ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ενότητα 3: Στοιχεία Θεωρίας Ελαστικότητας

Σκορδύλης Εμμανουήλ
Καθηγητής Σεισμολογίας, Τομέας Γεωφυσικής,
Τμήμα Γεωλογίας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

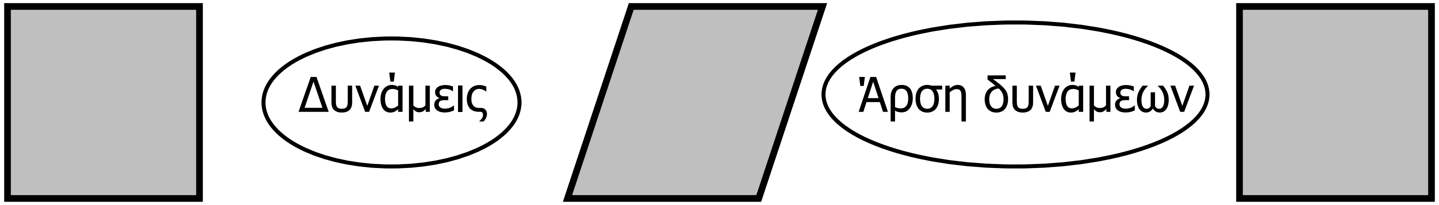
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Πετρώματα $\approx$ ελαστικά σώματα



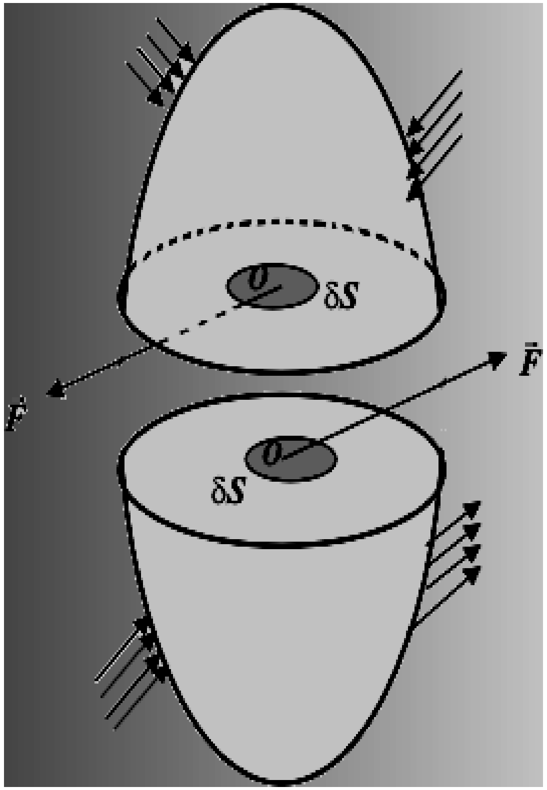
ελαστική παραμόρφωση

<u>Απαραίτητες συνθήκες</u> : i) Μικρή παραμόρφωση
ii) Μικρή διάρκεια άσκησης των δυνάμεων
π.χ. διάδοση σεισμικών κυμάτων

<u>Αντικείμενα μελέτης του κεφαλαίου</u>:

1. ***Τάση (stress)***
2. ***Παραμόρφωση (deformation)*** φυσικού σώματος
3. ***Ανηγμένη παραμόρφωση (strain)***
4. ***Σχέσεις τάσης - ανηγμένης παραμόρφωσης*** για ελαστικά και ισότροπα σώματα
5. ***Εξίσωση κίνησης υλικών σημείων*** ενός ελαστικού και ισότροπου σώματος.

ΤΑΣΗ



Επίδραση εξωτερικών δυνάμεων ➔ σώμα σε ισορροπία Συνισταμένη ***F = 0*** (στο ***O***).

Υλικό χώρου γύρω από ***O*** σε ***εντατική κατάσταση***

Ποιες δυνάμεις ασκούνται στο στοιχείο του σώματος που περιβάλλει το Ο ;

δS = στοιχειώδης επιφάνεια

F = συνισταμένες δυνάμεις που ασκεί το ένα τμήμα του σώματος στο άλλο

Οι δυνάμεις είναι ίσες & αντίθετες (νόμος δράσης – αντίδρασης)

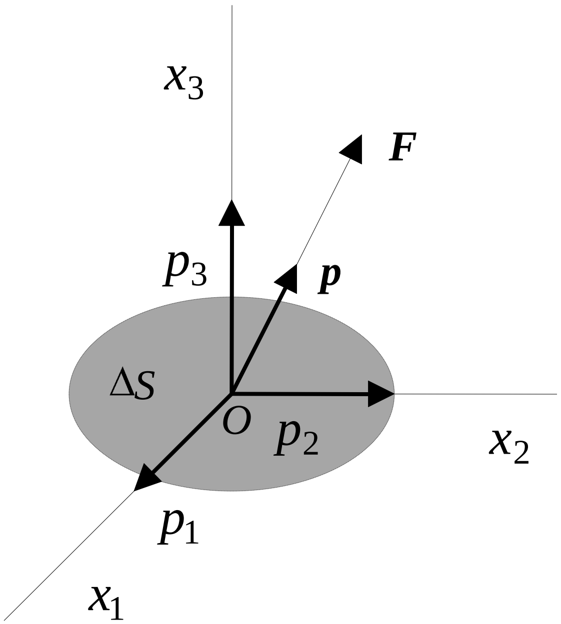
Άρα αρκεί η μελέτη της μιας (F)

F = f (προσανατολισμός δS, εμβαδόν δS)

Σκοπός : Μελέτη αιτίου της ***εντατικής κατάστασης στο Ο ανεξάρτητα της S*** $\Rightarrow$

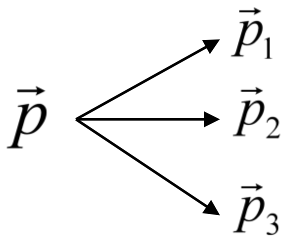
μελετάμε ***F / μονάδα επιφάνειας*** = ***ΤΑΣΗ*** = ανεξάρτητη εμβαδού δS.

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΤΑΣΗΣ



Διάνυσμα τάσης στο Ο ως προς ΔS :

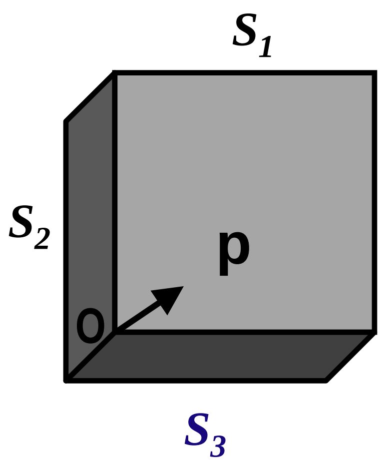
$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{\Delta S} \quad \text{όταν} \quad \Delta S \to 0$$



p₃ = κάθετη ή ορθή συνιστώσα τάσης

p₁*, *p₂ = διατμητικές συνιστώσες τάσης (εφαπτομενικές)

ΤΑΣΗ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΦΥΣΙΚΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ-1



Μεταβολή προσανατολισμού ΔS $\Rightarrow$ μεταβολή

$\Rightarrow$ μεταβολή p_1, p_2, p_3

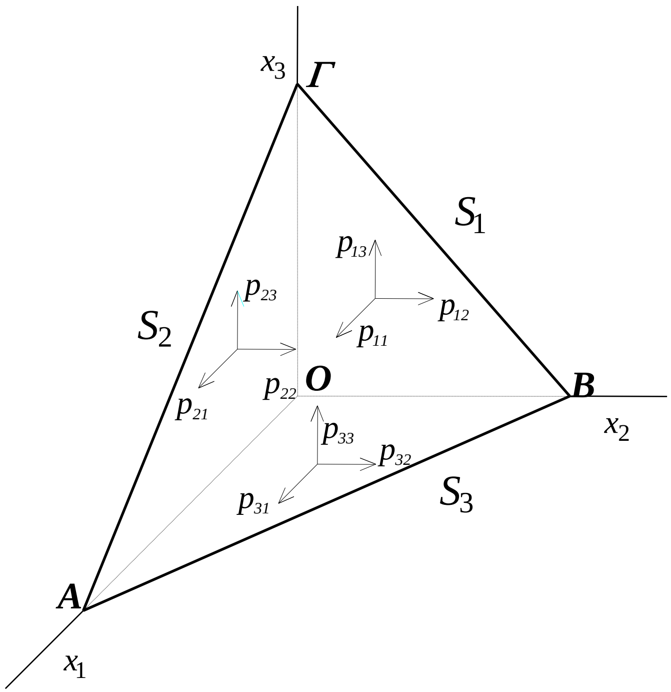
Πλήρης περιγραφή $\Rightarrow$ καθορισμός συνιστωσών ως προς κάθε επίπεδο που περνά από το O

$$\left.\begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{3 comp.} & \text{3 comp.} & \text{3 comp.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ καθορίζεται από 9 συνιστώσες

<u>τανυστής 2ης τάξης</u> (3^2 comp.)

ΤΑΣΗ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΦΥΣΙΚΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ-2



$Ox_1 \perp Ox_2 \perp Ox$, δx_1=ΟΑ, δx_2=ΟΒ, δx_3=ΟΓ

Τετράεδρο ΟΑΒΓ σε στατική ισορροπία υπό επίδραση ροπών και δυνάμεων από την ύλη που το περιβάλλει

$$A\nu : \delta V_{\mathrm{OAB\Gamma}} \to 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \delta x_1 \to 0 \\ \delta x_2 \to 0 \\ \delta x_3 \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\text{Συνιστώσα δύναμης}}{\text{Εμβαδόν S}} =$$

$$= \text{συνιστώσα τάσης στο σημείο O}$$

Συμβολισμός : $\mathbf{p_{ij}}$

i : άξονας κάθετος στο επίπεδο που ασκείται η συνιστώσα τάσης

j : άξονας παράλληλος προς τη συνιστώσα τάσης

9 συνιστώσες τάσης : $\mathbf{p_{11}, p_{22}, p_{33}}$ = ***κάθετες*** συνιστώσες τάσης

$\mathbf{p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{23}, p_{31}, p_{32}}$ = ***διατμητικές*** συνιστώσες τάσης

ΤΑΣΗ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΦΥΣΙΚΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ-3

Κάθετη συνιστώσα τάσης με φορά προς το :

εσωτερικό του χώρου = τάση συμπίεσης (+)
εξωτερικό του χώρου = τάση εφελκυσμού (-)

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Στοιχεία διαγωνίου = ***κάθετες συνιστώσες τάσης*** **(p_{ij}, i = j)**

Άλλα στοιχεία = ***διατμητικές συνιστώσες τάσης*** **(p_{ij}, i ≠ j)**

ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

1. **Συνισταμένες δυνάμεις παράλληλες στους Ox_1, Ox_2, Ox_3 ίσες με 0.** $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Δίνεται δυνατότητα υπολογισμού τριών συνιστωσών τάσης που ασκούνται στο ΑΒΓ επίπεδο και είναι παράλληλες προς Ox_1, Ox_2, Ox_3 ως συνάρτηση των p_{ij}.

