



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



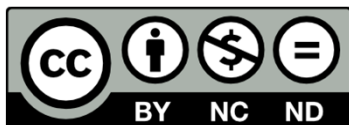
ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Ενότητα 6: Μεταβατικά φαινόμενα αγωγής

Χατζηαθανασίου Βασίλειος

Καδή Στυλιανή

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Η/Υ



Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Μεταβατικά φαινόμενα αγωγής



Περιεχόμενα ενότητας

1. Μεταβατικά φαινόμενα
2. Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας
3. Εξάρτηση θερμοκρασίας από το χώρο
4. Ψύξη ή θέρμανση άπειρης επίπεδης πλάκας
5. Διαγράμματα Heisler



Μεταβατικά φαινόμενα (1/2)

- Γενική εξίσωση αγωγής:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

- ή

$$\left(\lambda \nabla^2 T + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right)$$



Μεταβατικά φαινόμενα (2/2)

- Δύσκολη η λύση της.
- Προσέγγιση: μικρές θερμοκρασιακές διακυμάνσεις στο στερεό \longrightarrow απλή λύση.
- Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας.

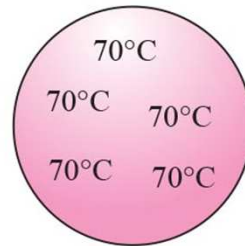


Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (1/11)

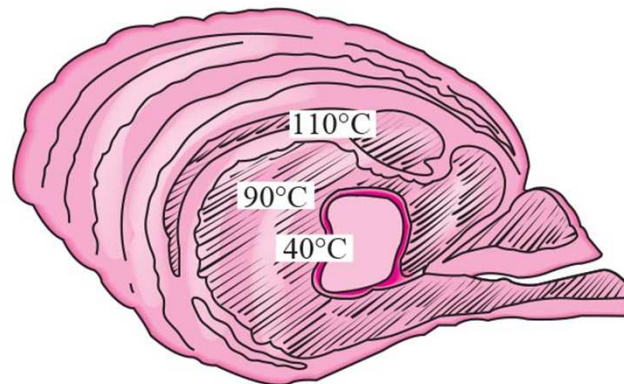
- *Υπόθεση*: η θερμοκρασία ίδια σ' όλα τα σημεία του στερεού για κάθε χρονική στιγμή.
- Για να ισχύει (από νόμο Fourier) πρέπει $\lambda \rightarrow \infty$.
- *Πρακτικά*: αντίσταση λόγω αγωγής μικρότερη από την αντίσταση μεταφοράς θερμότητας μεταξύ σώματος-περιβάλλοντος.



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (2/11)



(α) Χάλκινη σφαίρα

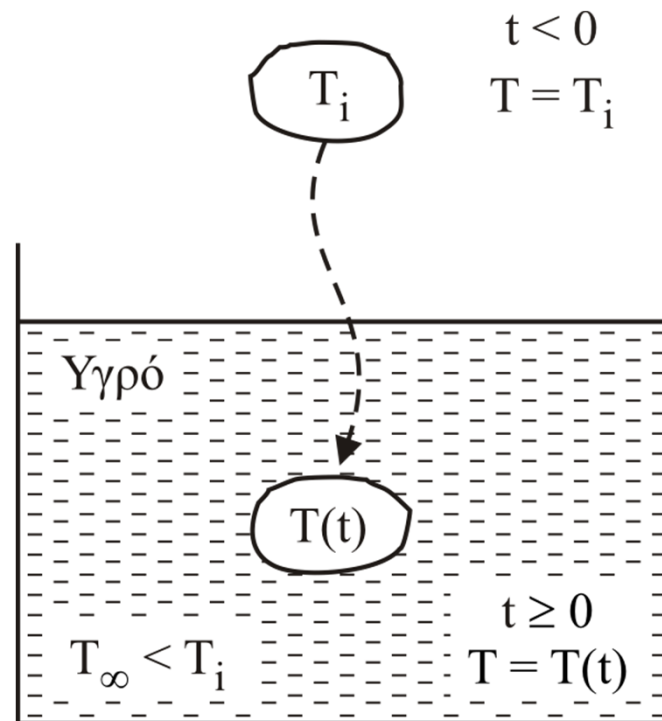


(β) Ψητό κρέας

Εικόνα 1: Μία μικρή χάλκινη μπάλα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύστημα συγκεντρωμένου όγκου κάτι που όμως δεν μπορεί να γίνει για ένα κομμάτι ψητού κρέατος



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (3/11)



Εικόνα 2: Ψύξη θερμού αντικειμένου



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (4/11)

- Αν αγνοηθούν οι θερμοκρασιακές κλίσεις στο στερεό, το πρόβλημα δεν μπορεί ν' αντιμετωπισθεί με λύση της εξίσωσης αγωγής αλλά με γενικό ενεργειακό ισοζύγιο.



