ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Ενότητα 11: Περιορισμοί της Αλγοριθμικής Ισχύος

Ιωάννης Μανωλόπουλος, Καθηγητής
Αναστάσιος Γούναρης, Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής ΑΠΘ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Περιορισμοί της Αλγοριθμικής Ισχύος

Κατώτερα Φράγματα, Δένδρα Απόφασης, Κλάσεις P και NP

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Κατώτερα φράγματα

Κατώτερο φράγμα: εκτίμηση της ελάχιστης εργασίας που απαιτείται για την επίλυση ενός προβλήματος.

Παραδείγματα:

- Αριθμός συγκρίσεων που απαιτείται για την έρευση του μεγαλύτερου στοιχείου σε ένα σύνολο n αριθμών.
- Αριθμός συγκρίσεων που απαιτείται για την ταξινόμηση ενός πίνακα μεγέθους n.
- Αριθμός συγκρίσεων που απαιτείται για την έρευση ενός στοιχείου σε ένα ταξινομημένα πίνακα.
- Αριθμός πράξεων πολλαπλασιασμού για τον πολλαπλασιασμό δύο n X n πινάκων.

Τύποι κατώτερων φραγμάτων

- Τα κατώτερα φράγματα μπορεί να είναι
  - Ακριβής καταμέτρηση
  - Κλάση αποδοτικότητας (Ω)

- *Σφικτά (Tight)* κατώτερα φράγματα: είναι γνωστός ένας αλγόριθμος με την ίδια αποδοτικότητα όσο το κατώτερο φράγμα.

Πρόβλημα	Κατώτερο φράγμα	Σφικτό
ταξινόμηση	$\Omega(n\log n)$	ναι
αναζήτηση σε ταξινομημένο πίνακα	$\Omega(\log n)$	ναι
μοναδικότητα στοιχείου	$\Omega(n\log n)$	ναι
πολ/μός ακεραίων με *n* ψηφία	$\Omega(n)$	άγνωστο
πολ/μός *n X n* πινάκων	$\Omega(n^2)$	άγνωστο

Μέθοδοι καθορισμού κατωτέρων φραγμάτων

- Τετριμμένα κατώτερα φράγματα.
- Επιχειρηματολογία θεωρίας πληροφοριών (δένδρα απόφασης).
- Μέθοδος αντιπαλότητας.
- Αναγωγή (reduction) προβλήματος.

Τετριμμένα Κατώτερα Φράγματα

Βασίζονται στην καταμέτρηση του αριθμού των αντικειμένων εισόδου που πρέπει να επεξεργασθούν και του αριθμού που πρέπει να παραχθούν στην έξοδο.

Παραδείγματα

- Εύρεση μεγαλύτερου στοιχείου
- Υπολογισμός πολυωνύμου
- Μοναδικότητα στοιχείου
- Ύπαρξη Χαμιλτονιανού κυκλώματος

Συμπεράσματα

- Μπορεί να είναι ή να μην είναι χρήσιμα
- Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στον καθορισμό του αριθμού σττοιχείων που οπωσδήποτε πρέπει να επεξεργασθούν.