2. **Τρεις συνισταμένες ροπές ως προς Ox_1, Ox_2, Ox_3 είναι ίσες με 0 (αρχή διατήρησης στροφορμής).**

Εφαρμογή σε στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο με κορυφή το Ο $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p_{12} = p_{21}\ ,\ p_{13} = p_{31}\ ,\ p_{23} = p_{32}} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ***ΤΑΣΗ = ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΑΝΥΣΤΗΣ***

<u>Άρα πόσες συνιστώσες τάσης απαιτούνται για την περιγραφή του τανυστή τάσης;</u>

ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ-1

Η τάση σε σημείο στερεού σώματος περιγράφεται από ένα τετραγωνικό πίνακα 3x3

$$p_{ij} = \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα υπάρχει ένας αριθμός $\boldsymbol{\lambda}$ και ένα διάνυσμα $\vec{\mathrm{u}}$ που επαληθεύουν τη σχέση:

$$\mathbf{P}\vec{\mathrm{u}} = \lambda\vec{\mathrm{u}} \Rightarrow \mathbf{P}\vec{\mathrm{u}}\text{-}\lambda\vec{\mathrm{u}}=0 \Rightarrow \mathbf{P}\vec{\mathrm{u}}\text{-}\lambda\mathbf{I}\vec{\mathrm{u}}=0 \Rightarrow (\mathbf{P}\text{-}\lambda\boldsymbol{\delta})\vec{\mathrm{u}}=0$$

όπου, **I** μοναδιαίος πίνακας και **δ** ο γνωστός τανυστής Kronecker που αποτελεί μοναδιαίο πίνακα 3x3 (*για* $i=j$ $\delta_{ij}=1$ *, για* $i \neq j$ $\delta_{ij}=0$)

$\vec{\mathrm{u}}$ …… ***ιδιοδιάνυσμα* (eigenvector) του P**

λ …… ***ιδιοτιμή* (eigenvalue) του P**

ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ-2

Ένα ομογενές σύστημα της μορφής $A\vec{u} = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις όταν η ορίζουσα του **A** είναι ίση με μηδέν, επομένως αφού $(\mathbf{P}\text{-}\lambda\delta)\vec{u}=0$ θα ισχύει ότι:

$$\left|A\right| = \left|\mathbf{P}\text{-}\lambda\boldsymbol{\delta}\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_{11}-\lambda & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22}-\lambda & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (P_{11}\text{-}\lambda)\cdot\left[\left(P_{22}-\lambda\right)\left(P_{33}-\lambda\right)-P_{23}P_{32}\right]+P_{12}\cdot\left[P_{23}P_{31}-P_{21}\left(P_{33}-\lambda\right)\right]+$$
$$+P_{13}\cdot\left[P_{21}P_{32}-P_{31}\left(P_{22}-\lambda\right)\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{11}P_{22}P_{33}-\lambda P_{22}P_{33}-\lambda P_{11}P_{33}+\lambda^2P_{33}-\lambda P_{11}P_{22}+\lambda^2P_{22}-$$
$$-P_{11}P_{23}P_{32}+\lambda P_{23}P_{32}+\lambda^2P_{11}-\lambda^3+P_{12}P_{23}P_{31}-P_{12}P_{21}P_{33}+$$
$$+\lambda P_{12}P_{21}+P_{13}P_{21}P_{32}-P_{13}P_{31}P_{22}+\lambda P_{13}P_{31}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\alpha\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta o\upsilon\mu\epsilon\ \epsilon\pi\acute{\iota}\ -1)\Rightarrow$$

ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΙΜΕΣ-3

$$\Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 \left(P_{11} + P_{22} + P_{33}\right) + \lambda\left(P_{22}P_{33} + P_{11}P_{33} + P_{11}P_{22} - P_{23}P_{32} - P_{12}P_{21} - P_{13}P_{31}\right) -$$

$$-\left(P_{11}P_{22}P_{33} - P_{11}P_{23}P_{32} + P_{12}P_{23}P_{31} - P_{12}P_{21}P_{33} + P_{13}P_{21}P_{32} - P_{13}P_{31}P_{22}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$I_1 = P_{11} + P_{22} + P_{33}$$

$$I_2 = P_{22}P_{33} + P_{11}P_{33} + P_{11}P_{22} - P_{23}P_{32} - P_{12}P_{21} - P_{13}P_{31}$$

$$I_3 = P_{11}P_{22}P_{33} - P_{11}P_{23}P_{32} + P_{12}P_{23}P_{31} - P_{12}P_{21}P_{33} + P_{13}P_{21}P_{32} - P_{13}P_{31}P_{22}$$

$$\boxed{\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-1

- α) Τιμές
- β) Κατευθύνοντα Συνημίτονα ως προς τυχαίο σύστημα αξόνων

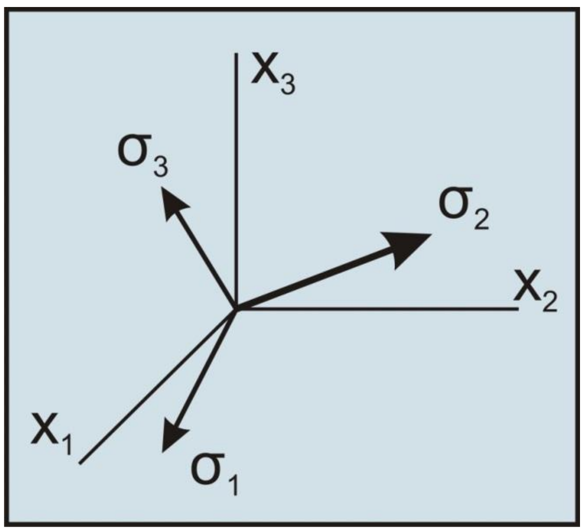
ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-2

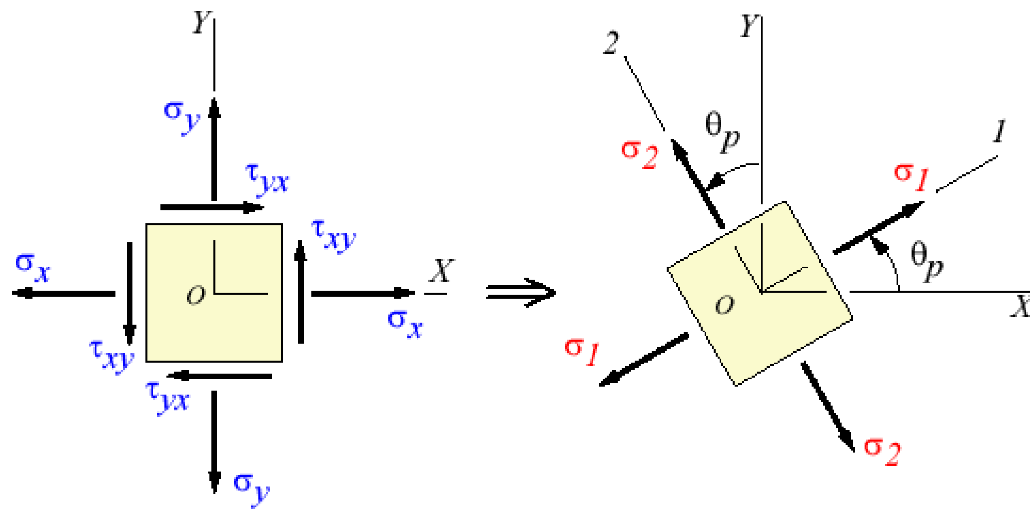
Οι τάσεις που ασκούνται σε τυχόν επίπεδο που περνά από σημείο ελαστικού σώματος εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του επιπέδου.

Υπάρχουν τρία κάθετα επίπεδα όπου οι διατμητικές τάσεις είναι όλες ίσες με μηδέν οπότε ασκούνται μόνο κάθετες τάσεις.

