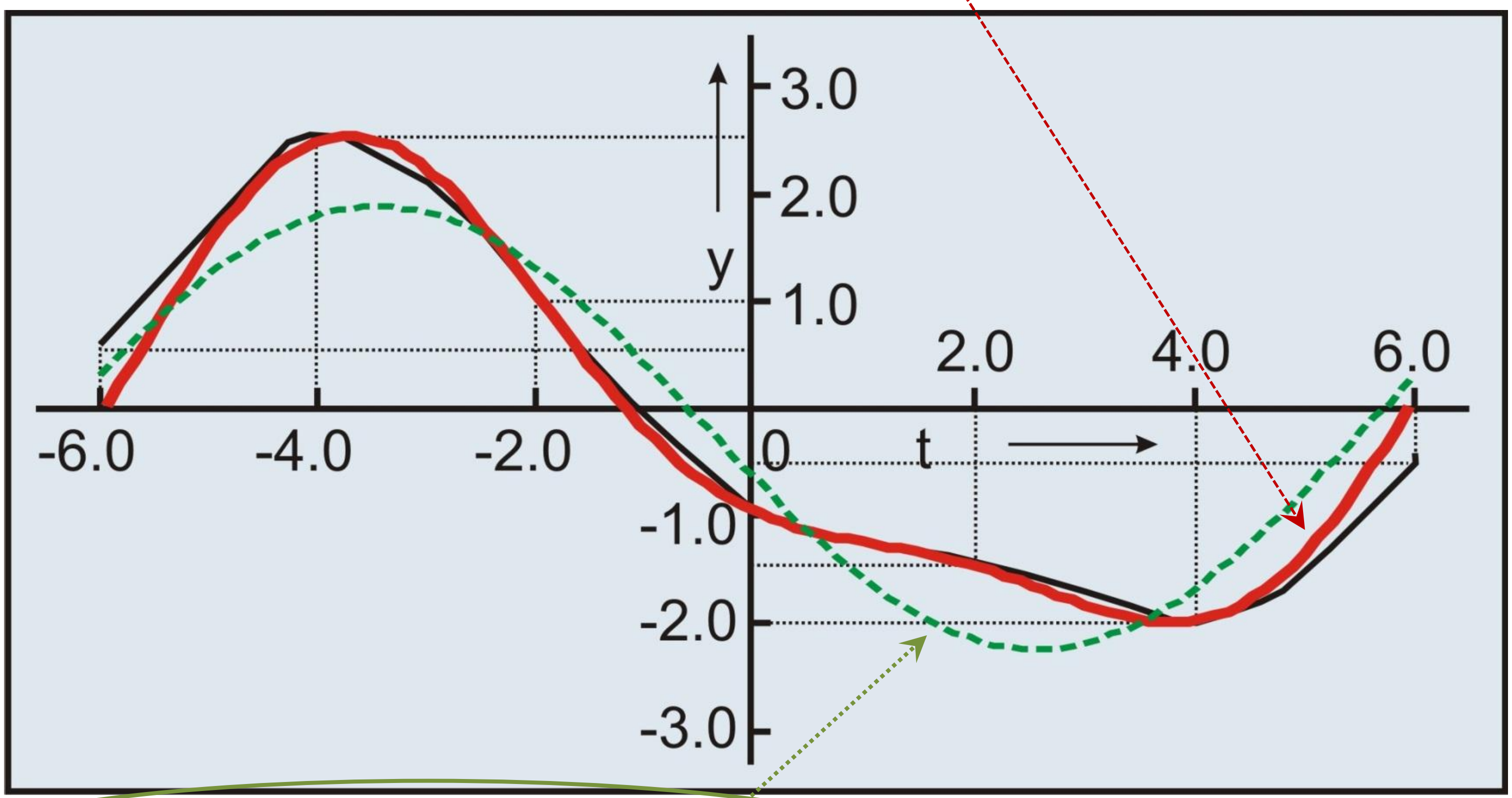
(Εφαρμογή 2.5: ***a_1=-2.02, b_1=-0.50, b_0=-0.17***)

$$a_2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{7}A_i=\frac{1}{3}S_1=0.58,\quad b_2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{7}B_i=\frac{1}{3}S_1^{'}=-0.33,\quad b_0=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{7}y(\phi_i)=-0.17$$

$$\boxed{y(t)=-2.02\eta\mu(\omega t)+0.58\eta\mu(2\omega t)-0.50\sigma\upsilon\nu(\omega t)-0.33\sigma\upsilon\nu(2\omega t)-0.17}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.6-2

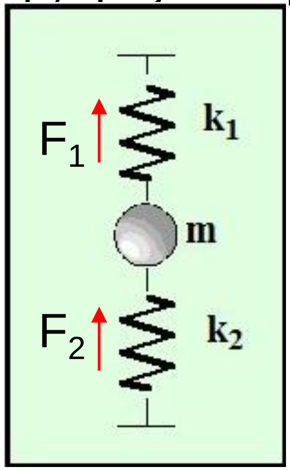
$$y(t) = -2.02\eta\mu(\omega t) + 0.58\eta\mu(2\omega t) - 0.50\sigma\upsilon\nu(\omega t) - 0.33\sigma\upsilon\nu(2\omega t) - 0.17$$



$$y = -2.02 \cdot \eta\mu(\omega t) - 0.50 \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t) - 0.17$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.7

Στη διάταξη του σχήματος, αν $m=2kgr$, $k_1=5Nt/m$ και $k_2=8Nt/m$ να βρεθούν:
α) η ενεργός σταθερά του συστήματος και η περίοδός του
β) η εξίσωση της κίνησης αν για $t=0$ είναι $u_0=1m$ και $\upsilon_0=2m/sec$



α) Δυνάμεις επαναφοράς:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -k_1 u \\ F_2 &= -k_2 u \\ F &= -k\,u \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = F_1 + F_2 \Rightarrow -ku = -(k_1+k_2)u \Rightarrow k = k_1 + k_2 = 13Nt/m$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{13}} \Rightarrow T = 2.46\sec \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + 6.5u = 0$$

β) Γενική λύση: $u = A\eta\mu(\omega_0 t) + B\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t)$

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon = \frac{du}{dt} = A\omega_0\sigma\upsilon\nu(\omega_0 t) - B\omega_0\eta\mu(\omega_0 t) \\ &t = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u_0 = 1m}, \quad \boldsymbol{\upsilon_0 = 2m/sec} \\ &\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{13}{2}} = 2.55 rad/\sec \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u_0 &= B \\ \upsilon_0 &= 2.55A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B &= 1 \\ A &= 0.78 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{u = 0.78\eta\mu(2.55t) + \sigma\upsilon\nu(2.55t)}}$$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-1

ΙΞΩΔΗΣ ΑΠΟΣΒΕΣΗ:

Δύναμη απόσβεσης ***ανάλογη της ταχύτητας κίνησης***

ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗΣ ΤΡΙΒΗΣ:

Δύναμη ***ανεξάρτητη της ταχύτητας και μετάθεσης***.

Εξαρτάται μόνο από τη ***φύση των επιφανειών*** (συντελεστής τριβής) και τη ***δύναμη που ασκείται κάθετα*** στην επιφάνεια επαφής.

ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗΣ ΤΡΙΒΗΣ:

Οφείλεται σε ***δυνάμεις τριβής που βρίσκονται μέσα στα ίδια τα σώματα (δομική απόσβεση)***.