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (5/11)

- Ενεργειακό ισοζύγιο

- Γενικά: $\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \frac{dE_{st}}{dt} \equiv \dot{E}_{st}$

- Εδώ: $-\dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad (1)$

- ή $-hA_s(T - T_\infty) = \rho V c_p \frac{dT}{dt} \quad (2)$



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (6/11)

- Θερμοκρασιακή διαφορά: $\theta \equiv T - T_\infty$ (3)

- οπότε: (2)
$$\frac{\rho V c_p}{h A_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$$



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (7/11)

- Ολοκλήρωση από την αρχική κατάσταση
- ($t = 0: T(0) = T_i$)

$$\frac{\rho V c_p}{h A_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt$$

- $\theta_i \equiv T_i - T_\infty$ (4)



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (8/11)

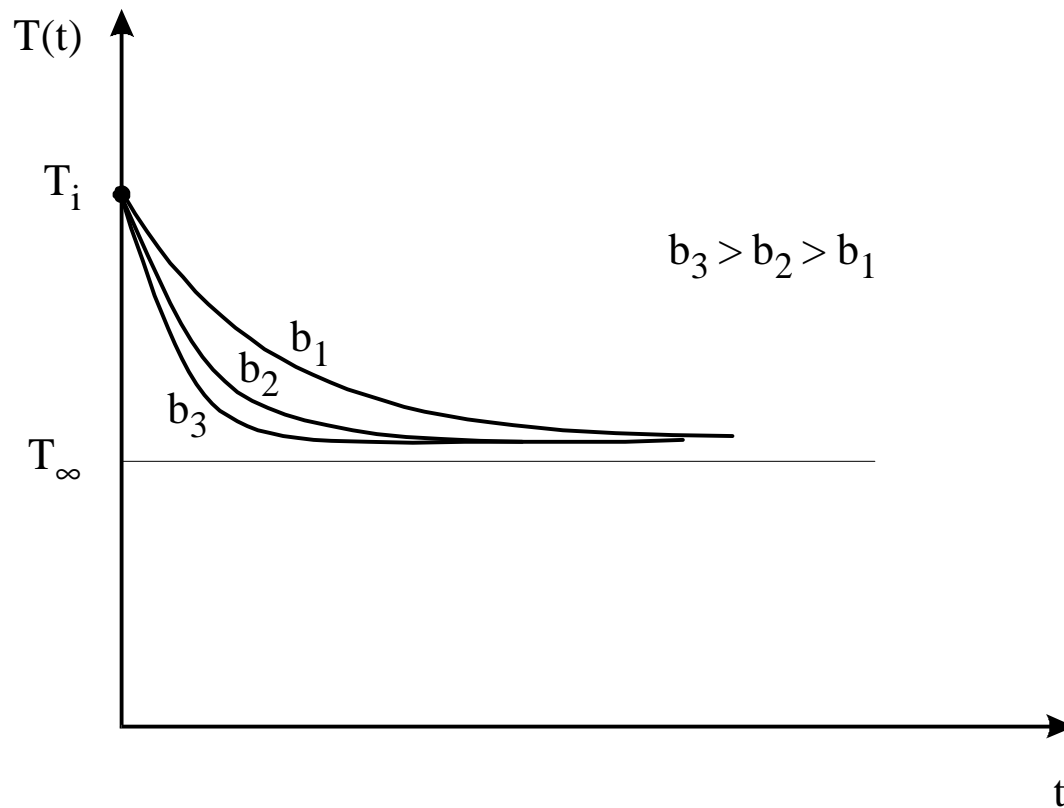
- $$\frac{\rho V c_p}{h A_s} \ln \frac{\theta_i}{\theta} = t \quad (5)$$

- ή
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp \left[- \left(\frac{h A_s}{\rho V c_p} \right) t \right] = e^{-bt} \quad (6)$$

- (5) ή (6): απαιτούμενος χρόνος για να φθάσει το σώμα σε θερμοκρασία T ή αντίστροφα.