Κύριες (κάθετες) συνιστώσες τάσης :

μέγιστη ($\boldsymbol{\sigma_1}$), μέση ($\boldsymbol{\sigma_2}$), ελάχιστη ($\boldsymbol{\sigma_3}$)





$$\left(p_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right)n_j=0\Rightarrow\left|p_{ij}-\delta_{ij}\sigma\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{21} & p_{22} & p_{23}\\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & \sigma\end{vmatrix}=0$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-3

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} p_{11}-\sigma & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_{11}-\sigma)\begin{vmatrix} p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} - p_{12}\begin{vmatrix} p_{21} & p_{23} \\ p_{31} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} + p_{13}\begin{vmatrix} p_{21} & p_{22}-\sigma \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$p_{12} = p_{21}$
$p_{23} = p_{32}$
$p_{31} = p_{13}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ I_2 = p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 \\ I_3 = p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{11}p_{23}^2 - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \ldots (\max) \\ \sigma_2 = \ldots \\ \sigma_3 = \ldots (\min) \end{cases}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-4

Άρα ο τανυστής τάσης ως προς τους κύριους άξονες τάσης ορίζεται από τον πίνακα:

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-5

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow$$

Λύσεις είναι οι $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$. Από τις ιδιότητες εξισώσεων 3ου βαθμού είναι γνωστό ότι:

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \textit{Είναι ακόμα γνωστό οτι}: \\ I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = p_{11} + p_{22} + p_{33}$$

Επειδή $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}$ είναι σταθερές ποσότητες προκύπτει ότι και το άθροισμα:

$$\mathbf{p_{11}+p_{22}+p_{33}}$$

είναι επίσης **<u>σταθερή ποσότητα</u>** που χαρακτηρίζει κάθε σημείο φυσικού σώματος, **<u>ανεξαρτήτως προσανατολισμού του συστήματος συντεταγμένων</u>** που χρησιμοποιείται

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-6

Κατευθύνοντα συνημίτονα της $\boldsymbol{\sigma_1}$ ως προς ένα τυχαίο σύστημα αξόνων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες τάσης της $\boldsymbol{p_{ij}}$:

$$\left.\begin{aligned}
M_{11} &= \begin{vmatrix} p_{22}-\sigma_1 & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma_1 \end{vmatrix} = (p_{22}-\sigma_1)(p_{33}-\sigma_1) - p_{23}^2 \\
M_{12} &= \begin{vmatrix} p_{23} & p_{21} \\ p_{33}-\sigma_1 & p_{31} \end{vmatrix} = p_{23}p_{31} - p_{21}(p_{33}-\sigma_1) \\
M_{13} &= \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22}-\sigma_1 \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = p_{21}p_{32} - p_{31}(p_{22}-\sigma_1) \\
M_1 &= \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu\theta_{11} &= \frac{M_{11}}{M_1} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{12} &= \frac{M_{12}}{M_1} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{13} &= \frac{M_{13}}{M_1}
\end{aligned}\right\}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-7

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\sigma & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} p_{22}-\sigma_1 & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma_1 \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} p_{23} & p_{21} \\ p_{33}-\sigma_1 & p_{31} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} p_{21} & p_{22}-\sigma_1 \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-8

Κατευθύνοντα συνημίτονα της $\boldsymbol{\sigma_2}$ ως προς ένα τυχαίο σύστημα αξόνων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες τάσης της $\boldsymbol{p_{ij}}$:

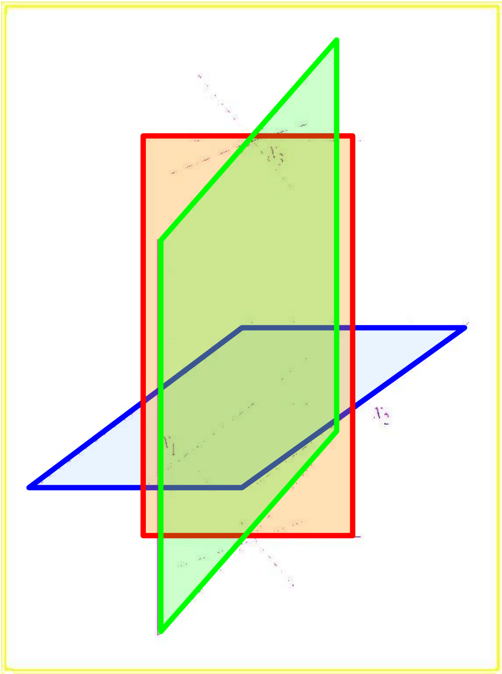
$$\left.\begin{array}{l}
M_{22} = \begin{vmatrix} p_{13} & p_{11}-\sigma_2 \\ p_{33}-\sigma_2 & p_{31} \end{vmatrix} = p_{13}^2 - (p_{11}-\sigma_2)(p_{33}-\sigma_2) \\[2ex]
M_{21} = \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{32} & p_{33}-\sigma_2 \end{vmatrix} = p_{12}(p_{33}-\sigma_2) - p_{13}p_{32} \\[2ex]
M_{23} = \begin{vmatrix} p_{11}-\sigma_2 & p_{12} \\ p_{31} & p_{32} \end{vmatrix} = p_{32}(p_{11}-\sigma_2) - p_{12}p_{31} \\[2ex]
M_2 = \sqrt{M_{21}^2 + M_{22}^2 + M_{23}^2}
\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l}
\sigma\upsilon\nu\theta_{22} = \dfrac{M_{22}}{M_2} \\[2ex]
\sigma\upsilon\nu\theta_{21} = \dfrac{M_{21}}{M_2} \\[2ex]
\sigma\upsilon\nu\theta_{23} = \dfrac{M_{23}}{M_2}
\end{array}\right\}$$

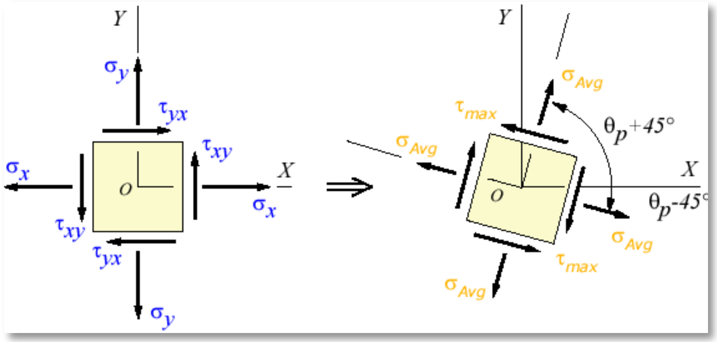
ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-9

Κατευθύνοντα συνημίτονα της $\boldsymbol{\sigma_3}$ ως προς ένα τυχαίο σύστημα αξόνων ως προς το οποίο θεωρούμε τις συνιστώσες τάσης της $\boldsymbol{p_{ij}}$:

$$\left.\begin{aligned}
M_{33} &= \begin{vmatrix} p_{11}-\sigma_3 & p_{12} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma_3 \end{vmatrix} = (p_{11}-\sigma_3)(p_{22}-\sigma_3) - p_{12}^2 \\
M_{31} &= \begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{22}-\sigma_3 & p_{23} \end{vmatrix} = p_{12}p_{23} - p_{13}(p_{22}-\sigma_3) \\
M_{32} &= \begin{vmatrix} p_{13} & p_{11}-\sigma_3 \\ p_{23} & p_{21} \end{vmatrix} = p_{13}p_{21} - p_{23}(p_{11}-\sigma_3) \\
M_3 &= \sqrt{M_{31}^2 + M_{32}^2 + M_{33}^2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu\theta_{31} &= \frac{M_{31}}{M_3} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{32} &= \frac{M_{32}}{M_3} \\
\sigma\upsilon\nu\theta_{33} &= \frac{M_{33}}{M_3}
\end{aligned}\right\}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-10





3 ζεύγη επιπέδων διχοτομούν τις γωνίες των 3 κυρίων επιπέδων τάσης

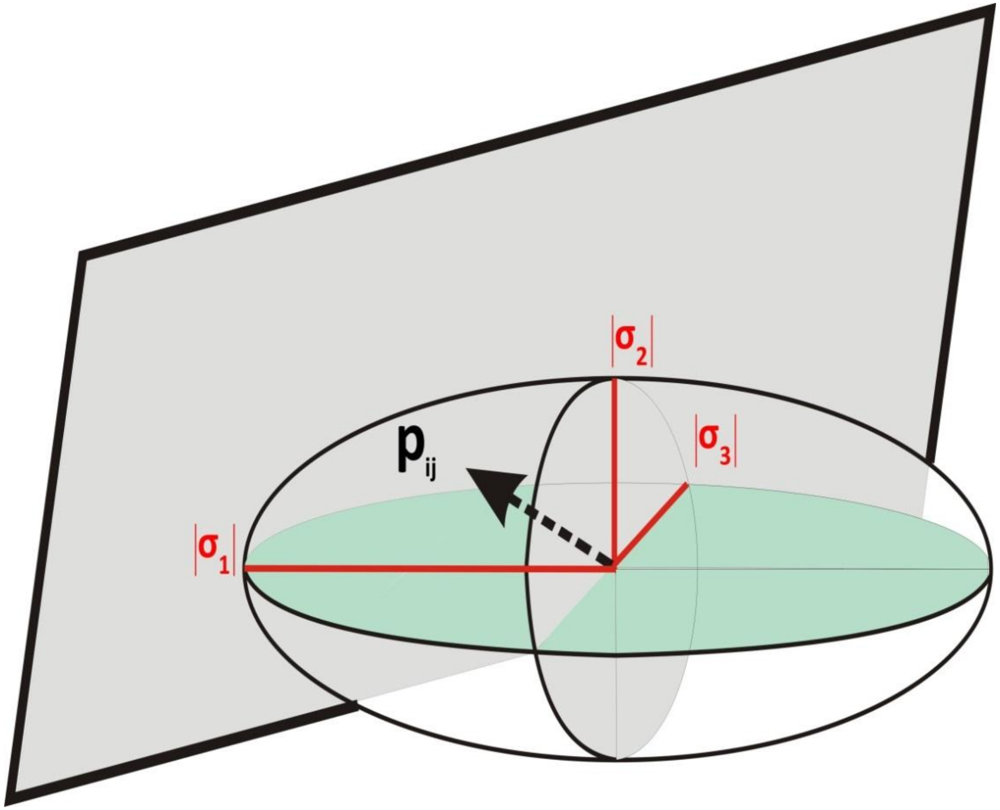
$$\Downarrow$$

Σε αυτά οι διατμητικές τάσεις παίρνουν τις ακραίες τιμές τους = ***κύριες διατμητικές τάσεις*** :

$$\tau_{1/2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \tau_{2/3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_{3/1} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \sigma_{2/3} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, \sigma_{3/1} = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ ΤΑΣΗΣ-11



Κατανομή τάσεων σε σημείο σώματος

Ελλειψοειδές του Lamé

Το διάνυσμα τάσης (p_{ij}) που ασκείται στο επίπεδο ορίζεται από την απόσταση του κέντρου του ελλειψοειδούς από το σημείο επαφής του επιπέδου με το ελλειψοειδές.

Οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς έχουν μήκη που αντιστοιχούν στα μέτρα των τριών κύριων συνιστωσών τάσης, σ_1, σ_2, σ_3.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΑΝΥΣΤΗ ΤΑΣΗΣ-12

Θεωρούμε την τάση ως προς τυχόν σύστημα αξόνων.