Η δύναμη εσωτερικής τριβής είναι ανάλογη της μέγιστης τάσης και, επομένως, ανάλογη της ανηγμένης παραμόρφωσης

Άρα η ***απόσβεση εσωτερικής τριβής είναι ανάλογη της μετάθεσης***

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-2

Έστω αρμονική ταλάντωση $u=u_0 ημ(ωt)$ (1)

και δύναμη απόσβεσης ***F*** που μεταβάλλεται <u>αρμονικά</u> με το χρόνο και με <u>ίδια με την ταλάντωση περίοδο</u>:

$$F=F_0 ημ(ωt-φ) \qquad (2)$$

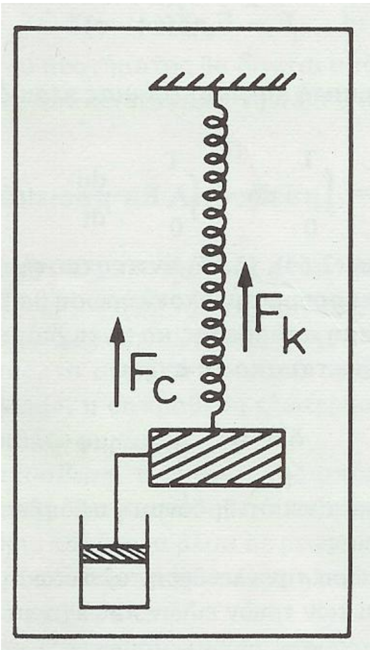
Στη διάρκεια μιας περιόδου, ***T***, η F παράγει (καταναλώνει) έργο:

$$\left.\begin{array}{c} \delta W = \int_0^T F\,du = \int_0^T F \dfrac{du}{dt} dt \\ (1),\quad (2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W = -\pi F_0 u_0 ημφ}$$

Αρνητικό πρόσημο = απορρόφηση ενέργειας (κατανάλωση έργου)

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-3



(Παπαζάχος, 1985)

Δύναμη που προκαλεί την ταλάντωση: $F_k=-ku$

Δύναμη ιξώδους απόσβεσης: $F_c=-c\ du/dt$

c = συντελεστής ιξώδους απόσβεσης

Φορά της F_c αντίθετη της ταχύτητας

Μέτρο της F_c ανάλογο της ταχύτητας

$$\left.\begin{aligned} F_{o\lambda} &= F_k + F_c \\ F_{o\lambda} &= m\gamma \\ \gamma &= \frac{d^2u}{dt^2} \\ \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku - c\frac{du}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + m\omega_0^2 u = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0}$$

Διαφορική εξίσωση ελεύθερης ταλάντωσης με ιξώδη απόσβεση

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-4

Γενική λύση της: $\dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{c}{m}\dfrac{du}{dt}+\omega_0^2u=0 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta: \quad u=ae^{s_1t}+be^{s_2t}$

Μερική λύση η: $u=e^{st}$

$$\left.\begin{array}{l} u=e^{st} \\ \dfrac{d^2u}{dt^2}+\dfrac{c}{m}\dfrac{du}{dt}+\omega_0^2u=0 \end{array}\right\} \Rightarrow s^2e^{st}+\frac{c}{m}se^{st}+\omega_0^2e^{st}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{st}\left(s^2+\frac{c}{m}s+\omega_0^2\right)=0 \Rightarrow \left(s^2+\frac{c}{m}s+\omega_0^2\right)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} s_1=-\dfrac{c}{2m}+\sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2-\omega_0^2} \\ s_2=-\dfrac{c}{2m}-\sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2-\omega_0^2} \end{array}\right.$$

Η υπόριζη ποσότητα $\boldsymbol{R=\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2-\omega_0^2}$ δείχνει τον τρόπο επίδρασης της απόσβεσης.

Αν $\boldsymbol{R}$=0 => c → c_k => $\boldsymbol{c_k=2m\omega_0}$ ***(<u>συντελεστής κρίσιμης απόσβεσης</u>),***
συνάρτηση $\boldsymbol{m}$ και $\boldsymbol{\omega_0}$

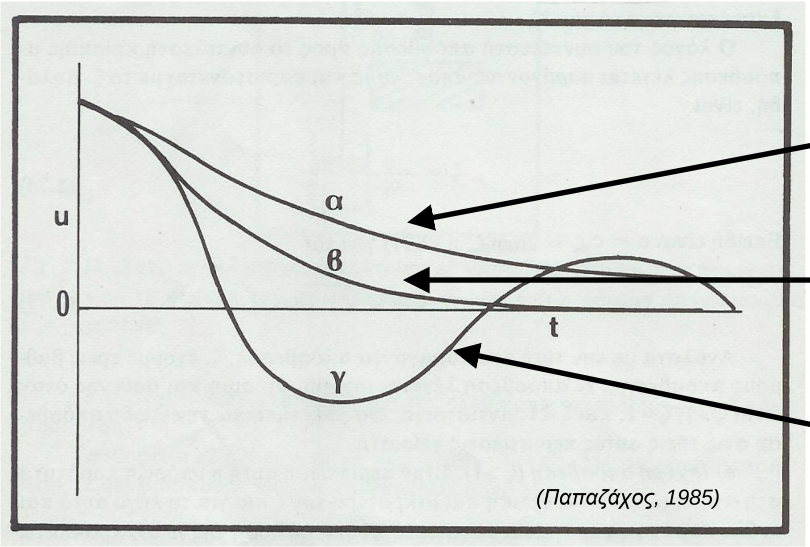
<u>Παράγοντας απόσβεσης</u>: $\boldsymbol{\zeta=c/c_k}$ (=> $c=\zeta c_k$)

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-5

Παράγοντας απόσβεσης: ***ζ=c/c**$_k$* (=> c=ζc$_k$)

$$\left.\begin{array}{l} s_{1,2} = -\dfrac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\dfrac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} \\ c_k = 2m\omega_0,\, c = \zeta c_k \Rightarrow c = 2m\omega_0\zeta \end{array}\right\} \Rightarrow s_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \sqrt{(\zeta\omega_0)^2 - \omega_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{s_{1,2} = \omega_0\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}}$$



(Παπαζάχος, 1985)

ζ>1 => ισχυρή απόσβεση
(c>c$_k$)

ζ=1 => κρίσιμη απόσβεση
(c=c$_k$)

ζ<1 => ασθενής απόσβεση
(c<c$_k$)

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-6

1) Ισχυρή ιξώδης απόσβεση (ζ>1) $s_{1,2} = \omega_0\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \Rightarrow s_{1,2} < 0$

<u>Γενική λύση</u> της $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$ είναι η : $u = ae^{s_1 t} + be^{s_2 t}$

$$u = ae^{s_1 t} + be^{s_2 t} \Rightarrow \boxed{u = ae^{\omega_0 t\left(-\zeta + \sqrt{(\zeta^2 - 1)}\right)} + be^{\omega_0 t\left(-\zeta - \sqrt{(\zeta^2 - 1)}\right)}}$$

2) Κρίσιμη ιξώδης απόσβεση (ζ=1) $s_{1,2} = \omega_0\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \Rightarrow s_1 = s_1 = -\boldsymbol{\omega_0}$

$$u = ae^{s_1 t} + be^{s_2 t} \Rightarrow u = (a+b)e^{-\omega_0 t}$$

Η λύση αυτή έχει μία αυθαίρετη σταθερά (την ***a+b***) και όχι δύο όπως απαιτείται για σχηματισμό γενικής λύσης διαφορικής εξίσωσης 2^{ου} βαθμού.

Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση μπορεί να πάρει τη μορφή $\boxed{u = ae^{-\omega_0 t} + bte^{-\omega_0 t}}$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-7

3) Ασθενής ιξώδης απόσβεση (ζ<1) $s_{1,2} = \omega_0\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = \omega_0\left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)$

Γενική λύση :

$$u = ae^{s_1 t} + be^{s_2 t} \Rightarrow u = a\exp\left[\omega_0 t\left(-\zeta + i\sqrt{(1-\zeta^2)}\right)\right] + b\exp\left[\omega_0 t\left(-\zeta - i\sqrt{(1-\zeta^2)}\right)\right]$$

$$\Rightarrow u = \left[a\exp\left(i\omega_0 t\sqrt{1-\zeta^2}\right) + b\exp\left(-i\omega_0 t\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]\exp(-\zeta\omega_0 t) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{u = Cexp(-\zeta\omega_0 t)\eta\mu\left(\omega_0 t\sqrt{1-\zeta^2} + \varphi\right)}} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad C = \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}, \quad \varepsilon\phi\phi = \frac{\alpha + b}{a - b}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= C\exp(-\zeta\omega_0 t)\eta\mu\left(\omega_0 t\sqrt{1-\zeta^2} + \phi\right) \\ u &= A\eta\mu(\omega_d t + \phi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \omega_d &= \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \\ A &= C\exp(-\zeta\omega_0 t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T_d = \frac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}, \quad (T_d > T_0)$$

<u>πλάτος φθίνουσας ταλάντωσης</u> που μειώνεται με το χρόνο

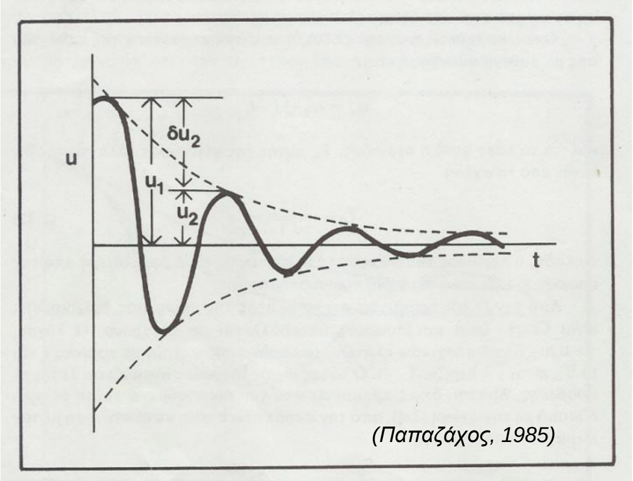
ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-8

***<u>Λόγος απόσβεσης</u>*, *ν*,** ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = C\exp(-\zeta\omega_0 t_1) \\ u_2 = C\exp\left[-\zeta\omega_0 (t_1 + T_d)\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \nu = \frac{u_1}{u_2} = \frac{C\exp(-\zeta\omega_0 t_1)}{C\exp\left[-\zeta\omega_0 (t_1 + T_d)\right]} \Rightarrow \nu = \exp(-\zeta\omega_0 t_1 + \zeta\omega_0 t_1 + \zeta\omega_0 T_d) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \nu = \exp(\zeta\omega_0 T_d) \\ T_d = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \nu = \exp\left(\frac{2\pi\zeta T_0}{T_0\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\nu = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}}$$

Το ***ζ*** υπολογίζεται εύκολα αφού το ***ν*** προκύπτει από απ’ ευθείας μέτρηση δύο διαδοχικών πλατών στο σεισμόγραμμα (π.χ. u_1, u_2)

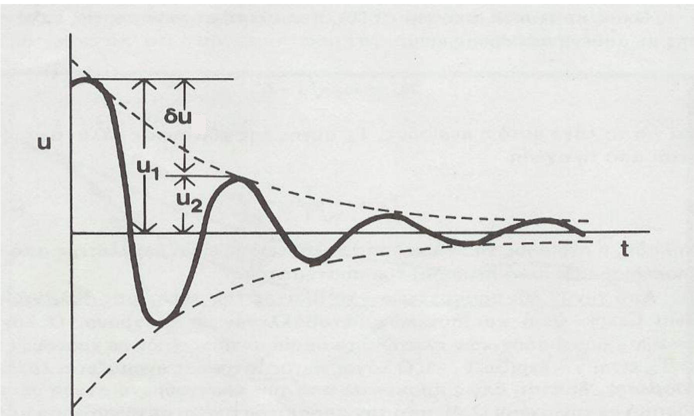


(Παπαζάχος, 1985)

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-9

***Λόγαριθμική απόσβεση*, ξ:**

$$\xi = \ln\nu = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



(Παπαζάχος, 1985)

$$\left.\begin{aligned} & u_1 = u_2 + \delta u \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = 1 + \frac{\delta u}{u_2} \\ & \xi = \ln\nu = \ln\frac{u_1}{u_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} & \xi = \ln\left(1+\frac{\delta u}{u_2}\right) \\ & \Gamma\iota\alpha\ \delta u \ll \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \xi \approx \frac{\delta u}{u_1}$$

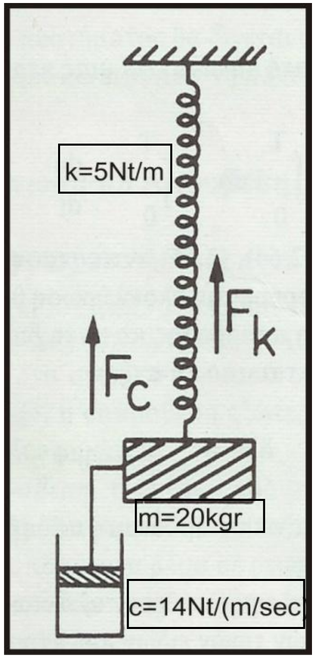
Σε διάστημα μιας περιόδου, ***T*** $\boldsymbol{T_d}$, έχουμε μεταβολή ενέργειας, ***δE***, και πλάτους, ***δu*** :

$$\left.\begin{aligned} & E_1 = \frac{1}{2}ku_1^2 \\ & E_2 = \frac{1}{2}k(u_1-\delta u)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E_1 - \delta E = E_2 = \frac{1}{2}k\left(u_1-\delta u\right)^2 \Rightarrow \frac{E_1-\delta E}{E_1} = \left(\frac{u_1-\delta u}{u_1}\right)^2 =$$

$$= \frac{u_1^2 + \delta u^2 - 2u_1\delta u}{u_1^2} \Rightarrow 1 - \frac{\delta E}{E_1} = 1 + \frac{\delta u^2}{u_1^2} - 2\frac{\delta u}{u_1} \Rightarrow \frac{\delta E}{E_1} = -\cancel{\frac{\delta u^2}{u_1^2}}^{\,\mathbf{0}} + 2\frac{\delta u}{u_1} \approx 2\xi \Rightarrow \boldsymbol{\xi = \frac{\delta E}{2E}}$$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-10

Στη διάταξη του σχήματος να βρεθούν: ***α)*** η ιδιοπερίοδος (T_0) και η κυκλική ιδιοσυχνότητα (ω_0) της ελεύθερης (χωρίς απόσβεση) ταλάντωσης, ***β)*** ο συντελεστής κρίσιμης απόσβεσης, c_k, ***γ)*** ο παράγοντας απόσβεσης, ζ, ***δ)*** η περίοδος φθίνουσας ταλάντωσης, T_d, ***ε)*** η λογαριθμική απόσβεση, ξ, ***στ)*** ο λόγος απόσβεσης, v και ***ζ)*** να γραφεί η διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης και η εξίσωση της κίνησης αν για $t=0$ είναι $u_0=0m$ και $\upsilon_0=2m/sec$.