Δένδρα απόφασης

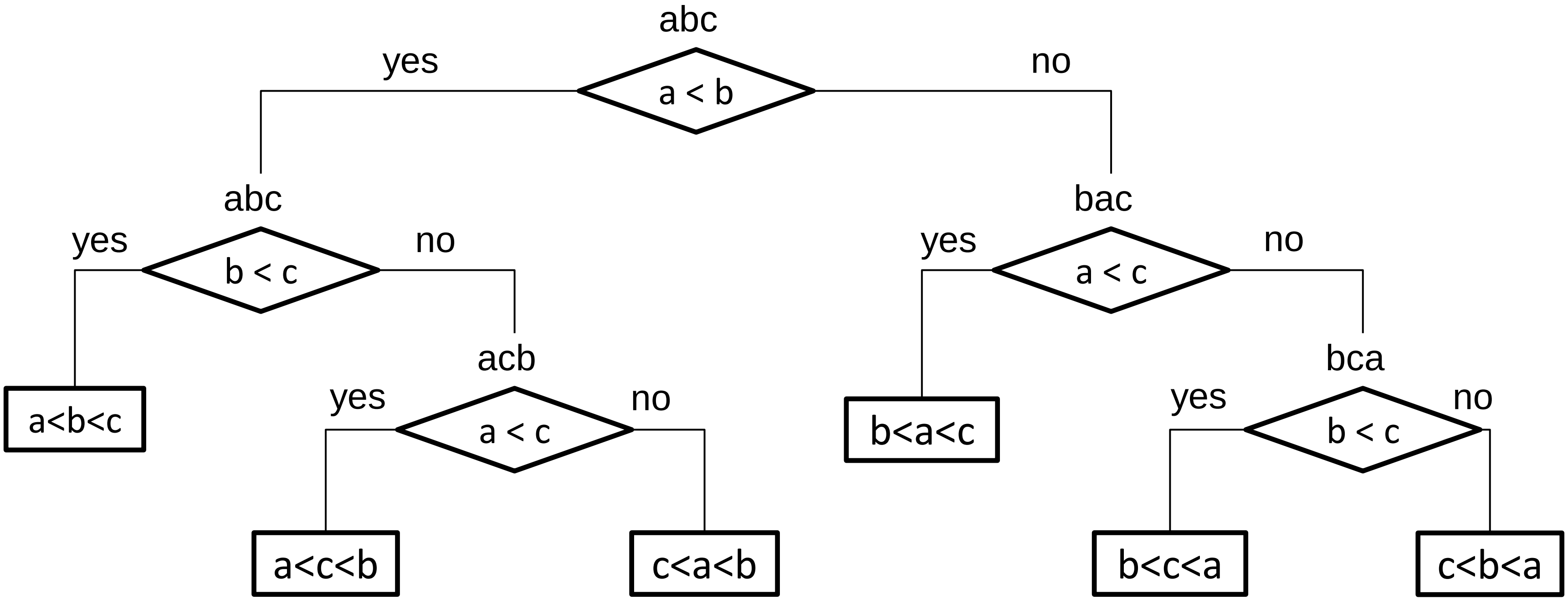
Αποτελούν ένα βολικό μοντέλο για αλγορίθμους που περιλαμβάνουν συγκρίσεις.

Στα δένδρα απόφασης:

- Οι εσωτερικοί κόμβοι αναπαριστούν συγκρίσεις,
- και τα φύλλα αποτελέσματα.

Παράδειγμα:

- Δένδρο απόφασης για ταξινόμηση επιλογής 3 στοιχείων



Δένδρα αποφάσεων και Αλγόριθμοι Ταξινόμησης

- Κάθε αλγόριθμος ταξινόμησης βασισμένος σε συγκρίσεις μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα δένδρο απόφασης.
- Ο αριθμός των φύλλων είναι τουλάχιστον όσος και ο αριθμός των πιθανών εξόδων, δηλ. $\geq n!$
- Το ύψος ενός δυαδικού δένδρου με $n!$ φύλλα είναι $\geq \lceil \log_2 n! \rceil$
- Άρα ο ελάχιστος αριθμός συγκρίσεων στην χειρότερη περίπτωση είναι $\geq \lceil \log_2 n! \rceil$ για κάθε αλγόριθμο ταξινόμησης βασισμένο σε συγκρίσεις. ($\lceil \log_2 n! \rceil \approx n \log_2 n$)
- Αυτό το κατώτερο φράγμα είναι σφικτό, π.χ. (mergesort)

Επιχειρήματα Αντιπαλότητας

- Αποτελεί μία μέθοδο απόδειξης κατωτέρων φραγμάτων παίζοντας το ρόλο ενός αντιπάλου που αναγκάζει τον αλγόριθμο να εκτελέσει τα περισσότερα βήματα, ρυθμίζοντας την είσοδο.

Παράδειγμα 1: «Μάντεψε» ένα αριθμό από το 1 ως *n* με ερωτήσεις ναι/όχι.

Αντίπαλος: Θέτει τον αριθμό στο μεγαλύτερο από τα δύο υποσύνολα που παράγονται από την τελευταία ερώτηση.

Παράδειγμα 2: Συγχώνευση δύο ταξινομημένων λιστών μεγέθους *n*

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \text{ και } b_1 < b_2 < \ldots < b_n$$

Αντίπαλος: $a_i < b_j$ αν $i < j$

Αποτέλεσμα: $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_n < a_n$ που απαιτεί $2n$-1 συγκρίσεις.

Κατώτερα φράματα με αναγωγή προβλήματος

Ιδέα: Αν ένα πρόβλημα *P* είναι τουλάχιστον όσο δύσκολο όσο το
πρόβλημα *Q* , τότε ένα κατώτερο φράγμα του *Q* είναι
κατώτερο φράγμα και για το *P.*
Οπότε βρίσκουμε ένα πρόβλημα *Q* με γνωστό κατώτερο
φράγμα που μπορεί να αναχθεί στο *P* .