Τάση = συμμετρικός τανυστής $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}}^{\iota\sigma o\tau\rho o\pi\acute{\varepsilon}\alpha\varsigma} + \overbrace{\begin{pmatrix} p_{11}-\sigma_0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma_0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma_0 \end{pmatrix}}^{\varepsilon\kappa\tau\rho o\pi\acute{\varepsilon}\alpha\varsigma}$$

$$3\sigma_0 = p_{11} + p_{22} + p_{33} \Rightarrow \sigma_0 = \frac{p_{11} + p_{22} + p_{33}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

σ_0 = Μέση κάθετη τάση

ΜΟΝΑΔΕΣ ΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΣΤΗ ΓΗ

Μονάδες τάσης = μονάδες πίεσης

CGS	1 dyn/cm^2
MKS (IS)	1 Nt/m^2
Άλλες Μονάδες	1 bar
	1 Pa (Pascal)
--	
Σχέσεις Μεταξύ Μονάδων	1 bar = 10^6 dyn/cm^2
	1 Pa = 10 dyn/cm^2
	1 Mpa = 10 bar

Λιθόσφαιρα (φλοιός + άνω μανδύας) τάση = μερικά Kbar

Πτώση τάσης (stress drop) κατά τη γένεση σεισμού = μερικά bar

Μεταβολή τάσης κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων = μερικές δεκάδες dyn/cm^2.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.1-1

Οι συνιστώσες τάσης ως προς τυχαίο σύστημα συντεταγμένων είναι: **p_{11}=2bar**, **p_{33}=-1bar**, **p_{22}=p_{23}=p_{12}=0**, **p_{13}=1bar**. Να υπολογιστούν οι $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$, $\boldsymbol{\sigma_3}$ και οι γωνίες τους με τους άξονες του συστήματος β) οι κύριες διατμητικές τάσεις $\boldsymbol{\tau_{1/2}}$, $\boldsymbol{\tau_{2/3}}$, $\boldsymbol{\tau_{3/1}}$ γ) οι κάθετες τάσεις $\boldsymbol{\sigma_{1/2}}$, $\boldsymbol{\sigma_{2/3}}$ και $\boldsymbol{\sigma_{3/1}}$ στα επίπεδα που οι $\boldsymbol{\tau}$ παίρνουν τις ακραίες τους τιμές.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ I_2 &= p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 \\ I_3 &= p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{11}p_{23}^2 - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 = 1, \quad I_2 = -3, \quad I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma^2 - \sigma - 3) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} \sigma_1 &= 2.3bar \\ \sigma_2 &= 0.0bar \\ \sigma_3 &= -1.3bar \end{aligned}\right.$$

Κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_1:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= (p_{22} - \sigma_1)(p_{33} - \sigma_1) - p_{23}^2 \\ M_{12} &= p_{23}p_{31} - p_{21}(p_{33} - \sigma_1) \\ M_{13} &= p_{21}p_{32} - p_{31}(p_{22} - \sigma_1) \\ M_1 &= \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\theta_{11} &= \frac{M_{11}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{12} &= \frac{M_{12}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{13} &= \frac{M_{13}}{M_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} & M_{11} = 7.59, \quad M_{12} = 0, \\ & M_{13} = 2.30, \quad M_1 = 7.93 \\ & \theta_{11} = 17^0, \quad \theta_{12} = 90^0, \\ & \theta_{13} = 73^0 \end{aligned}\right.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.1-2

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε τα κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_3:

$\boldsymbol{\theta_{31}=73^0,\ \theta_{32}=90^0,\ \theta_{33}=163^0}$

Κύριες διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{1/2}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=1.15\,bar \quad \tau_{2/3}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}=0.65\,bar \quad \tau_{3/1}=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}=-1.80\,bar$$

Κάθετες τάσεις:

$$\sigma_{1/2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=1.15\,bar, \quad \sigma_{2/3}=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}=-0.65\,bar, \quad \sigma_{3/1}=\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}=0.50\,bar$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.1-3

Οι συνιστώσες τάσης ως προς τυχαίο σύστημα συντεταγμένων είναι: p_{11}=5bar, p_{22}=-3bar, p_{12}=4bar, p_{33}=p_{13}=p_{23}=0. Να υπολογιστούν οι σ_1, σ_2, σ_3 και οι γωνίες τους με τους άξονες του συστήματος β) οι κύριες διατμητικές τάσεις $\tau_{1/2}$, $\tau_{2/3}$, $\tau_{3/1}$ γ) οι κάθετες τάσεις $\sigma_{1/2}$, $\sigma_{2/3}$, $\sigma_{3/1}$ στα επίπεδα που που διχοτομούν τις γωνίες των επιπέδων των κύριων αξόνων τάσης.

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= p_{11} + p_{22} + p_{33} \\ I_2 &= p_{11}p_{22} + p_{22}p_{33} + p_{33}p_{11} - p_{23}^2 - p_{31}^2 - p_{12}^2 \\ I_3 &= p_{11}p_{22}p_{33} + 2p_{12}p_{23}p_{31} - p_{11}p_{23}^2 - p_{22}p_{31}^2 - p_{33}p_{12}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_1 = 2, \quad I_2 = -31, \quad I_3 = 0$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \Rightarrow \sigma(\sigma^2 - 2\sigma - 31) = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} \sigma_1 &= 6.66\,bar \\ \sigma_2 &= 0.00\,bar \\ \sigma_3 &= -4.66\,bar \end{aligned}\right.$$

Κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_1:

$$\left.\begin{aligned} M_{11} &= (p_{22} - \sigma_1)(p_{33} - \sigma_1) - p_{23}^2 \\ M_{12} &= p_{23}p_{31} - p_{21}(p_{33} - \sigma_1) \\ M_{13} &= p_{21}p_{32} - p_{31}(p_{22} - \sigma_1) \\ M_1 &= \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{13}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\theta_{11} &= \frac{M_{11}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{12} &= \frac{M_{12}}{M_1} \\ \sigma\upsilon\nu\theta_{13} &= \frac{M_{13}}{M_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\langle \begin{aligned} & M_{11} = 64.29, \quad M_{12} = 26.63, \\ & M_{13} = 0, \quad M_1 = 69.58 \\ & \theta_{11} = 23^0, \quad \theta_{12} = 67^0, \\ & \theta_{13} = 90^0 \end{aligned}\right.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.1-4

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε τα κατευθύνοντα συνημίτονα της σ_3:

$\boldsymbol{\theta_{31}=67^0,\ \theta_{32}=23^0,\ \theta_{33}=90^0}$

Κύριες διατμητικές τάσεις:

$$\tau_{1/2}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=3.33bar \quad \tau_{2/3}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}=2.33bar \quad \tau_{3/1}=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}=-5.66bar$$

Κάθετες τάσεις:

$$\sigma_{1/2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=3.33bar, \quad \sigma_{2/3}=\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}=-2.33bar, \quad \sigma_{3/1}=\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}=1.00bar$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2-1

Οι συνιστώσες τάσης ως προς τυχαίο σύστημα συντεταγμένων είναι: $p_{11}=5bar$, $p_{22}=-3bar$, $p_{12}=4bar$, $p_{33}=p_{13}=p_{23}=0$. Οι κύριες συνιστώσες τάσης είναι: $\sigma_1=6.67bar$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-4.67bar$ Να παρασταθεί η τάση υπό μορφή μητρών ως προς το Oxyz και ως προς το σύστημα των κύριων αξόνων τάσης. Να βρεθεί το ίχνος της και η μέση κάθετη τάση. Να αναλυθεί σε ένα ισοτροπέα και ένα εκτροπέα ως προς τα δύο συστήματα αξόνων.

Ως προς τυχόν σύστημα αξόνων:
$$p_{ij}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ως προς προς σύστημα κύριων αξόνων:
$$\sigma_i=\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.67 \end{pmatrix}$$

Ίχνος $p_{kk} = p_{11} + p_{22} + p_{33} = 2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

Μέση κάθετη τάση :
$$\sigma_0=\frac{p_{11}+p_{22}+p_{33}}{3}=0.67$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2-2

Ανάλυση ως προς τυχόν σύστημα αξόνων:

$$p_{ij}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p_{11}-\sigma_0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22}-\sigma_0 & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-\sigma_0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0.67 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4.33 & 4 & 0 \\ 4 & -3.67 & 0 \\ 0 & 0 & -0.67 \end{pmatrix}$$

Ανάλυση ως προς προς σύστημα κύριων αξόνων τάσης:

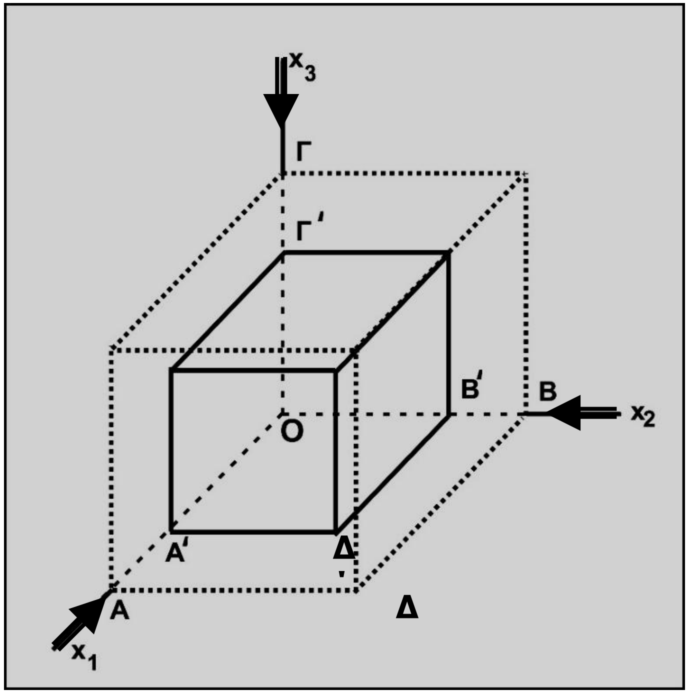
$$\sigma_i=\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4.67 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.67 & 0 & 0 \\ 0 & 0.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0.67 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6.0 & 4 & 0 \\ 4 & -0.67 & 0 \\ 0 & 0 & -5.34 \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΕ ΣΗΜΕΙΟ ΣΩΜΑΤΟΣ