(Παπαζάχος, 1985)

$$a)\quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{20}{5}} = \boldsymbol{12.6sec},\quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{12.6} = \boldsymbol{0.5rad/sec}$$

$$\beta)\quad c_k = 2m\omega_0 = 20Nt/(m/\sec),\quad \gamma)\quad \zeta = \frac{c}{c_k} = \frac{14}{20} = \boldsymbol{0.7}$$

$$\delta)\quad T_d = \frac{T_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \boldsymbol{17.6sec},\quad \varepsilon)\quad \xi = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \boldsymbol{6.16}$$

$$\sigma\tau)\quad \xi = \ln v \Rightarrow v = e^{\xi} = \boldsymbol{473.4}$$

$\zeta)$ Διαφορική εξίσωση της κίνησης:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + 0.7\frac{du}{dt} + 0.25u = 0$$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΙΞΩΔΗ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-11

Γενική λύση: $$u = B\exp(-\zeta\omega_0 t)\eta\mu(\omega_0 t\sqrt{(1-\zeta^2)}+\phi) \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad u = B\exp(-0.35t)\eta\mu(0.36t+\phi)$$

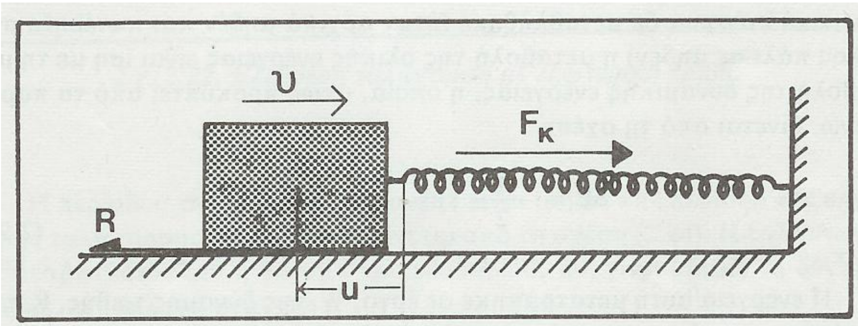
$$\upsilon = \frac{du}{dt} = B\left[-0.35\exp(-0.35t)\eta\mu(0.36t+\phi)+0.36\exp(-0.35t)\sigma\upsilon\nu(0.36t+\phi)\right]$$

Για ***t=0 → u=u$_0$=0, υ=υ$_0$=2m/sec***. Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} u_0=0=B\eta\mu\varphi \\ \upsilon_0=2 \Rightarrow 2=B(-0.35\eta\mu\varphi+0.36\sigma\upsilon\nu\varphi) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \varphi=0. \\ B=2/0.36=5.6m \end{array}$$

(1) => $\boxed{u=5.6\exp(-0.35t)\eta\mu(0.36t)}$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ-1



(Παπαζάχος, 1985)

Δύναμη τριβής, R: ***R=nN***

n=συντελεστής τριβής,
N=δύναμη που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια επαφής
R ανεξάρτητη από u, υ, γ.
Δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} &F_\kappa = -ku \\ &R = nN \\ &F = F_k \pm R \\ &F = m\gamma \\ &\gamma = \frac{d^2u}{dt^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\gamma = F_k \pm R \Rightarrow m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku \pm R \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = \pm\frac{R}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = \pm\frac{R}{m}}$$

Διαφορική εξίσωση της κίνησης.

Το [+/-] δείχνει την εναλλαγή φοράς της τριβής κατά τη διάρκεια μιας περιόδου (αλλαγή προσήμου ανά ημιπερίοδο)

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ-2

Πλάτος ταλάντωσης: u_0

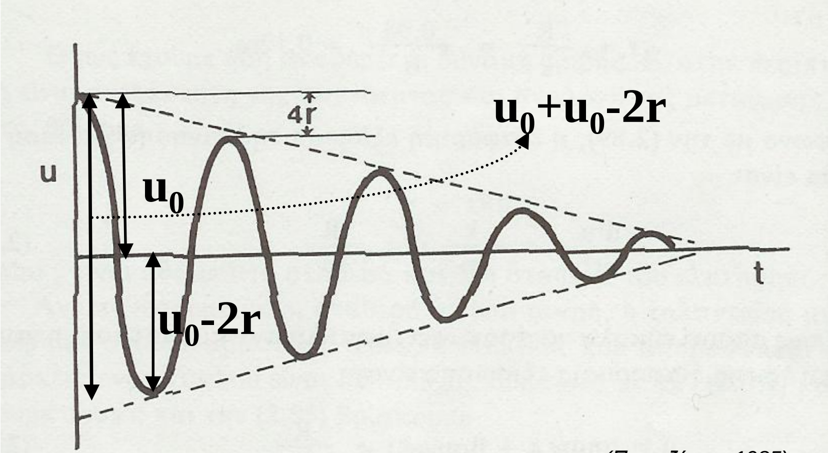
Στη μέγιστη απόσταση από τη θέση ισορροπίας (πλάτος u_0) :

Μόνο ***δυναμική ενέργεια***: $ku_0^2/2$

Σε χρόνο $T_0/2$:

Απόσταση από τη θέση ισορροπίας : u_0-2r

Δυναμική ενέργεια: $\frac{1}{2}k(u_0-2r)^2$



(Παπαζάχος, 1985)

Μεταβολή της συνολικής ενέργειας =
= μεταβολή της δυναμικής ενέργειας

$$\delta \mathrm{E}=\frac{1}{2}ku_o^2-\frac{1}{2}k\left(u_o-2r\right)^2=2kr(u_0-r)$$

Στον ίδιο χρόνο ($T_0/2$) το σημείο εφαρμογής της R μετατέθηκε κατά $u_0+(u_0-2r)=2u_0-2r$
(χωρις τριβή θα είχε μετατεθεί κατά $2u_0$, ενώ η μείωση της μετάθεσης λόγω τριβής είναι $r+r=2r$)
Απώλεια ενέργειας = παραγωγή έργου από τη δύναμη τριβής.

$$W=R\left(2u_o-2r\right)$$

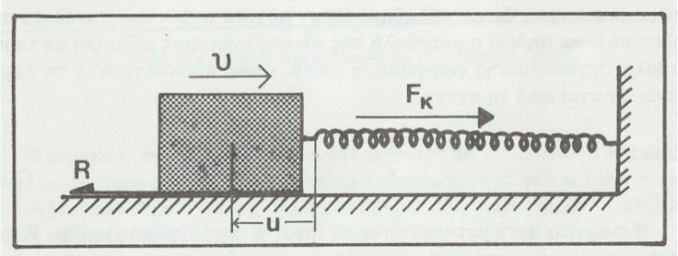
Επειδή $\delta E=W$=> $R=kr\Rightarrow r=\frac{R}{k}$

Άρα σε χρόνο μιας περιόδου η μεταβολή του πλάτους είναι: $4r=\frac{4R}{k}=ct$

=> άρα οι περιβάλλουσες είναι ευθείες γραμμές

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.10-1

Έστω m=2kgr, k=8Nt/m και n=0.05. Αν για t=0 είναι u_0=3m και υ_0=0 να βρεθούν: **α)** η κυκλική συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης, **β)** η δύναμη τριβής, *R*, και η τριβή, *r(απώλεια πλάτους σε T/4)*, **γ)** η εξίσωση της ταλάντωσης για *t=T/2*



(Παπαζάχος, 1985)

$$\alpha)\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \mathbf{2rad/sec}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \mathbf{3.1sec}$$

$$\beta)\ R = nN = nB = nmg = 0.05\cdot 2\cdot 9.81 \Rightarrow \mathbf{R = 0.98Nt}$$

$$r = R/k = 0.98/8 \Rightarrow \mathbf{r = 0.12m}$$

$$\gamma)\ \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m}u = \frac{R}{m} \qquad (\gamma\iota\alpha\ \mathrm{T}/2)$$