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (9/11)

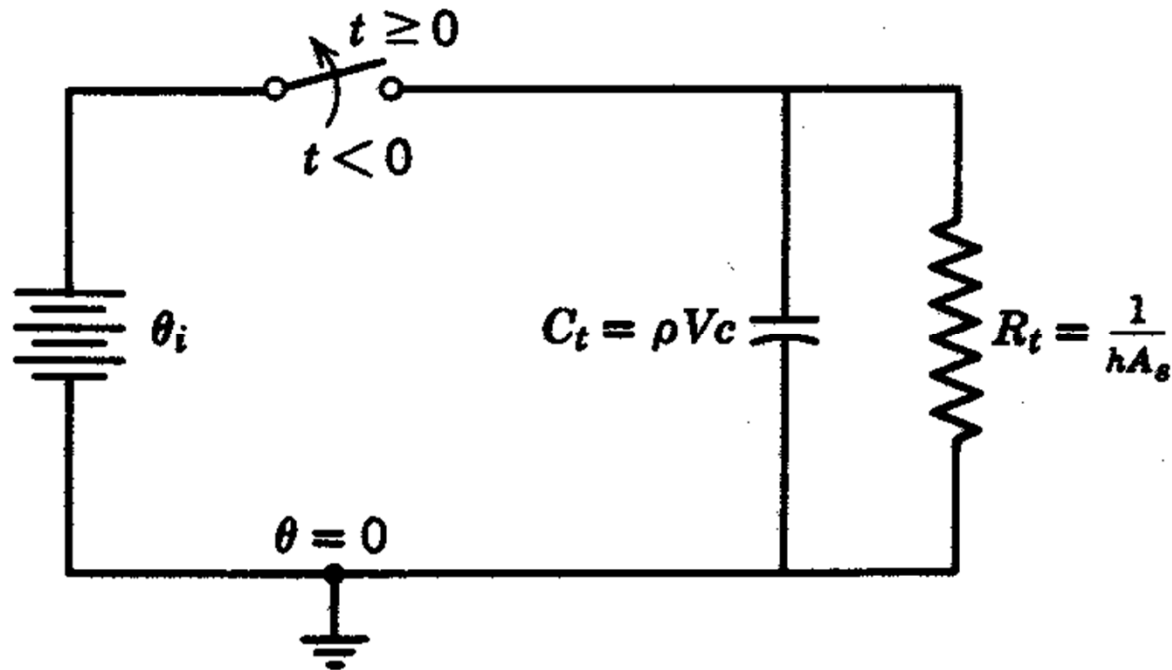


$$b = \frac{hA}{\rho V c_p}$$



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (10/11)

- Ισοδύναμο θερμικό κύκλωμα



Μέθοδος συγκεντρωμένης χωρητικότητας (11/11)

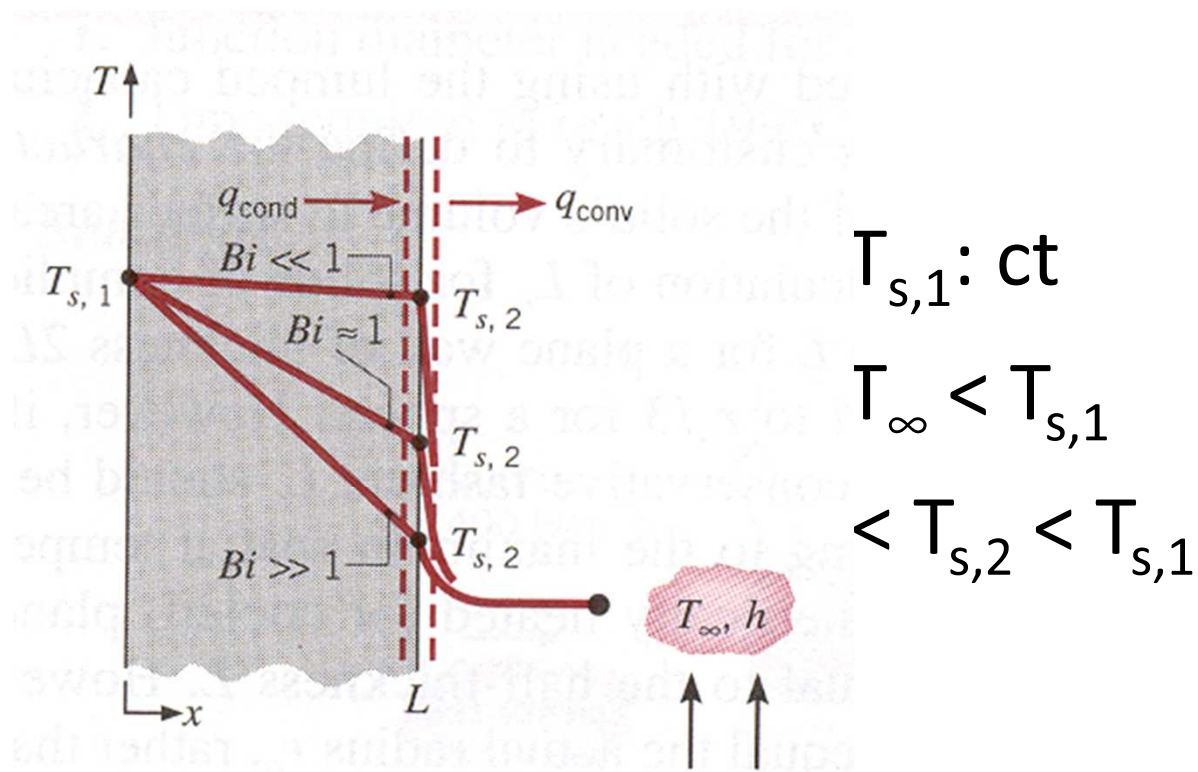
- Συνολική ενέργεια που μεταφέρεται μέχρι τη χρονική στιγμή t :