Συνολική παραμόρφωση στοιχείου στη γειτονιά ενός σημείου του:

ΕΙΔΟΣ		**ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ**
(I) Μεταβολή Όγκου	⟶	**ΚΥΒΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ**
(II) Μεταβολή Σχήματος	⟶	**ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ**
(III) Περιστροφή Στοιχείου	⟶	(συνήθως αμελητέα)

ΚΥΒΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ



(Εισαγωγή στη Σεισμολογία. (Παπαζάχος, Καρακαίσης, Χατζηδημητρίου), 2005)

Αρχική κατάσταση: ΟΑ=δx_1, ΟΒ=δx_2, ΟΓ=δx_3
Θεωρούμε ότι εξωτερικές δυνάμεις προκαλούν μόνο μεταβολή του όγκου

Α ⇨ Α′ => ΑΑ′ = δu_1
Β ⇨ Β′ => ΒΒ′ = δu_2
Γ ⇨ Γ′ => ΓΓ′ = δu_3

Ονομάζουμε ***ανηγμένες επιμηκύνσεις*** κατά τις διευθύνσεις των Οx_1, Οx_2, Οx_3 τις:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{AA'}{OA} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta u_1}{\delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11},$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{BB'}{OB} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta u_2}{\delta x_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = e_{22},$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Gamma\Gamma'}{O\Gamma} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\delta u_3}{\delta x_3} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = e_{33}$$

$$e_{ii} = \begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}$$

Ο e_{ii} είναι συμμετρικός τανυστής β′ τάξης και ονομάζεται

κυβική παραμόρφωση

ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΚΥΒΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ θ

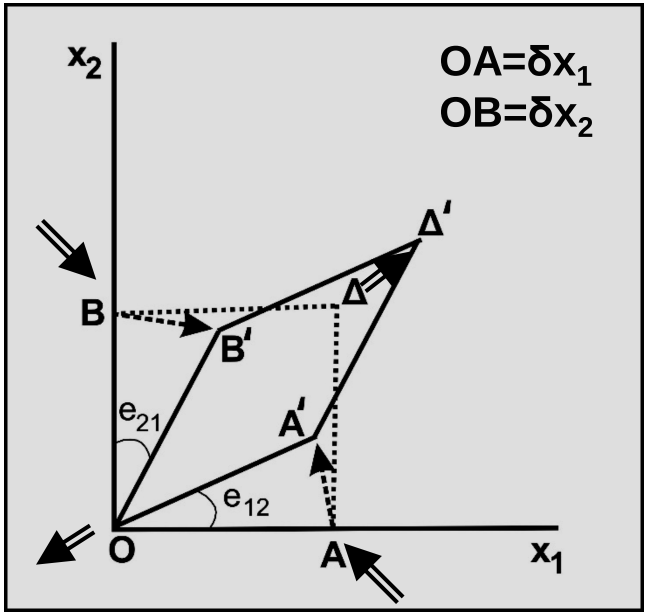
Είναι ο λόγος της μεταβολής του όγκου ενός στοιχείου προς τον αρχικό του όγκο:

$$\theta = \frac{\delta V}{V}$$

Αποδεικνύεται ότι $\theta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ (ίχνος του τανυστή κυβικής παραμόρφωσης e_{ii})

Δεν επηρεάζεται από την αλλαγή των αξόνων, άρα είναι μονόμετρο μέγεθος

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ



(Εισαγωγή στη Σεισμολογία. (Παπαζάχος, Καρακαίσης, Χατζηδημητρίου), 2005)

Θεωρούμε μεταβολή <u>μόνο του σχήματος</u> (όχι του όγκου) στο επίπεδο x_1x_2

AA΄ απειροελάχιστη => AA΄~//x_2 και AA΄ = δu_2

BB΄ απειροελάχιστη => BB΄~//x_1 και BB΄ = δu_1

$$\lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{BB'}{OB}+\frac{AA'}{OA}\right)=\lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{\delta u_1}{\delta x_2}+\frac{\delta u_2}{\delta x_1}\right)=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

$$e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\quad e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),\quad e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)$$

Οι ποσότητες $\mathbf{e_{12}=e_{21}}$, $\mathbf{e_{23}=e_{32}}$, $\mathbf{e_{13}=e_{31}}$ είναι γωνίες, ονομάζονται **γωνίες διάτμησης** και ορίζουν τις **ανηγμένες διατμητικές παραμορφώσεις** του σώματος (ως προς το σημείο Ο) που λαμβάνουν χώρα κάθετα στους άξονες Ox_3, Ox_1 και Ox_2, αντίστοιχα.

ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ e_{ij}

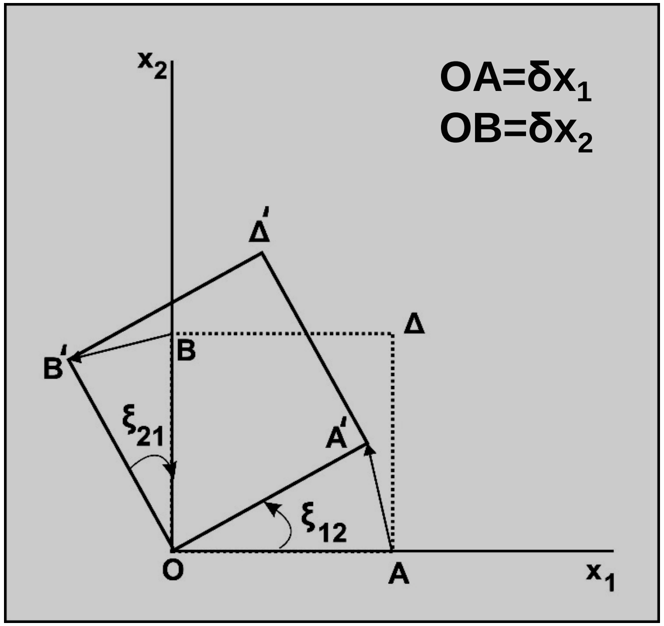
Ορίζεται από τη παρακάτω σχέση και είναι ένας συμμετρικός τανυστής β΄ τάξης με μηδενικό ίχνος (και μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου του):

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 0 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

i = άξονας πάνω στον οποίο βρίσκεται το στοιχείο που παραμορφώνεται

j = άξονας παράλληλα προς τον οποίο γίνεται η παραμόρφωση

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ-1



(Εισαγωγή στη Σεισμολογία. (Παπαζάχος, Καρακαίσης, Χατζηδημητρίου), 2005)

Εδώ θεωρούμε μόνο περιστροφή του σώματος και όχι μεταβολή του όγκου ή του σχήματος.
Εξετάζουμε τη περιστροφή του σώματος γύρω από τον άξονα Ox_3

ΑΑ' απειροελάχιστη => ΑΑ'~//x_2 και ΑΑ' = δu_2

ΒΒ' απειροελάχιστη => ΒΒ'~//x_1 και ΒΒ' = $-\delta u_1$

το (-) σημαίνει αρνητική φορά (ως προς Ox_1) του αντίστοιχου διανύσματος μετάθεσης (ΒΒ΄).

$$\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{AA'}{OA}+\frac{BB'}{OB}\right)=\lim_{\Delta V \to 0}\left(\frac{\delta u_2}{\delta x_1}-\frac{\delta u_1}{\delta x_2}\right)=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\xi_{21}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),\quad \xi_{13}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),\quad \xi_{32}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

Οι ποσότητες $\boldsymbol{\xi_{12}=-\xi_{21}}$, $\boldsymbol{\xi_{23}=-\xi_{32}}$, $\boldsymbol{\xi_{13}=-\xi_{31}}$ (αντισυμμετρικός τανυστής β΄ τάξης) ορίζουν την **περιστροφή του σώματος** που λαμβάνει χώρα γύρω από τους άξονες Ox_3, Ox_2 και Ox_1, αντίστοιχα.

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ-2

Η περιστροφή ορίζεται τελικά από τη παρακάτω σχέση και είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής β΄ τάξης με μηδενικό ίχνος (και μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου του):

$$\xi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & 0 & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ-1

Είναι ένας τανυστής β΄ τάξης που ισούται με το άθροισμα:
της κυβικής παραμόρφωσης, $\boldsymbol{e_{ii}}$, της διατμητικής παραμόρφωσης, $\boldsymbol{e_{ij}}$ και της περιστροφής $\boldsymbol{\xi_{ij}}$:

$$E_{ij} = e_{ii} + e_{ij} + \xi_{ij}$$

όπου,

$\boldsymbol{e_{ii}}$ = κυβική παραμόρφωση (συμμετρικός τανυστής με μηδενικά τα στοιχεία εκτός διαγωνίου)

$\boldsymbol{e_{ij}}$ = διατμητική παραμόρφωση (συμμετρικός τανυστής με μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου)

$\boldsymbol{\xi_{ij}}$ = κυβική παραμόρφωση (αντισυμμετρικός τανυστής με μηδενικά τα στοιχεία της διαγωνίου)

ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ-2

Οι τανυστές κυβικής και διατμητικής παραμόρφωσης μπορούν να αθροισθούν και να δώσουν ένα συμετρικό τανυστή β΄ τάξης, e_{ij}, οπότε η ολική παραμόρφωση είναι το άθροισμα ενός συμμετρικού (e_{ij}) και ενός αντισυμμετρικού τανυστή (ξ_{ij}).

Επειδή κατά τη διάδοση των σεισμικών κυμάτων η περιστροφή είναι αμελητέα (εξαιρούνται οι περιοχές κοντά στην εστία του σεισμού) μπορεί να μην συμπεριληφθεί στην ολική παραμόρφωση οπότε τελικά:

$$E_{ij} = e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

ΚΥΡΙΕΣ ΑΝΗΓΜΕΝΕΣ ΕΠΙΜΗΚΥΝΣΕΙΣ

Κατ’ αντιστοιχία με τις κύριες συνιστώσες τάσης, μπορεί να θεωρηθεί ότι υπάρχουν τρία κάθετα μεταξύ τους επίπεδα πάνω στα οποία:

1) οι <u>*διατμητικές παραμορφώσεις είναι όλες ίσες με μηδέν*</u> οπότε παρατηρούνται μόνο ανηγμένες επιμηκύνσεις, ***ε***$\boldsymbol{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3}$ (***κύριες ανηγμένες επιμηκύνσεις***) κατά μήκος των αξόνων (***κύριοι άξονες παραμόρφωσης***) που ορίζονται από τα παραπάνω επίπεδα.