Παράδειγμα:

P → εύρεση MST σε *n* σημεία του Ευκλείδιου χώρου

Q → μοναδικότητα στοιχείου ($\Omega(n\log n)$)

Κατηγοριοποίηση πολυπλοκότητας προβλήματος

«Υπάρχει κάποιος πολυωνυμικός αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος;»

Πιθανές απαντήσεις:

- ΝΑΙ
- ΟΧΙ
  - επειδή μπορεί να αποδειχθεί ότι όλοι οι αλγόριθμοι θέλουν εκθετικό χρόνο
  - επειδή μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος να επιλύσει αυτό το πρόβλημα
- ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ
- ΔΕΝ ΓΝΩΡΙΖΩ, αλλά αν εφευρισκόταν ένας τέτοιος αλγόριθμος, τότε θα δινόταν λύση και σε πολλά άλλα προβλήματα σε πολυωνυμικό χρόνο

Παραδείγματα απαιτητικών προβλημάτων

- Διαμερισμός: Δεδομένων *n* θετικών ακεραίων, να βρεθεί αν είναι δυνατό να τους διαμερίσουμε σε δυο ανεξάρτητα υποσύνολα με το ίδιο άθροισμα
- Bin packing: Δεδομένων *n* αντικειμένων με μέγεθος που είναι θετικός πραγματικός αριθμός όχι μεγαλύτερος του 1, να τοποθετηθούν στο μικρότερο αριθμό bins μεγέθους 1
- Χρωματισμός γράφου: Να βρεθεί ο χρωματικός του αριθμός δεδομένου γράφου, δηλαδή ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων που πρέπει να αποδοθούν στις κορυφές του γράφου ώστε να μην υπάρχουν δυο γειτονικές κορυφές με το ίδιο χρώμα
- Ικανοποιησιμότητα CNF: Δεδομένης λογικής πρότασης σε συζευκτική κανονική μορφή (σύζευξη διαζεύξεων εκφράσεων), υπάρχει μια απόδοση τιμών στις μεταβλητές που να καθιστά την έκφραση αληθή?

Τύποι προβλημάτων

- *Προβλήματα βελτιστοποίησης:* κατασκευάζουμε μια λύση που μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί μια αντικειμενική συνάρτηση.
- *Προβλήματα απόφασης:* απάντηση με ΝΑΙ/ΌΧΙ σε μια ερώτηση.

Πολλά προβλήματα έχουν εκδοχές και βελτιστοποίησης και απόφασης. Π.χ. το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή:

- *βελτιστοποίηση*: βρες ένα hamiltonian κύκλο ελάχιστου βάρους.
- *απόφαση*: βρες ένα hamiltonian κύκλο βάρους < *k*.

Η κλάση *P*

P: η κλάση των προβλημάτων απόφασης, τα οποία επιλύονται σε χρόνο $O(p(n))$, όπου $p(n)$ είναι ένα πολυώνυμο ως προς n

Γιατί πολυώνυμο;

- Αν ΌΧΙ, πολύ αναποτελεσματικό.
- Κομψές ιδιότητες κλεισίματος.
- Ανεξάρτητες από μηχανές.

Η κλάση *NP*

NP: η κλάση των προβλημάτων απόφασης, τα οποία επιλύονται σε πολυωνυμικό χρόνο σε μια μη-αιτιοκρατική μηχανή.

- Ένας μη-αιτιοκρατικός υπολογιστής μπορεί
  - να *μαντέψει* τη σωστή απάντηση ή λύση (τυχαιότητα)
  - και να ελέγξει την ορθότητα της λύσης σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Τα *NP* είναι μια κλάση προβλημάτων με λύσεις που είναι επιβεβαιώσιμες σε πολυωνυμικό χρόνο.

- Σημείωση: η έκφραση *NP* σημαίνει “Nondeterministic Polynomial-time”

Παράδειγμα: ικανοποιησιμότητα CNF

- Το πρόβλημα είναι *NP*. Ο μη-αιτιοκρατικός αλγόριθμος:
  - μαντεύει τη σωστή απόδοση τιμών
  - ελέγχει αν οι αποδόσεις ικανοποιούν τον τύπο CNF
- Παράδειγμα: $(A \lor \neg B \lor \neg C) \land (\neg A \lor B) \land (\neg B \lor D \lor F) \land (F \lor \neg D)$
- Αληθείς αποδόσεις:

A B C D E F

1. 0 1 1 0 1 0
2. 1 0 0 0 0 1
3. 1 1 0 0 0 1
4. ... (πόσες είναι συνολικά ?)