Γενική λύση: $u = \alpha\eta\mu\omega_0 t + \beta\sigma\upsilon\nu\omega_0 t + \dfrac{R}{k}$

$$\left.\begin{aligned} &u = \alpha\eta\mu(2t) + \beta\sigma\upsilon\nu(2t) + 0.12 \\ &\upsilon = \frac{du}{dt} = 2\alpha\sigma\upsilon\nu(2t) - 2\beta\eta\mu(2t) \\ &\gamma\iota\alpha\ t = 0, \quad u_0 = 3m, \quad \upsilon_0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} u_0 &= 3 = \beta + 0.12 \\ \upsilon_0 &= 0 = 2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\boldsymbol{\beta = 2.88m} \\ &\mathbf{a = 0} \end{aligned}\right\}$$

Άρα η εξίσωση της ταλάντωσης για διάστημα *t=T/2* είναι:

$$\boxed{u = 2.88\sigma\upsilon\nu\ (2t) + 0.12}$$

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ

Δύναμη εσωτερικής τριβής ***F*** ανεξάρτητη της συχνότητας, ανάλογη της μετάθεσης, ***u*** :

$$F = \gamma \cdot \kappa \cdot u$$

γ *(παράγοντας εσωτερικής τριβής)* = αδιάστατη σταθερά,
κ = σταθερά ελατηρίου

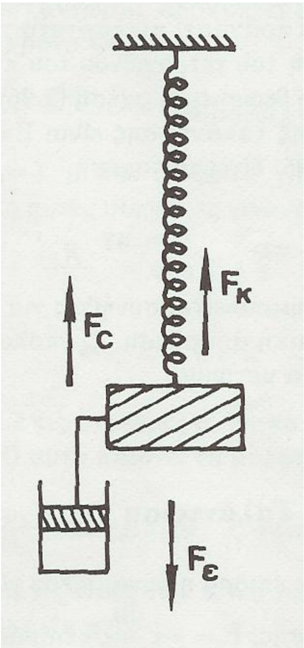
Εάν η ***γ*** είναι μικρή η ταλάντωση μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν αρμονική, οπότε η ενέργεια που καταναλώνεται κατά τη διάρκεια μιας περιόδου (από το κεφάλαιο *«ελεύθερη ταλάντωση με απόσβεση»*):

$$\left.\begin{aligned} &\delta E = \pi F_0 u_0 \\ &F = \gamma k u \Rightarrow F_0 = \gamma k u_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta E = \pi \gamma k u_0^2$$

$$\left.\begin{aligned} &E = \frac{1}{2} k u_0^2 \\ &\xi = \frac{\delta E}{2E} \\ &\delta E = \pi \gamma k u_0^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi = \frac{\pi \gamma k u_0^2}{k u_0^2} \Rightarrow \xi = \pi \gamma \overset{\xi = \ln \nu}{\Rightarrow} \gamma = \frac{\ln \nu}{\pi}$$

Άρα το ***γ*** υπολογίζεται εύκολα

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-1



(Παπαζάχος, 1985)

Δύναμη ελατηρίου: $F_k = -ku$

Δύναμη ιξώδους απόσβεσης: $F_c = -c\dfrac{du}{dt}$

Εξωτερική δύναμη: F_ε

Ολική δύναμη: $F = F_k + F_c + F_\varepsilon \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow m\gamma = -ku - c\frac{du}{dt} + F_\varepsilon \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{k}{m}u - \frac{c}{m}\frac{du}{dt} + \frac{1}{m}F_\varepsilon \\ &\omega_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{du}{dt} + \omega_o^2 u = \frac{1}{m}F_\varepsilon}$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-2

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{du}{dt} + \omega_o^2 u = \frac{1}{m}F_\varepsilon \qquad \text{(μη ομογενής)}$$

Λύση (**u**) μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης = γενική λύση μη ομογενούς (x)+ μερική λύση ομογενούς (**z**):

u=x+z

Το **x** ονομάζεται <u>*steady state*</u> (λύση σταθερής κατάστασης), εκφράζει κίνηση επιβαλλόμενη από τη δύναμη $\mathbf{F_\varepsilon}$ και προκύπτει από την:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{1}{m}F_\varepsilon \qquad (1)$$

Το **z** ονομάζεται <u>*transient*</u> (παροδική ή συμπληρωματική λύση), περιγράφει κίνηση που πολύ σύντομα εξαφανίζεται λόγω απόσβεσης και προκύπτει ως εξής:

$$\frac{d^2(x+z)}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{d(x+z)}{dt} + \omega_o^2(x+z) = \frac{1}{m}F_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{c}{m}\frac{dz}{dt} + \omega_o^2 x + \omega_o^2 z = \frac{1}{m}F_\varepsilon \qquad (2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dz}{dt} + \omega_o^2 z = 0 \Rightarrow z = \ldots$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-3

Έστω η εξωτερική δύναμη, $F_ε$, μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο: $\boldsymbol{F_ε=F_0 ημ(ωt)}$

Τότε η επιβαλλόμενη ταλάντωση θα είναι επίσης αρμονική με την ίδια περίοδο: $\boldsymbol{u=Bημ(ωt-θ)}$

Δυνάμεις που δρουν στο σύστημα:

\# Δύναμη αδράνειας $$F_a = -m\frac{d^2u}{dt^2} = mB\omega^2 \eta\mu(\omega t-\theta)$$

\# Δύναμη επαναφοράς $$F_k = -ku = -kB\eta\mu(\omega t-\theta)$$

\# Δύναμη απόσβεσης $$F_c = -c\frac{du}{dt} = -cB\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t-\theta) = cB\omega\eta\mu\left(\omega t-\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$

\# Εξωτερική δύναμη $$F_\varepsilon = F_0\eta\mu(\omega t)$$

Τα μέτρα των διανυσμάτων είναι ίσα με τα πλάτη των αντίστοιχων δυνάμεων:

$\boldsymbol{|F_α| = Bmω^2}$ $\boldsymbol{|F_k| = -kB}$ $\boldsymbol{|F_c| = cBω}$ $\boldsymbol{|F_ε| = F_0}$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-4

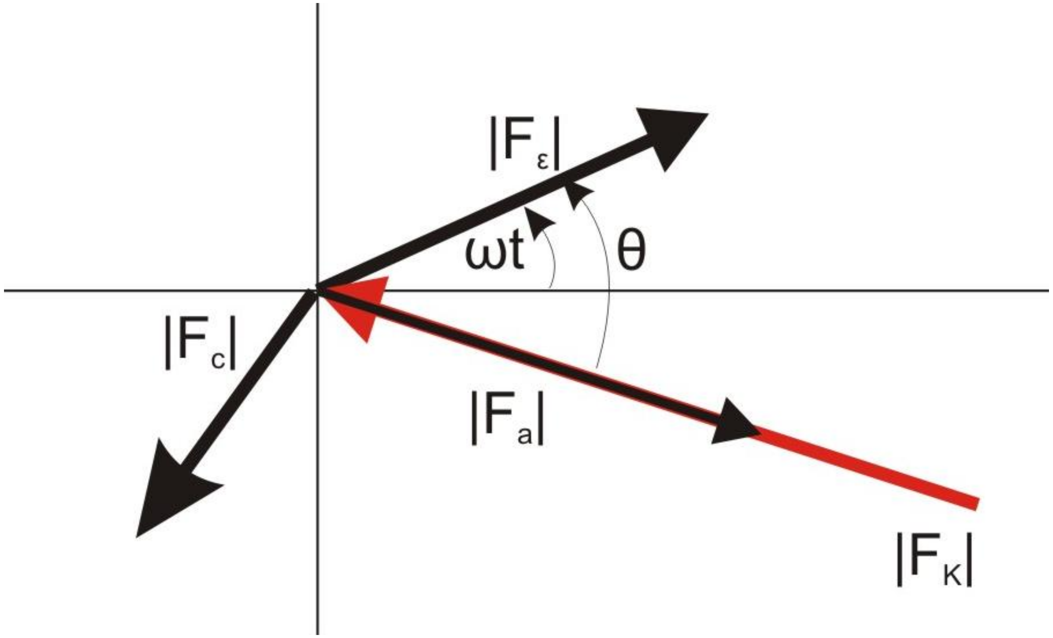
Όταν το σύστημα ακινητοποιείται οι δυνάμεις βρίσκονται σε ισορροπία, δηλαδή, το γεωμετρικό άθροισμα των μέτρων τους είναι $|F_\alpha| + |F_\varepsilon| + |F_k| + |F_c| = 0$