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

2) Σε ισότροπα ελαστικά μέσα οι ***κύριοι άξονες παραμόρφωσης*** συμπίπτουν με τους ***κύριους άξονες τάσης.***

Γωνίες διάτμησης κατά τη διέλευση σεισμικών κυμάτων ~10^{-11}

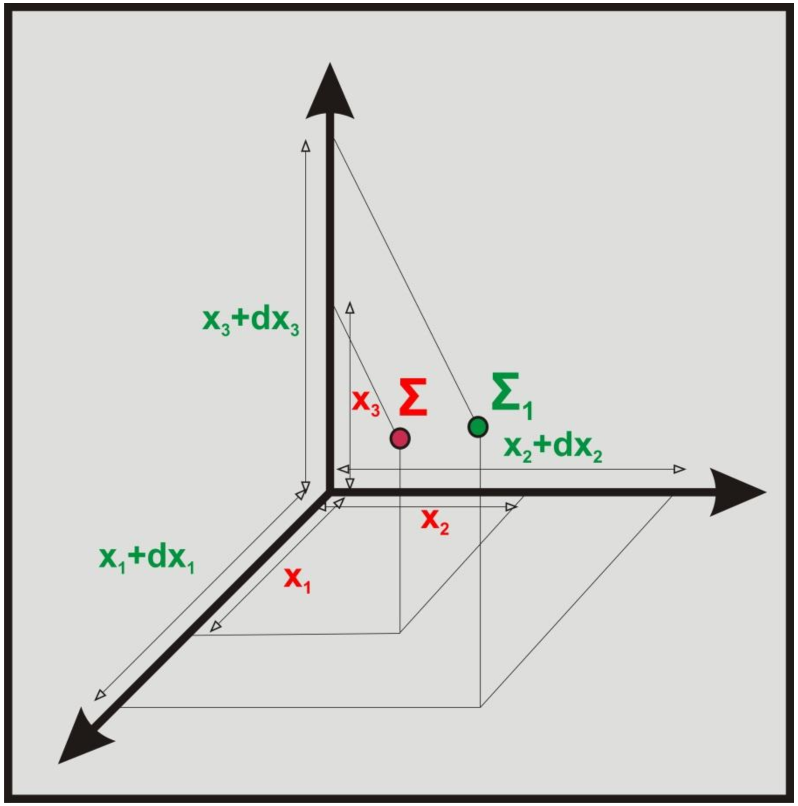
Γωνίες διάτμησης κατά τη θραύση των πετρωμάτων ~10^{-4}

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗ-1

Έστω σημεία

$\Sigma(x_1, x_2, x_3)$ και

$\Sigma_1(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, x_3+\delta x_3)$



Το σώμα παραμορφώνεται οπότε οι συνιστώσες μετάθεσης είναι:

Για το $\Sigma \longrightarrow u_1, u_2, u_3$ και

Για το $\Sigma_1 \longrightarrow u_1+\delta u_1, u_2+\delta u_2, u_3+\delta u_3$

Οι σχετικές συνιστώσες μετάθεσης $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$ του Σ_1 ως προς Σ γίνονται:

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗ-2

$$\left.\begin{aligned}\delta u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\delta x_3 \\ e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, e_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, e_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta u_1 = e_{11}\delta x_1 + e_{12}\delta x_2 + e_{13}\delta x_3$$

$$\left.\begin{aligned}\delta u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\delta x_3 \\ e_{21} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, e_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta u_2 = e_{21}\delta x_1 + e_{22}\delta x_2 + e_{23}\delta x_3$$

$$\left.\begin{aligned}\delta u_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\delta x_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\delta x_3 \\ e_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, e_{32} = \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta u_3 = e_{31}\delta x_1 + e_{32}\delta x_2 + e_{33}\delta x_3$$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΜΕΤΑΘΕΣΗ-3

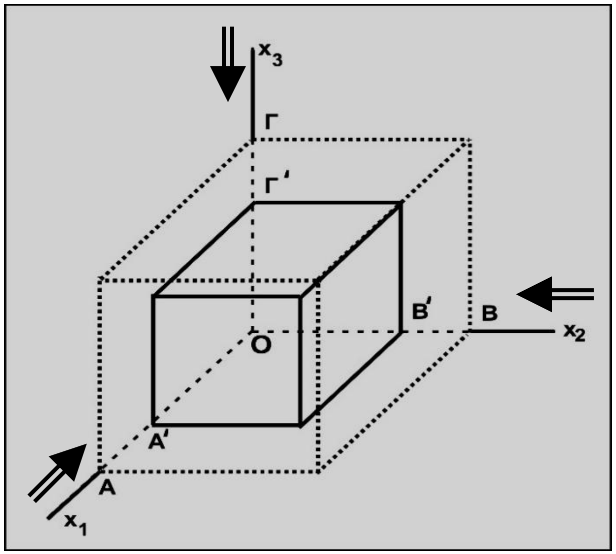
Και γενικά:

$$\delta u_i = \sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}\delta x_j$$

Επομένως είναι δυνατός ο υπολογισμός της σχετικής μετάθεσης δύο γειτονικών υλικών σημείων όταν είναι γνωστές οι <u>αρχικές τους θέσεις</u> και ο <u>τανυστής ανηγμένης παρμόρφωσης</u>

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.2-1

Να αποδειχθεί ότι α) η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση, θ, είναι $\boldsymbol{\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}}$ και β) ότι $\boldsymbol{\theta=divu_i}$.



(Εισαγωγή στη Σεισμολογία. (Παπαζάχος, Καρακαίσης, Χατζηδημητρίου), 2005)

Αρχικός όγκος: $V_0=(OA)(OB)(O\Gamma)=x_1x_2x_3$

Κυβική παραμόρφωση => $x_1 \rightarrow x_1-e_{11}x_1$, $x_2 \rightarrow x_2-e_{22}x_2$, $x_3 \rightarrow x_3-e_{33}x_3$

Τελικός όγκος: $V_1=(x_1-e_{11}x_1)(x_2-e_{22}x_2)(x_3-e_{33}x_3)=$

$=x_1x_2x_3(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33})=>$

$$\mathbf{V_1=V_0(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33})}$$

$$\theta=\frac{\delta V}{V_0}=\frac{V_0-V_1}{V_0}=\frac{V_0-V_0(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33})}{V_0}=1-(1-e_{11})(1-e_{22})(1-e_{33})\Rightarrow$$

0

$$\Rightarrow\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}-(e_{11}e_{22}+e_{22}e_{33}+e_{11}e_{33}-e_{11}e_{22}e_{33})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3.2-2

$$\left.\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} \Rightarrow \theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Rightarrow \theta = div u_i \quad (= \nabla \cdot \vec{u})$$

ΣΧΕΣΗ ΤΑΣΗΣ-ΑΝΗΓΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-1

Σε κάθε σημείο τελείως ελαστικού σώματος και για συγκεκριμένες θερμοδυναμικές συνθήκες **η ανηγμένη παραμόρφωση είναι συνάρτηση της τάσης**. Για ένα τέτοιο σώμα ισχύει ο <u>γενικευμένος νόμος του Hook</u>:

"Σε κάθε σημείο πλήρως ελαστικού σώματος η κάθε συνιστώσα τάσης είναι γραμμική συνάρτηση των εννέα (έξι) συνιστωσών της ανηγμένης παραμόρφωσης"

Έτσι ορίζονται 81 (=9x9) συντελεστές αναλογίας, $\mathbf{c_{mn}}$ **(**$\mathbf{c_{ijkl}}$**)**, που εξαρτώνται από το υλικό του σώματος και τις θερμοδυναμικές συνθήκες.

Οι συντελεστές αναλογίας, $\mathbf{c_{mn}}$, ονομάζονται *ελαστικές σταθερές* και συνθέτουν ένα τανυστή 4ης τάξης (3^4 συνιστώσες) που ονομάζεται *ελαστικός τανυστής*.

Έτσι, η κάθε συνιστώσα τάσης σε σημείο τελείως ελαστικού σώματος ορίζεται από τη γραμμική σχέση:

$$p_{11} = c_{m11} e_{11} + c_{m12} e_{12} + c_{m13} e_{13} + c_{m21} e_{21} + c_{m22} e_{22} + c_{m23} e_{23} + c_{m31} e_{31} + c_{m32} e_{32} + c_{m33} e_{33}$$

Όπου, **m=11** και **n**

ΣΧΕΣΗ ΤΑΣΗΣ-ΑΝΗΓΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-2

Ελαστικός τανυστής, 81 συνυστώσες:

$$c_{ijkl} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1112} & c_{1113} & c_{1211} & c_{1212} & c_{1213} & c_{1311} & c_{1312} & c_{1313} \\ c_{1121} & c_{1122} & c_{1123} & c_{1221} & c_{1222} & c_{1223} & c_{1321} & c_{1322} & c_{1323} \\ c_{1131} & c_{1132} & c_{1133} & c_{1231} & c_{1232} & c_{1233} & c_{1331} & c_{1332} & c_{1333} \\ c_{2111} & c_{2112} & c_{2113} & c_{2211} & c_{2212} & c_{2213} & c_{2311} & c_{2312} & c_{2313} \\ c_{2121} & c_{2122} & c_{2123} & c_{2221} & c_{2222} & c_{2223} & c_{2321} & c_{2322} & c_{2323} \\ c_{2131} & c_{2132} & c_{2133} & c_{2231} & c_{2232} & c_{2233} & c_{2331} & c_{2332} & c_{2333} \\ c_{3111} & c_{3112} & c_{3113} & c_{3211} & c_{3212} & c_{3213} & c_{3311} & c_{3312} & c_{3313} \\ c_{3121} & c_{3122} & c_{3123} & c_{3221} & c_{3222} & c_{3223} & c_{3321} & c_{3322} & c_{3323} \\ c_{3131} & c_{3132} & c_{3133} & c_{3231} & c_{3232} & c_{3233} & c_{3331} & c_{3332} & c_{3333} \end{pmatrix}$$