$$Q = \int_0^t q dt = hA_s \int_0^t \theta dt$$

- $$Q = (\rho V c_p) \theta_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right) \right] \quad (8)$$



Ισχύς της μεθόδου (1/9)



Εικόνα 3: Effect of Biot number on steady-state temperature distribution in a planewall with surface convection



Ισχύς της μεθόδου (2/9)

- Σταθερή κατάσταση:

$$\frac{\lambda A}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) = hA (T_{s,2} - T_{\infty})$$

- ή

$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_{\infty}} = \frac{\left(\frac{L}{\lambda A} \right)}{(1/hA)} = \frac{R_{\text{cond}}}{R_{\text{conv}}} = \frac{hL}{\lambda} \equiv B_i \quad (9)$$



Ισχύς της μεθόδου (3/9)

$$B_i \equiv \frac{hL}{\lambda} : \text{αριθμός Biot (αδιάστατος)}$$

- Μέτρο της πτώσης της θερμοκρασίας στο σώμα σε σχέση με τη θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ επιφάνειας- ρευστού.



Ισχύς της μεθόδου (4/9)

$$B_i \equiv \frac{hL}{\lambda} = \frac{(L/\lambda A)}{(1/hA)} = \frac{R_{\text{cond}}}{R_{\text{conv}}}$$

- $B_i \ll 1$: $R_{\text{cond}} \ll R_{\text{conv}}$. Άρα η υπόθεση για ομοιόμορφη κατανομή θερμοκρασίας είναι λογική.



Ισχύς της μεθόδου (5/9)

- Ισχύς της μεθόδου: υπολογισμός πρώτα του αριθμού Biot.

- Κριτήριο: $B_i = \frac{hL_c}{\lambda} < 0,1$

- $L_c \equiv \frac{V}{A_s}$: χαρακτηριστικό μήκος

- L_c : L για πλάκα 2L
- $r_o/2$ για κύλινδρο
- $r_o/3$ για σφαίρα



Ισχύς της μεθόδου (6/9)

- Αν $L_c \equiv \frac{V}{A_s}$ τότε:
- $$\frac{hA_s t}{\rho V c_p} = \frac{ht}{\rho c_p L_c} = \frac{hL_c}{\lambda} \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{t}{L_c} = \frac{hL_c}{\lambda} \frac{at}{L_c} = B_i \cdot F_o \quad (11)$$
- $$F_o \equiv \frac{at}{L_c}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (12)$$
- (11),(6)
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-B_i \cdot F_o)$$



Ισχύς της μεθόδου (7/9)

- - Αύξηση $F_o \rightarrow$ γρηγορότερη εξέλιξη του φαινομένου.
- Αύξηση F_o :
 - πάροδος χρόνου.
 - μείωση πλάτους $2L$ της πλάκας.
 - αύξηση α (δηλαδή αύξηση λ).