$$F_\varepsilon = F_0 \eta\mu(\omega t)$$

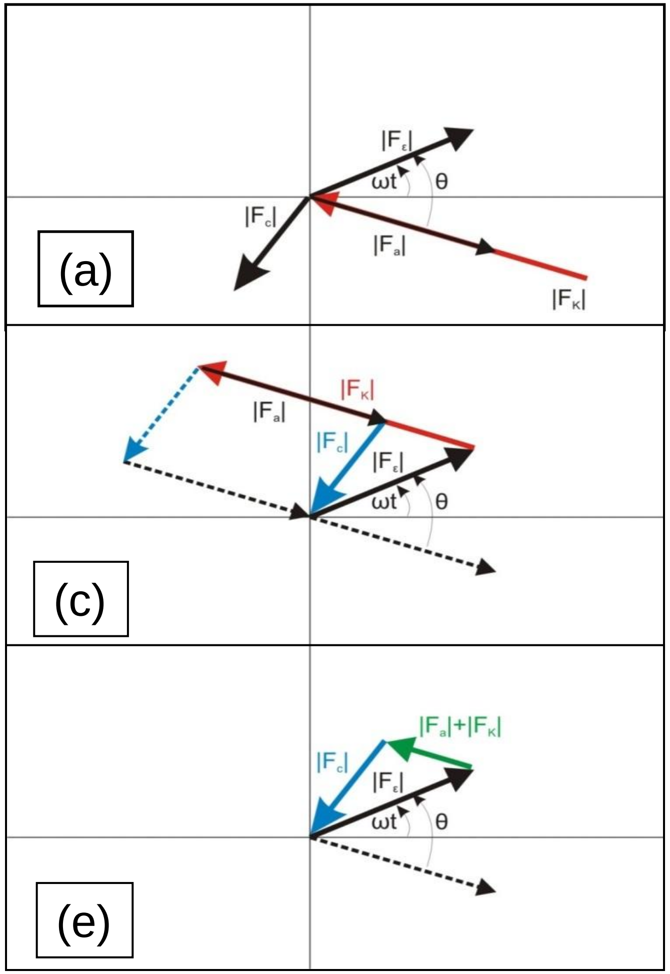
$$F_k = -kB\eta\mu(\omega t - \theta)$$

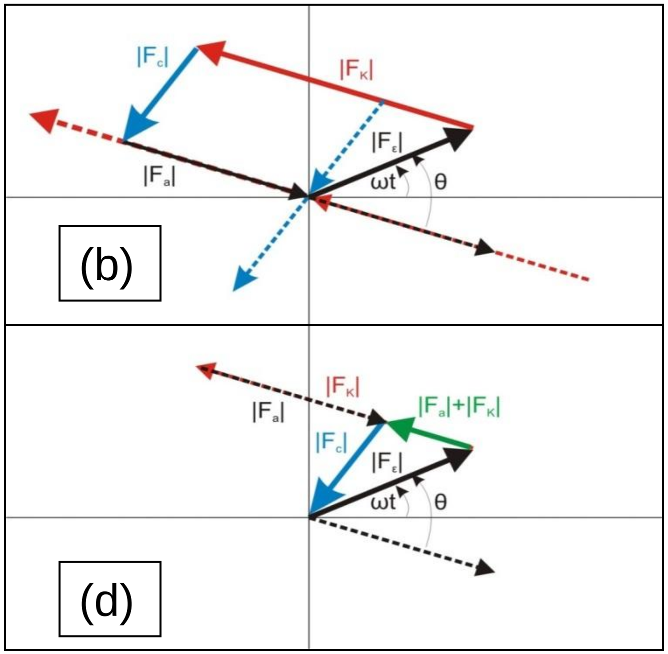
$$F_a = mB\omega^2 \eta\mu(\omega t - \theta)$$

$$F_c = cB\omega\eta\mu\left(\omega t - \theta - \frac{\pi}{2}\right)$$



ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-5





$$\left|F_\varepsilon\right|^2 = \left(\left|F_a\right| + \left|F_k\right|\right)^2 + \left|F_c\right|^2$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{\left|F_c\right|}{\left|F_a\right| + \left|F_k\right|}$$

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-6

$$\left|F_\varepsilon\right|^2 = \left(\left|F_a\right| + \left|F_k\right|\right)^2 + \left|F_c\right|^2$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{\left|F_c\right|}{\left|F_a\right| + \left|F_k\right|}$$

Έχοντας υπόψη και τις: $\boldsymbol{c_k = 2m\omega_0}$, $\boldsymbol{\zeta = c / c_k}$, $\boldsymbol{\omega_0^2 = k / m}$ καταλήγουμε στις:

$$B = \left(\frac{F_0 / k}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_0^{\,2}}\right)^2 + \frac{4\zeta^2 \mathrm{T}^2}{\mathrm{T}_0^{\,2}}}} \right), \qquad \varepsilon\phi\theta = \frac{2\zeta \mathrm{T}_0 \mathrm{T}}{\mathrm{T}_0^2 - \mathrm{T}^2}$$

οπότε καθορίστηκαν οι παράμετροι της ***u=Bημ(ωt-θ)*** που αποτελεί μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ-7

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση εκτός από την επιβαλλόμενη κίνηση υπάρχει η φθορά της κίνησης λόγω απόσβεσης: $u = C\exp(-\zeta\omega_0 t)\eta\mu\left(\omega_0 t\sqrt{1-\zeta^2}+\phi\right)$

Η γενική λύση της $\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{du}{dt}+\omega_o^2 u = \frac{1}{m}F_\varepsilon$

είναι το άθροισμα των δύο λύσεων, ***επιβαλλόμενης + φθίνουσας (παροδικής):***

$$\boldsymbol{u = B\eta\mu(\omega t - \theta) + C\exp(-\zeta\omega_0 t)\eta\mu\left(\omega_0 t\sqrt{1-\zeta^2}+\varphi\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \left(\dfrac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\dfrac{T^2}{T_0^2}\right)^2+\dfrac{4\zeta^2 T^2}{T_0^2}}}\right) \\ \left.\begin{array}{l} F = F_0\eta\mu\omega t \\ F_0 = -kA \end{array}\right\} \Rightarrow A = \dfrac{F_0}{k} \Rightarrow \end{array}\right\} \Rightarrow U = \frac{B}{A} \Rightarrow$$

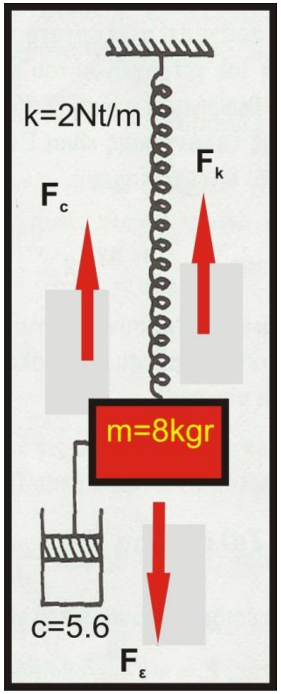
$$\boxed{\boldsymbol{U = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{T^2}{T_o^2}\right)^2+\left(\dfrac{2\zeta T}{T_o}\right)^2}}\right)}}$$

Σταθερή εκτροπή της μάζας λόγω δύναμης F_0

Δυναμική Μεγέθυνση

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.11-1

Η μάζα τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση από δύναμη *F=5ημ(ωt)* περιόδου T=10sec. Αν για *t=0* είναι $u_0=0$ και $\dot{u}_0=0$ να καθοριστεί η εξίσωση της ταλάντωσης.