ΣΧΕΣΗ ΤΑΣΗΣ-ΑΝΗΓΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-3

Ο συμμετρικός ελαστικός τανυστής, $\boldsymbol{c_{ijkl}}$, συνδέει **συμμετρικά** (1) τον συμμετρικό τανυστή τάσης (2) , $\boldsymbol{p_{ij}}$, με τον συμμετρικό τανυστή παραμόρφωσης (3), $\boldsymbol{e_{kl}}$.
Δηλαδή:

$$\left.\begin{matrix} ^{(2)}\, p_{ij} = p_{ji} \\ ^{(3)}\, e_{kl} = e_{lk} \end{matrix}\right\} \Rightarrow c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk}$$

$$^{(1)}\, c_{ijkl} = c_{klij}$$

ΣΧΕΣΗ ΤΑΣΗΣ-ΑΝΗΓΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-4

Περιορισμοί:

α) Τάση & ανηγμένη παραμόρφωση συμμετρικοί τανυστές => **c_{mn}** 6x6=36 συνιστώσες

$$c_{mn} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix}$$

β) Αφού η ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης θεωρείται μονοσήμαντη συνάρτηση των συνιστωσών της ανηγμένης παραμόρφωσης (συμμετρικός τανυστής), πρέπει να ισχύει **$c_{mn}=c_{nm}$** (επίσης συμμετρικός τανυστής) οπότε οι ανεξάρτητοι συντελεστές του ελαστικού τανυστή **c_{mn}** μειώνονται στους **21**

γ) Αν το σώμα θεωρηθεί ισότροπο τότε οι γραμμικές σχέσεις που ορίζει ο νόμος του Hook δεν μεταβάλλονται με αλλαγή στο σύστημα συντεταγμένων ή στα πρόσημα, οπότε:

Οι ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές είναι μόνο δύο, οι **c_{11}** και **c_{12}**

ΣΧΕΣΗ ΤΑΣΗΣ-ΑΝΗΓΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ-5

Τελικά, για ελαστικό και ισότροπο μέσο ισχύει:

$$p_{ij} = c_{12}\theta\delta_{ij} + (c_{11} - c_{12})e_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3$$

όπου, δ_{ij} ο τανυστής Kronecker ο οποίος για $i = j \Rightarrow \delta_{ij}=1$ και για $i \neq j \Rightarrow \delta_{ij}=0$,
θ η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση.

Ως σταθερές Lamé, λ και μ, ορίζονται οι ποσότητες:

$$\lambda = c_{12}, \qquad \mu = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$$

Οπότε προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις που δίνουν τις συνιστώσες τάσης σε συνάρτηση με τις συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης και τις σταθερές Lamé :

$$p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \qquad p_{12} = 2\mu e_{12}$$

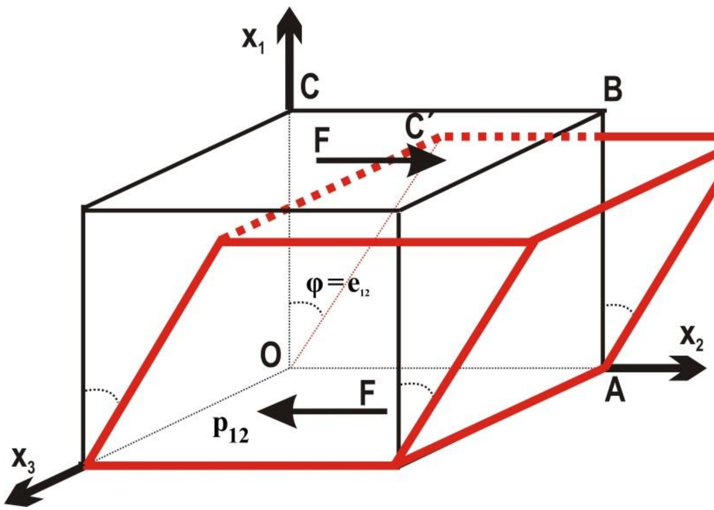
$$p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \qquad p_{23} = 2\mu e_{23}$$

$$p_{33} = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \qquad p_{31} = 2\mu e_{31}$$

ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Είναι σταθερές που περιγράφουν την ελαστική παραμόρφωση, υπολογίζονται πειραματικά και αποτελούν συναρτήσεις των σταθερών Lamé.

1. Μέτρο διατμητικής ελαστικότητας



Εξετάζουμε τη διατμητική παραμόρφωση της έδρας OABC ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου υπό την επίδραση ζεύγους δυνάμεων που ασκείται παράλληλα προς την OA.

Γωνία διάτμησης η: $\varphi = e_{12}$

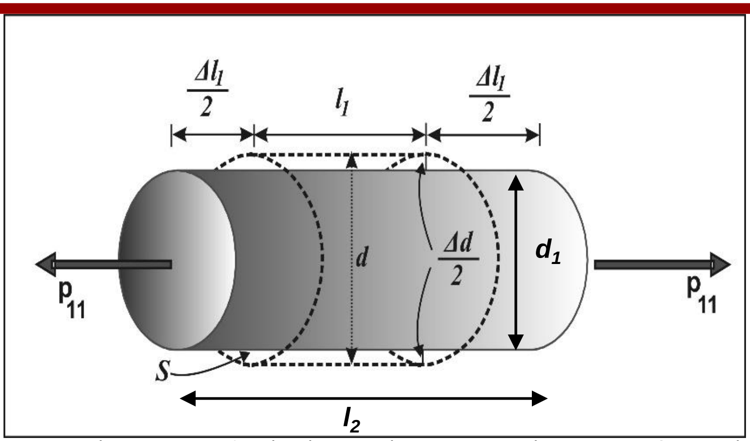
Διατμητική συνιστώσα τάσης (στις έδρες που είναι κάθετες στον Ox_1): $p_{12} = F / S$

Ονομάζουμε ***μέτρο διατμητικής ελαστικότητας ή μέτρο ακαμψίας, n***, το λόγο:

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{p_{12}}{e_{12}} \\ p_{12} = 2\mu e_{12} \end{array}\right\} \Rightarrow n = 2\mu$$

Άρα το ***n*** όπως και το ***μ*** μετρούνται σε μονάδες τάσης (πίεσης)

ΜΕΤΡΟ ΕΠΙΜΗΚΟΥΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ



(Εισαγωγή στη Σεισμολογία. (Παπαζάχος, Καρακαίσης, Χατζηδημητρίου), 2005)

Άξονας της ράβδου παράλληλος προς τον ***Ox₁***

Άσκηση δύναμης ***F*** κατά τη διεύθυνση του άξονα της ράβδου =>
Επιμήκυνση κατά ***Δl = l₂ – l₁ (= 2 *Δl/2)***

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \frac{F}{S} \\ e_{11} &= \frac{\Delta l}{l_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = \frac{p_{11}}{e_{11}}$$

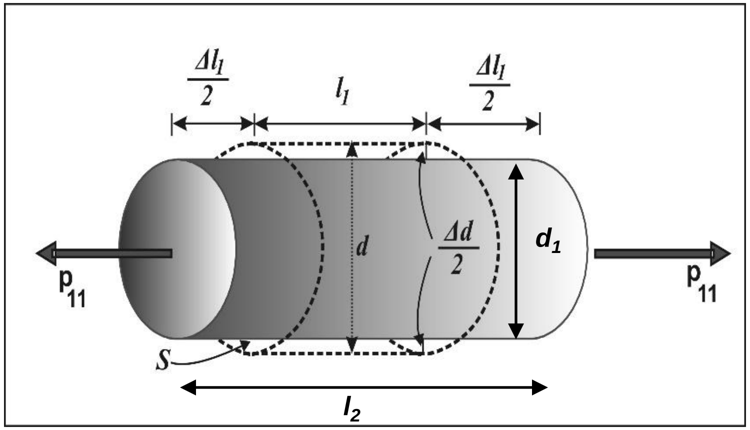
E = μέτρο επιμήκους ελαστικότητας ή μέτρο του Young
p_{11} = κάθετη τάση
e_{11} = ανηγμένη επιμήκυνση
1/E = συντελεστής ελαστικότητας

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{22} &= 0 = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ p_{33} &= 0 = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{11} &= (3\lambda + 2\mu)\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ \theta &= \frac{p_{11}}{3\lambda + 2\mu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{11} = \lambda \frac{p_{11}}{3\lambda + 2\mu} + 2\mu e_{11} \Rightarrow \frac{p_{11}}{e_{11}} = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \quad \boldsymbol{E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}}$$

(μονάδες τάσης)

ΛΟΓΟΣ POISSON



(Εισαγωγή στη Σεισμολογία. (Παπαζάχος, Καρακαίσης, Χατζηδημητρίου), 2005)

Επιμήκυνση κατά $\Delta l_1 = l_2 - l_1 = 2 *(\Delta l_1/2)$
Επιβράχυνση κατά $\Delta d = d_1 - d = -(d - d_1)$

Ανηγμένες επιμηκύνσεις:

$$e_{11} = \Delta l_1 / l_1, \quad e_{22} = - \Delta d / d$$

Λόγος Poisson: $\sigma = -\dfrac{e_{22}}{e_{11}}$

$$\left.\begin{array}{l} p_{22} = \lambda\theta + 2\mu e_{22} = 0 \\ \theta = e_{11} + e_{22} + e_{33} \\ e_{22} = e_{33} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda\left(e_{11} + 2e_{22}\right) = -2\mu e_{22} \Rightarrow \lambda e_{11} = -2\left(\lambda + \mu\right)e_{22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{e_{22}}{e_{11}} = \quad \boldsymbol{\sigma = \frac{\lambda}{2\left(\lambda + \mu\right)}}$$

Ο λόγος του Poisson είναι ***αδιάστατο μέγεθος*** και παίρνει τιμές μεταξύ *0* και *0.5*.