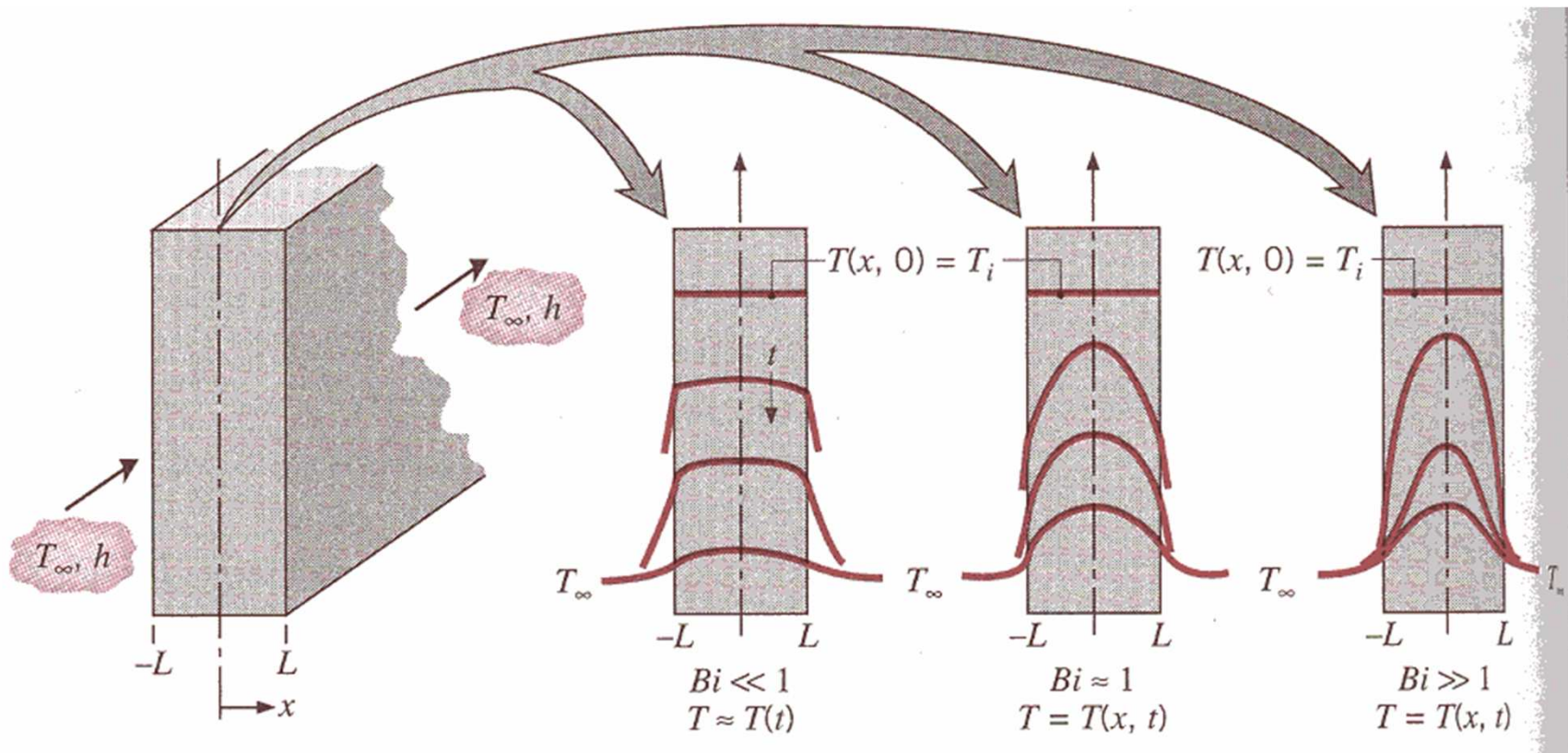


Ισχύς της μεθόδου (8/9)

- -Αύξηση $B_i \rightarrow$ γρηγορότερη εξέλιξη φαινομένου.
- - Αύξηση B_i : μικρή θερμική αντίσταση συναγωγής $1/h$ σε σύγκριση με τη θερμική αντίσταση αγωγής L/λ .



Ισχύς της μεθόδου (9/9)



Εικόνα 4: Transient temperature distribution for different Biot numbers in a plane wall symmetrically cooled by convection



Εξάρτηση θερμοκρασίας από το χώρο (1/5)

- Μονοδιάστατη αγωγή:

- $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

- Αρχική: $T(x,0) = T_i \quad (2)$

- Οριακές: $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ (λόγω συμμετρίας) (3)

- $$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h[T(L,t) - T_\infty] \quad (4)$$



Εξάρτηση θερμοκρασίας από το χώρο (2/5)

- $T=T(x,t,T_i,T_\infty,L,\lambda,a,h)$ (5)
- *Λύση*: αναλυτική ή αριθμητική
- *Πλεονέκτημα*: αδιαστασιοποίηση (κατά ομάδες)

- $$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

- $T_i - T_\infty$: μέγιστη δυνατή θερμοκρασιακή διαφορά



Εξάρτηση θερμοκρασίας από το χώρο (3/5)

$$0 \leq \theta^* \leq 1$$

- $$\xi \equiv \frac{x}{L}, \quad \tau \equiv \frac{at}{L^2} \equiv Fo \quad (7)$$

- $$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta^*}{\partial \tau} \quad : \text{εξίσωση αγωγής} \quad (8)$$



Εξάρτηση θερμοκρασίας από το χώρο (4/5)

- Αρχική και οριακές συνθήκες:

$$\theta^*(\xi, 0) = 1 \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -B_i \theta^*(1, \tau) \quad (11)$$

$$\theta^* = \theta^*(\xi, F_0, B_i) \quad (12)$$



Εξάρτηση θερμοκρασίας από το χώρο (5/5)

- Αδιάστατη λύση:
 - εξάρτηση από ξ, F_o, B_i .
 - ανεξάρτητη των $T_i, T_\infty, L, h, a, \lambda$.