(Παπαζάχος, 1985)

Ιδιοπερίοδος: $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{8}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{T_0 = 12.57sec}$

Παράγοντας απόσβεσης: $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{5.6}{2\cdot 8\cdot(2\pi/T_0)} \Rightarrow \boldsymbol{\zeta = 0.7}$

$$B = \left(\frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\frac{T^2}{T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta T}{T_0}\right)^2}} \right) \Rightarrow B = \left(\frac{5/2}{\sqrt{\left(1-\frac{10^2}{12.57^2}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot 0.7\cdot 10}{12.57}\right)^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{B = 1.35\ m}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{2\zeta T_0 T}{T_0^2 - T^2} = \frac{2\cdot 0.7\cdot 12.57\cdot 10}{12.57^2 - 10^2} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = 3.034 \Rightarrow \boldsymbol{\theta = 71.76^0}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2.11-2

$$u = B\eta\mu(\omega t - \theta) + C\exp(-\zeta\omega_0 t)\eta\mu\left(\omega_0 t\sqrt{1-\zeta^2} + \phi\right) \Rightarrow$$

$$u = 1.35\eta\mu(0.63t - 71.76) + C\exp(-0.35t)\eta\mu\left(0.36t + \phi\right)$$

$$\upsilon = \frac{du}{dt} = 0.85\sigma\upsilon\nu(0.63t - 71.76) - 0.35C\exp(-0.35t)\eta\mu\left(0.36t + \phi\right) +$$

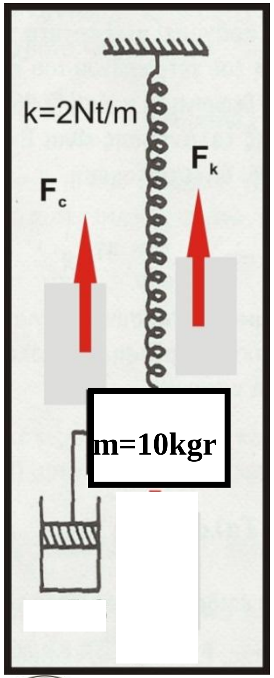
$$+ 0.36C\exp(-0.35t)\sigma\upsilon\nu\left(0.36t + \phi\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C\eta\mu\phi = 1.28 \\ C(-0.35\eta\mu\phi + 0.36\sigma\upsilon\nu\phi) = -0.27 \end{array}\right\} \Rightarrow C = 1.37, \quad \varphi = 68.8^0$$

$$\boxed{u = 1.35\eta\mu(0.63t - 71.76) + 1.37\exp(-0.35t)\eta\mu\left(0.36t + 68.8\right)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.8-1

Δίνεται η διάταξη του σχήματος και η αντίστοιχη καταγραφή. Αν ***m=10kgr, k=2Nt/m*** να βρεθούν: **α)** η φυσική περίοδος, $\boldsymbol{T_0}$, συχνότητα, $\boldsymbol{f_0}$, κυκλική ιδιοσυχνότητα, $\boldsymbol{\omega_0}$, συντελεστης κρίσιμης απόσβεσης, $\boldsymbol{c_k}$, του συστήματος **β)** ο λόγος απόσβεσης, ***ν***, ο παράγοντας απόσβεσης, ***ζ***, η λογαριθμική απόσβεση, ***ξ***, ο συντελεστής απόσβεσης, ***c*** και το ***ποσοστό ενέργειας*** που χάνει το σύστημα μετά από ***5 ταλαντώσεις.***



(Παπαζάχος, 1985)

$$a)\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{2}} \Rightarrow \boldsymbol{T_0 = 14.05sec}, \quad \boldsymbol{f_0 = 0.07Hz},$$

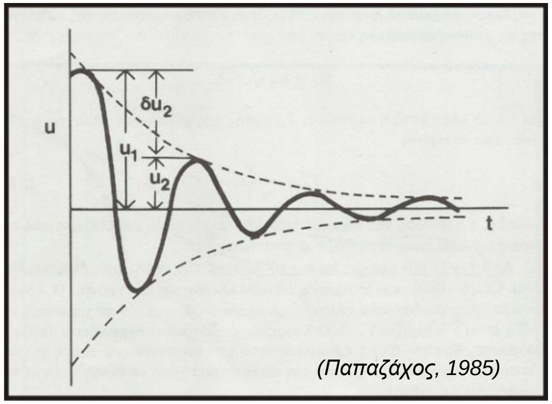
$$\boldsymbol{\omega_0 = 0.44rad/sec}, \quad \boldsymbol{c_k} = 2m\omega_0 = \boldsymbol{8.8Nt \cdot sec/m}$$

$$\beta)\ \boldsymbol{\nu} = {}^{u_1}\!/\!_{u_2} = (\alpha\pi\acute{o}\ \tau o\ \gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\eta\mu\alpha)\ {}^{3}\!/\!_{1.1} = \boldsymbol{2.73}$$

$$\nu = \exp\left(\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\zeta = 0.15}$$

$$\boldsymbol{\xi} = \ln\nu = \boldsymbol{1.004}$$

$$c = \zeta c_k = 0.15 \cdot 8.8 \Rightarrow \boldsymbol{c = 1.32Nt \cdot sec/m}$$

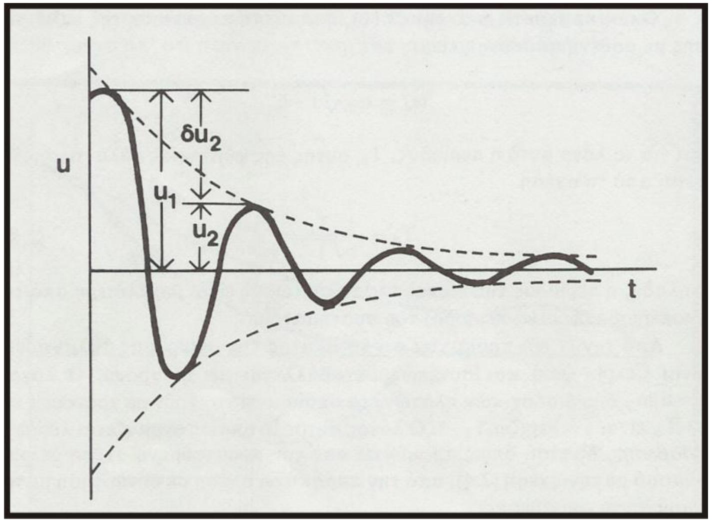


(Παπαζάχος, 1985)

ΑΣΚΗΣΗ 2.8-2

$$\nu = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_2}{u_3} = \frac{u_3}{u_4} = \frac{u_4}{u_5} = 2.73 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_5} = 2.73^4 \Rightarrow \boldsymbol{u_5 = 0.054m}$$