$\sigma=0.5$ στα υγρά ($\mu=0$)

$\sigma=0$ σημαίνει άπειρη αντίσταση στη διάτμηση ($\mu \to \infty$) .

ΜΕΤΡΟ ΚΥΒΙΚΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Αν σε στερεό σώμα ασκηθεί ***ομοιόμορφη κάθετη τάση*** τότε παρατηρείται ***μεταβολή όγκου***.

Συρρίκνωση αν ασκηθεί τάση *συμπίεσης*
Διόγκωση αν ασκηθεί τάση *εφελκυσμού*

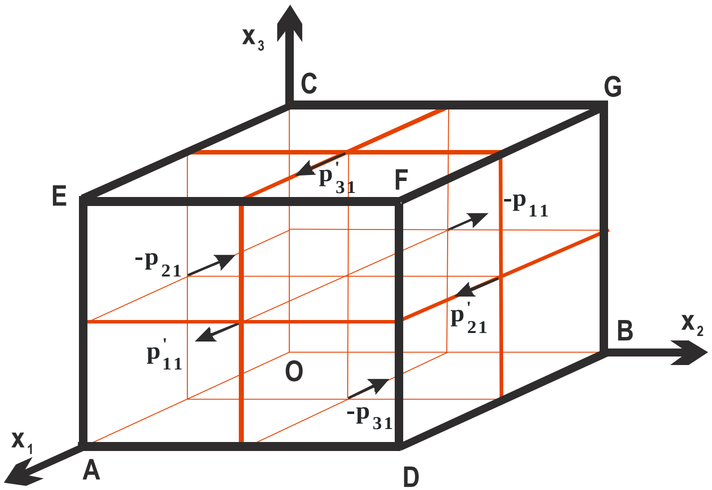
Ονομάζουμε μέτρο κυβικής ελαστικότητας την ποσότητα : $$\kappa = -\frac{p}{\theta}$$

όπου, ***p*** η ομοιόμορφη κάθετη τάση και ***θ*** η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση (η μεταβολή της κάθε μονάδας όγκου του σώματος).

$$\left.\begin{array}{l} p_{11} = -p = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{22} = -p = \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ p_{33} = -p = \lambda\theta + 2\mu e_{33} \end{array}\right\} \Rightarrow -3p = 3\lambda\theta + 2\mu\theta \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{3p}{\theta} = 3\lambda + 2\mu \\ \kappa = -\dfrac{p}{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ-1



Έστω σώμα σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με στοιχειώδη μάζα, δm, πυκνότητα ρ και πλευρές $OA=dx_1$, $OB=dx_2$, $OC=dx_3$.

Ο όγκος του θα είναι $dV= dx_1.dx_2.dx_3$
και η μάζα του $dm=\rho.dV$

Υπό την επίδραση δύναμης $\boldsymbol{F_i=dm.\gamma_i}$ κατά τη διεύθυνση $\boldsymbol{x_i}$ το σώμα μετακινείται κατά $\boldsymbol{u_1, u_2, u_3}$.

Αν θεωρήσουμε άσκηση της δύναμης κατά τη διεύθυνση $\boldsymbol{Ox_1}$ τότε: $\boldsymbol{F_1=dm.\gamma_1=}$ =άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στις 6 έδρες του παραλληλεπιπέδου:

$$p'_{11}.dx_2.dx_3, \quad -p_{11}.dx_2.dx_3, \quad p'_{21}.dx_1.dx_3, \quad -p_{21}.dx_1.dx_3, \quad -p_{31}.dx_1.dx_2, \quad p'_{31}.dx_1.dx_2$$

όπου, $$p'_{11} = p_{11} + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}dx_1, \quad p'_{21} = p_{21} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}dx_2, \quad p'_{31} = p_{31} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}dx_3$$

βαθμίδα μεταβολής της κάθε τάσης

ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ-2

Αποδεικνύεται ότι :

$$\left.\begin{array}{l} \rho\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial p_{31}}{\partial x_3} \\ \text{Και επειδή}: \\ p_{11} = \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{21} = 2\mu e_{21} \\ p_{31} = 2\mu e_{31} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1} + \mu\nabla^2 u_1}$$

Διαφορική εξίσωση κίνησης υλικών σημείων ενός ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση μιας διαταράξης κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1

ΑΣΚΗΣΗ 3.3-1

Οι συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων μέσα σ' αυτό είναι: $e_{11}=8*10^{-11}$, $e_{22}= e_{33} =5*10^{-11}$, $e_{12}= 3*10^{-11}$, $e_{12}=3*10^{-11}$, $e_{13}=e_{23}=10^{-11}$. α) Να γραφεί ο τανυστής ανηγμένης παραμόρφωσης ως μήτρα και ως άθροισμα τανυστή κυβικής και τανυστή διατμητικής παραμόρφωσης β) Να υπολογισθεί η ανηγμένη κυβική παραμόρφωση θ και γ) Να αναλυθεί ο τανυστής ανηγμένης παραμόρφωσης σε άθροισμα ενός ισοτροπέα και ενός εκτροπέα

$$e_{ij}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & e_{22} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & 0 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 8\cdot10^{-11} & 3\cdot10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot10^{-11} & 5\cdot10^{-11} & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & 5\cdot10^{-11} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8\cdot10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 5\cdot10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 5\cdot10^{-11} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3\cdot10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot10^{-11} & 0 & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}=18\cdot10^{-11}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.3-2

$$e_{ij}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \theta/3 & 0 & 0 \\ 0 & \theta/3 & 0 \\ 0 & 0 & \theta/3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} e_{11}-\theta/3 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22}-\theta/3 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33}-\theta/3 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 8\cdot10^{-11} & 3\cdot10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot10^{-11} & 5\cdot10^{-11} & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & 5\cdot10^{-11} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6\cdot10^{-11} & 0 & 0 \\ 0 & 6\cdot10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 6\cdot10^{-11} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2\cdot10^{-11} & 3\cdot10^{-11} & 10^{-11} \\ 3\cdot10^{-11} & -10^{-11} & 10^{-11} \\ 10^{-11} & 10^{-11} & -10^{-11} \end{pmatrix}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.4

Οι συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων μέσα σ’ αυτό είναι:

e_{11}=8*10^{-11}, e_{22}= e_{33} =5*10^{-11}, e_{12}= 3*10^{-11}, e_{12}=3*10^{-11}, e_{13}=e_{23}=10^{-11}.

Αν οι σταθερές Lame είναι *λ=8*10^{11}dyn/cm^2 και μ=6*10^{11}dyn/cm^2* να υπολογισθούν οι συνιστώσες τάσης.

$$\left.\begin{aligned} p_{11} &= \lambda\theta + 2\mu e_{11} \\ p_{22} &= \lambda\theta + 2\mu e_{22} \\ p_{33} &= \lambda\theta + 2\mu e_{33} \\ \theta &= e_{11} + e_{22} + e_{33} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} p_{11} &= 2.40\cdot 10^{-4}\,bar \\ p_{22} &= 2.04\cdot 10^{-4}\,bar \\ p_{33} &= 2.04\cdot 10^{-4}\,bar \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{12} &= 2\mu e_{12} \\ p_{23} &= 2\mu e_{23} \\ p_{31} &= 2\mu e_{31} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} p_{12} &= 3.60\cdot 10^{-5}\,bar \\ p_{23} &= 1.20\cdot 10^{-5}\,bar \\ p_{31} &= 1.20\cdot 10^{-5}\,bar \end{aligned}\right\}$$

(1 bar = 10^6 dyn/cm^2)

ΑΣΚΗΣΗ 3.5

Οι συνιστώσες ανηγμένης παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου κατά τη διάδοση σεισμικών κυμάτων μέσα σ’ αυτό είναι:

e_{11}=8*10^{-11}, e_{22}= e_{33} =5*10^{-11}, e_{12}= 3*10^{-11}, e_{12}=3*10^{-11}, e_{13}=e_{23}=10^{-11}.

Να υπολογισθούν το μέτρο διατμητικής ελαστικότητας, ***n***, το μέτρο επιμήκους ελαστικότητας, ***E***, ο συντελεστής ελαστικότητας, ***1/E***, ο λόγος Poisson, ***σ*** και το μέτρο κυβικής ελαστικότητας, ***κ***.

Άσκηση 3.4:

$$p_{11} = 2.40 \cdot 10^{-4}\, bar \quad p_{22} = 2.04 \cdot 10^{-4}\, bar \quad p_{33} = 2.04 \cdot 10^{-4}\, bar$$

$$p_{12} = 3.60 \cdot 10^{-5}\, bar \quad p_{23} = 1.20 \cdot 10^{-5}\, bar \quad p_{31} = 1.20 \cdot 10^{-5}\, bar$$

$$n = \frac{p_{12}}{e_{12}} = 1.2 \cdot 10^{12}\, dyn/cm^2$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \Rightarrow \mathrm{E} = 15.43 \cdot 10^{11}\, dyn/cm^2, \qquad \frac{1}{E} = 6.48 \cdot 10^{-13}\, cm^2/dyn$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \sigma = 0.29 \qquad \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \kappa = 1.2 \cdot 10^{12}\, dyn/cm^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.6

Στο βάθος των 2000 km μέσα στη γη οι σταθερές Lame έχουν τιμές ***λ=3.5*10¹²dyn/cm²*** ***και μ=2.4*10¹²dyn/cm²*** **.** Να υπολογισθούν στο βάθος αυτό:
Το μέτρο επιμήκους ελαστικότητας, ***E***, ο λόγος Poisson, ***σ*** και το μέτρο κυβικής ελαστικότητας, ***κ***

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \Rightarrow \mathrm{E} = 6.22 \cdot 10^{12}\, dyn/cm^2$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \Rightarrow \sigma = 0.30$$

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \Rightarrow \kappa = 5.1 \cdot 10^{12}\, dyn/cm^2$$

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Σκορδύλης Εμμανουήλ. «Θεωρία Μηχανικών Ταλαντώσεων και Ελαστικά Κύματα. Στοιχεία Θεωρίας Ελαστικότητας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS347/

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Βεντούζη Χρυσάνθη

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.