Ψύξη ή θέρμανση άπειρης επίπεδης πλάκας (1/4)

- Λύση της (8)

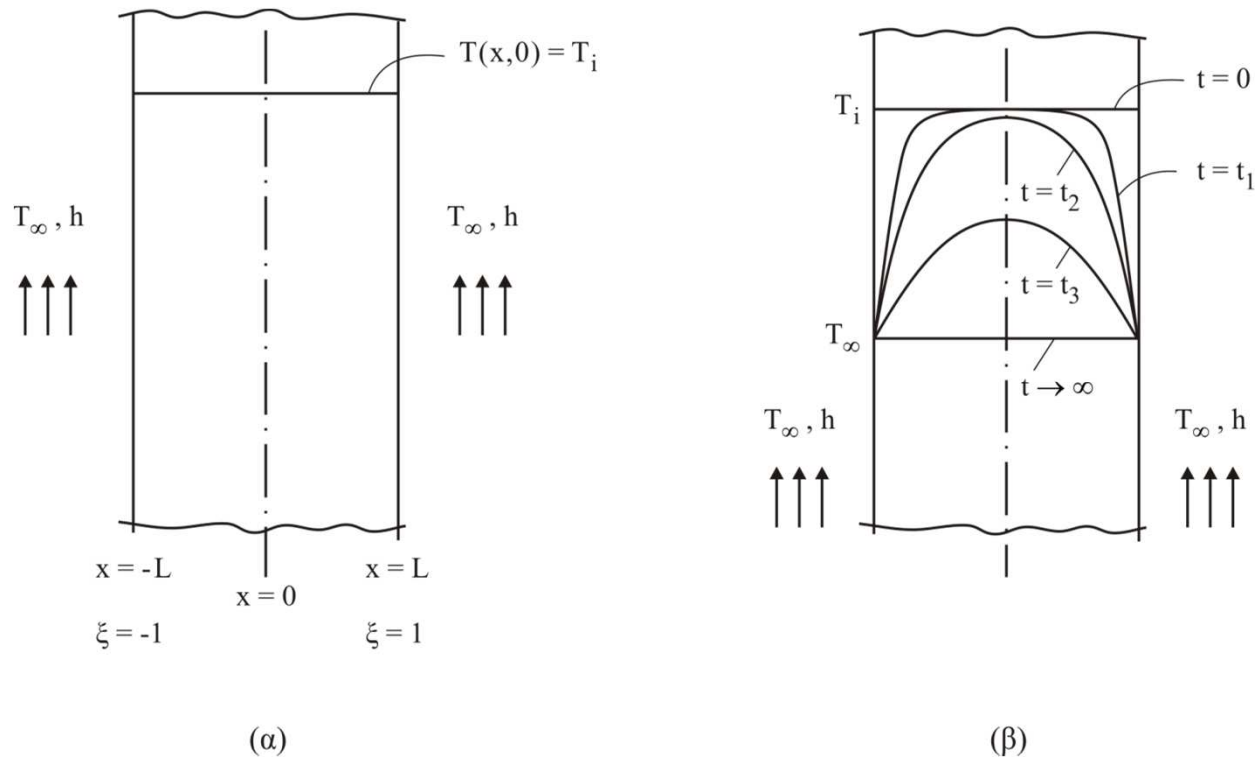
- $\theta^*(\xi, F_o) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-k_n^2 F_o) \cos(k_n \cdot \xi) \quad (13)$

- $A_n = \frac{4 \sin k_n}{2k_n + \sin(2k_n)} \quad (14)$

- $k_n \tan k_n = B_i \quad (15)$



Ψύξη ή θέρμανση άπειρης επίπεδης πλάκας (2/4)



Εικόνα 5: (α) Μεγάλο επίπεδο τοίχωμα με τις επιφάνειές του εκτεθειμένες σε συναγωγή (β) Μετάβατικό προφίλ θερμοκρασίας για ψύξη μεγάλου επίπεδου τοιχώματος



Ψύξη ή θέρμανση άπειρης επίπεδης πλάκας (3/4)

- Αν $F_0 \geq 0,2$: μόνο η πρώτη αρμονική

- $$\theta^*(\xi, F_0) = A_1 \exp(-k_1^2 F_0) \cos(k_1, \xi) \quad (16)$$

- ή
$$\theta^*(\xi, F_0) = \theta_0^*(F_0) \cos(k_1, \xi) \quad (17)$$

- όπου
$$\theta_0^*(F_0) = A_1 \exp(-k_1^2 F_0) \quad (18)$$

η θερμοκρασία στο μέσον ($\xi=0$) της πλάκας.