- Φάση ελέγχου: Θ(*n*)

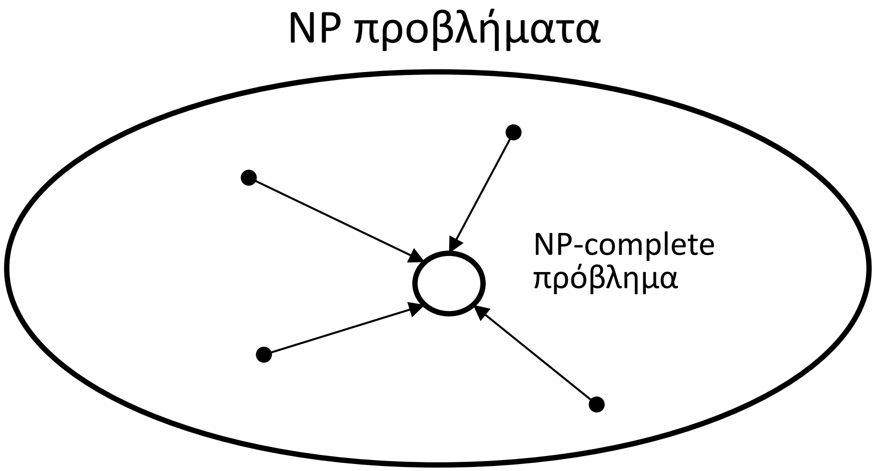
Που βρισκόμαστε τώρα ?

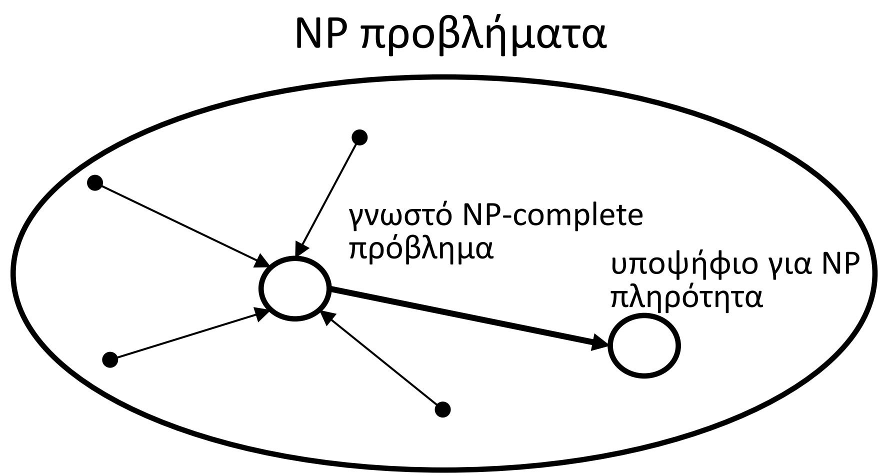
- Έχει επιδειχθεί μη-αιτιοκρατικός πολυωνυμικός αλγόριθμος για την ικανοποιησιμότητα CNF
- Το CNF-sat είναι σε *NP*.
- Παρόμοιοι αλγόριθμοι μπορούν να βρεθούν για τα προβλήματα TSP (ως πρόβλημα απόφασης), HC, Partition, κλπ αποδεικνύοντας ότι αυτά τα προβλήματα είναι επίσης σε *NP*
- Όλα τα προβλήματα σε *P* μπορούν επίσης να επιλυ-θούν με αυτόν τον τρόπο (αλλά χωρίς μαντεψιά), και συνεπώς ισχύει:
    - $P \subseteq NP$
- Η μεγάλη ερώτηση: $P = NP$?

Προβλήματα *NP*-complete

- Ένα πρόβλημα απόφασης *D* είναι *NP*-complete αν και μόνο αν
  - $D \in NP$
  - Κάθε πρόβλημα σε *NP* είναι μειώσιμο/μπορεί να αναχθεί (reducible) σε πολυωνυμικό χρόνο στο *D*
- Θεώρημα του Cook (1971): το CNF-sat είναι *NP*-complete.
- Άλλα *NP*-complete προβλήματα είναι αυτά που λαμβάνονται μέσω πολύωνυμικών μειώσεων γνωστών *NP*-complete προβλημάτων .
- Η κλάση των *NP*-complete προβλημάτων δηλώνεται με *NPC*

Προβλήματα *NP*-complete





$P = NP$?

- Αν ισχύει $P = NP$ τότε κάθε NP πρόβλημα, συμπεριλαμβανομένων και των NP-complete, θα μπορούσε να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Αρκεί να ανακαλυφθεί ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος για ένα μόλις NP-complete πρόβλημα, και τότε κάθε πρόβλημα στην κατηγορία NP θα μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο.
- Αλλά οι περισσότεροι ερευνητές πιστεύουν πως $P \neq NP$, δηλ. η κατηγορία P είναι υποσύνολο του NP.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ανδρέας Κοσματόπουλος
Θεσσαλονίκη, Αύγουστος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.