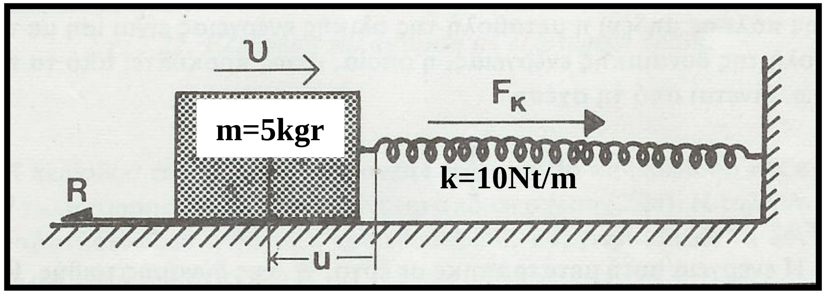
(Παπαζάχος, 1985)

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{ku_1^2}{2} = \frac{2\cdot 3^2}{2} \\ E_5 &= \frac{ku_5^2}{2} = \frac{2\cdot 0.054^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} E_1 &= 9.0 Nt.m \\ E_5 &= 2.9*10^{-3} Nt.m \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

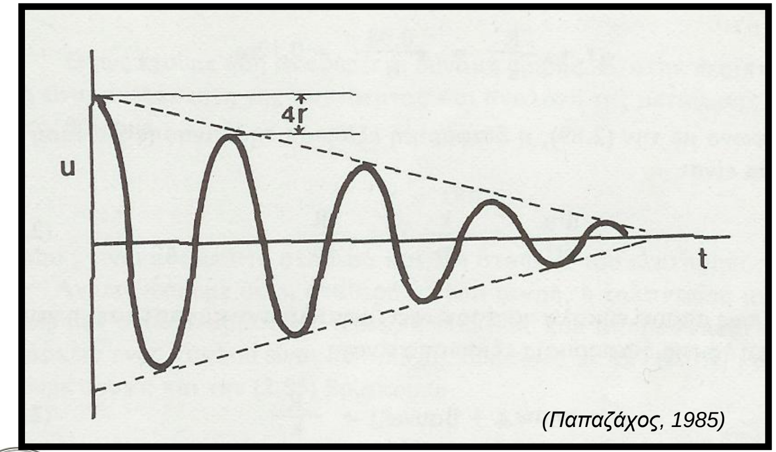
Χάνεται περίπου το 100% της αρχικής ενέργειας

ΑΣΚΗΣΗ 2.9

Δίνεται η διάταξη του σχήματος και η αντίστοιχη καταγραφή.
Αν ***m=5kgr, k=10Nt/m*** να βρεθούν:
α) η περίοδος, ***T***, **β)** η τριβή , ***r***, **γ)** η δύναμη τριβής, ***R***, **δ)** ο συντελεστής τριβής , ***n.***



(Παπαζάχος, 1985)



(Παπαζάχος, 1985)

$$a)\ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5}{10}} \Rightarrow \boldsymbol{T = 4.44sec,}$$

$$\beta)\ (\kappa\alpha\tau\alpha\gamma\rho\alpha\varphi\acute{\eta}) \Rightarrow 4r = 0.55cm \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{r = 0.1375cm}$$

$$\gamma)\ r = \frac{R}{k} \Rightarrow \boldsymbol{R = 0.014Nt}$$

$$\delta)\ R = nN \Rightarrow n = \frac{R}{N} \Rightarrow n = \frac{0.014}{5\cdot 9.81} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{n = 2.9\cdot 10^{-4}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.10

Κτίριο μπαίνει σε ταλάντωση. Αν ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών είναι ***v=1.5*** να βρεθούν:

α) η λογαριθμική απόσβεση, ***ξ***, **β)** ο παράγοντας εσωτερικής τριβής , ***γ***, **γ)** το ποσοστό ενέργειας που απορροφάται μετά από ***10 ταλαντώσεις***.

$$a)\ \xi = \ln \nu \Rightarrow \boldsymbol{\xi = 0.41}$$

$$\beta)\ \xi = \pi\gamma \Rightarrow \boldsymbol{\gamma = 0.129}$$

$$\gamma)\ \xi = \frac{\Delta E}{2E} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = 2\xi \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = 0.82 \quad (\textit{για μια ταλάντωση})$$

Μεταβολή ενέργειας κατά την 1η ταλάντωση : $\Delta E_1 = 82\%E = 0.82E$

Υπόλοιπο το 18% της αρχικής ενέργειας ($E_1 = 0.18E$)

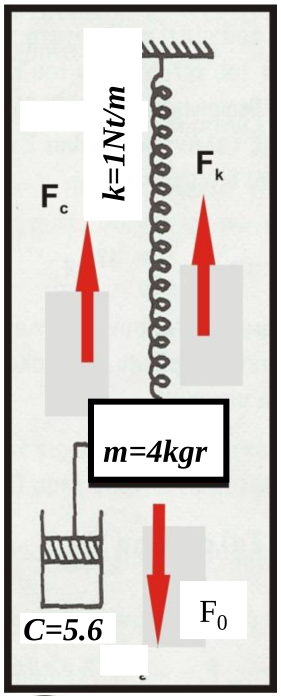
Μεταβολή ενέργειας κατά την 2η ταλάντωση : $\Delta E_2 = 82\%E_1$

Υπόλοιπο το 18% της αρχικής ενέργειας ($E_2 = 0.18^2 E$)

$\kappa.o.\kappa.$

ΑΣΚΗΣΗ 2.11-1

Το σύστημα τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση από δύναμη που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο με πλάτος $\boldsymbol{F_0=10Nt}$ και περίοδο, $\boldsymbol{T=2sec}$. να βρεθούν:
α) η φυσική περίοδος, $\boldsymbol{T_0}$, και ο παράγοντας απόσβεσης, $\boldsymbol{\zeta}$, του συστήματος, **β)** η δυναμική μεγέθυνση, $\boldsymbol{U}$, και η διαφορά φάσης, $\boldsymbol{\theta}$, μεταξύ δύναμης-μετάθεσης και **γ)** οι δυνάμεις που επιδρούν στο σύστημα.



(Παπαζάχος, 1985)

$$a)\, T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_0 = 12.6sec, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{5.6\cdot 12.6}{2\cdot 4\cdot 2\pi} \Rightarrow \zeta = 1.4$$

$$\beta)\, U = \left(\sqrt{\left(1-\frac{T^2}{T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta T}{T_0}\right)^2}\right)^{-1} = \left(\sqrt{\left(1-\frac{12.6^2}{2^2}\right)^2 + \left(\frac{2\cdot 1.4\cdot 12.6}{2}\right)^2}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = 0.054$$

$$\varepsilon\phi\theta = \frac{2\zeta T_0 T}{T_0^2 - T^2} = \frac{2\cdot 1.4\cdot 12.6\cdot 2}{12.6^2 - 2^2} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta = 0.456 \Rightarrow \theta = 24.5^0$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.11-2

$$\gamma) \quad B = \left(\frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\frac{T_0^{\,2}}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{2\zeta T_0}{T}\right)^2}} \right) \Rightarrow \mathrm{B} = \frac{F_0}{k}U = \frac{10}{1}0.054 \Rightarrow \boldsymbol{B = 0.54}$$

$|F_\alpha| = B m \omega^2 = 0.54*4*(2*\pi/2)^2 = 21.31Nt$ ***(Δύναμη αδράνειας)***

$|F_k| = -kB = -1*0.54 = -0.54Nt$ ***(Δύναμη επαναφοράς ελατηρίου)***

$|F_c| = cB\omega = 5.6*0.54*\pi = 9.50Nt$ ***(Δύναμη απόσβεσης)***

$|F_0| = 10Nt$ ***(Εξωτερική δύναμη)***

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Σκορδύλης Εμμανουήλ. «Θεωρία Μηχανικών Ταλαντώσεων και Ελαστικά Κύματα. Μηχανικές Ταλαντώσεις». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS347/

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Βεντούζη Χρυσάνθη

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.