Ψύξη ή θέρμανση άπειρης επίπεδης πλάκας (4/4)

- (17): η εξάρτηση από το χρόνο της θερμοκρασίας σε οποιοδήποτε σημείο είναι ίδια με αυτήν της θερμοκρασίας στο μέσον της πλάκας.



Συνολική ενέργεια που μεταφέρεται (1/2)

$$\left. \begin{array}{l} E_{in} - E_{out} = \Delta E_{st} \\ E_{in} = 0 \\ Q = E_{out} \end{array} \right\} \Rightarrow Q = -\Delta E_{st} = -[E(t) - E(0)]$$

$$Q = -\int \rho c [T(\tau, t) - T_i] dv$$

- $Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty)$: μέγιστο ποσό ενέργειας που μπορεί να μεταφερθεί



Συνολική ενέργεια που μεταφέρεται (2/2)

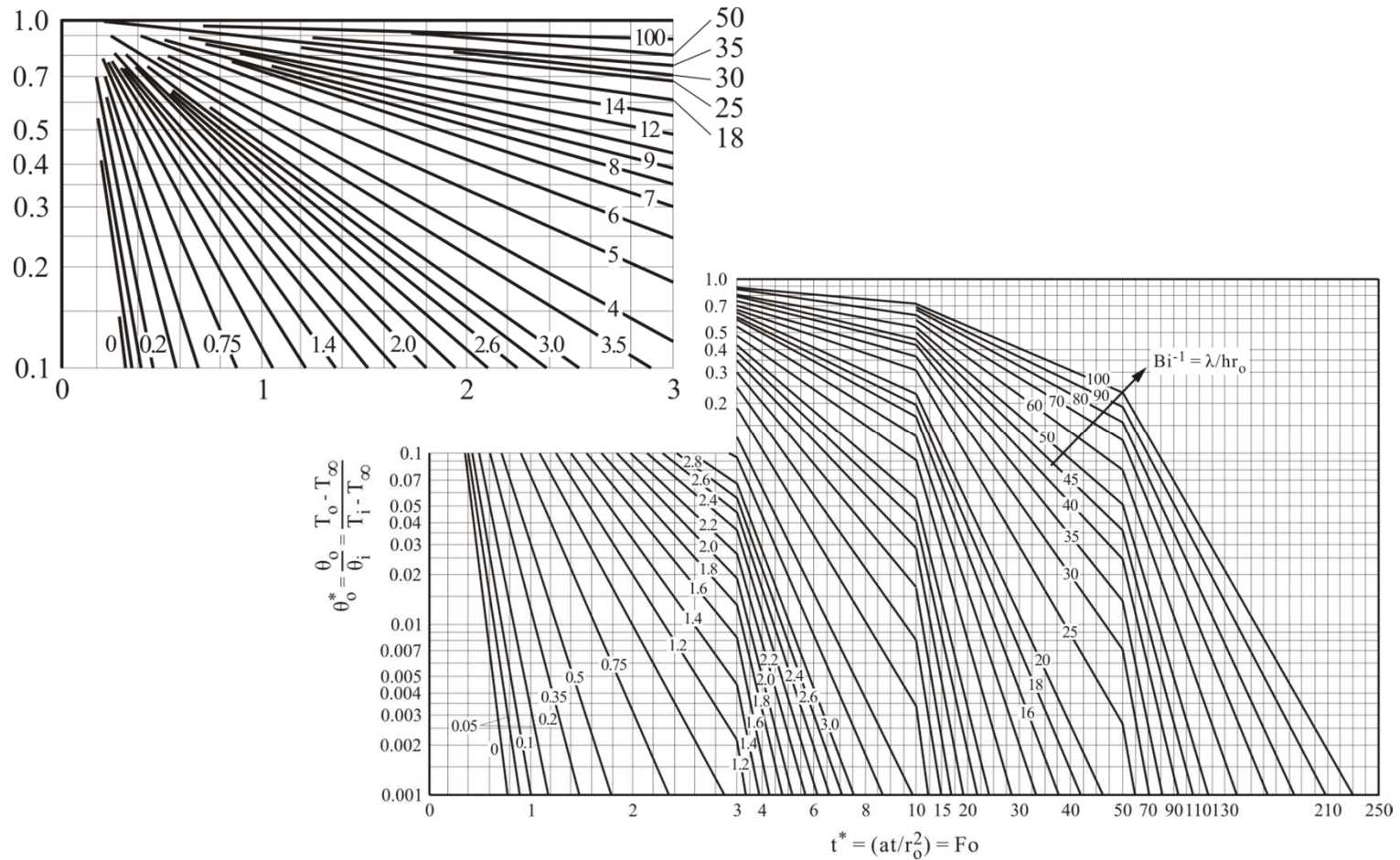
$$\frac{Q}{Q_0} = \int -\frac{[T(\tau, t) - T_i]}{T_i - T_\infty} \frac{dv}{V} = \frac{1}{V} \int (1 - \theta^*) dv$$

• ή

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin k_1}{k_1} \theta_0^*$$



Διαγράμματα Heisler (1/3)



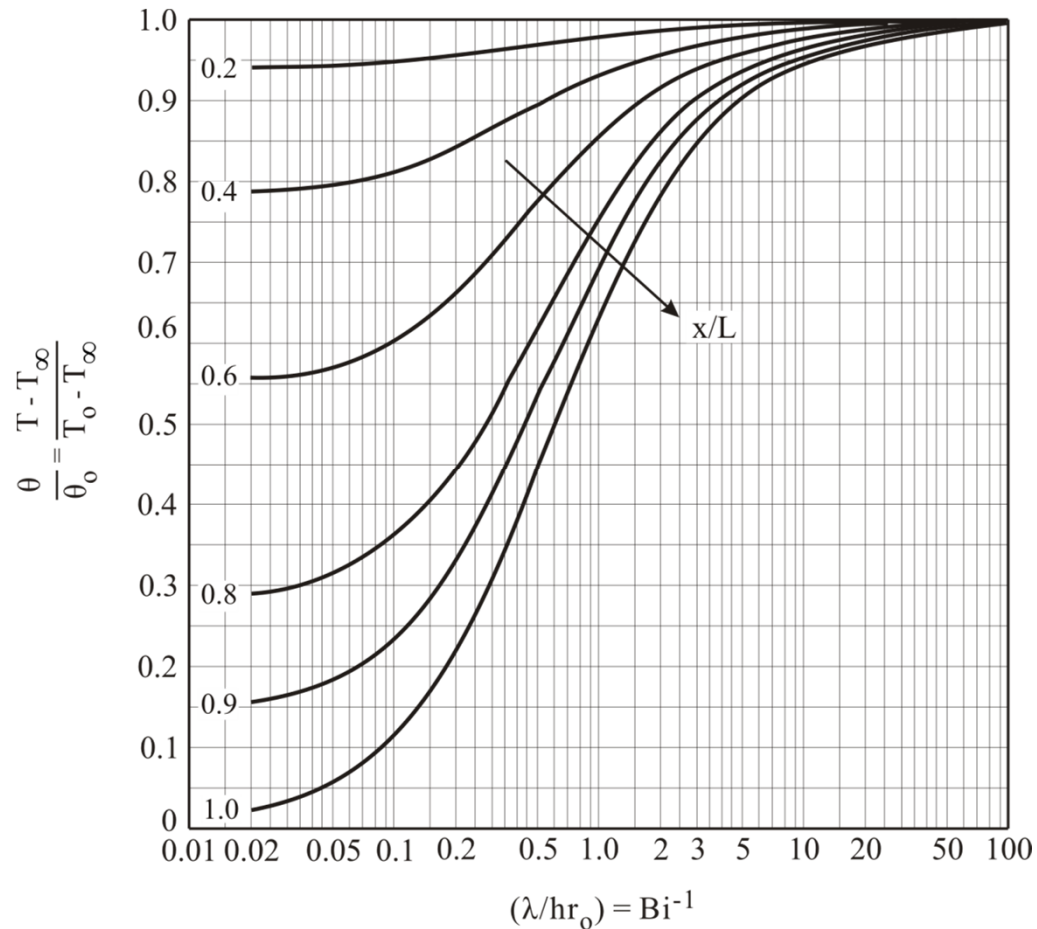
Εικόνα 6: Θερμοκρασία του επιπέδου συμμετρίας $x=0$ άπειρης πλάκας

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ



Διαγράμματα Heisler (2/3)



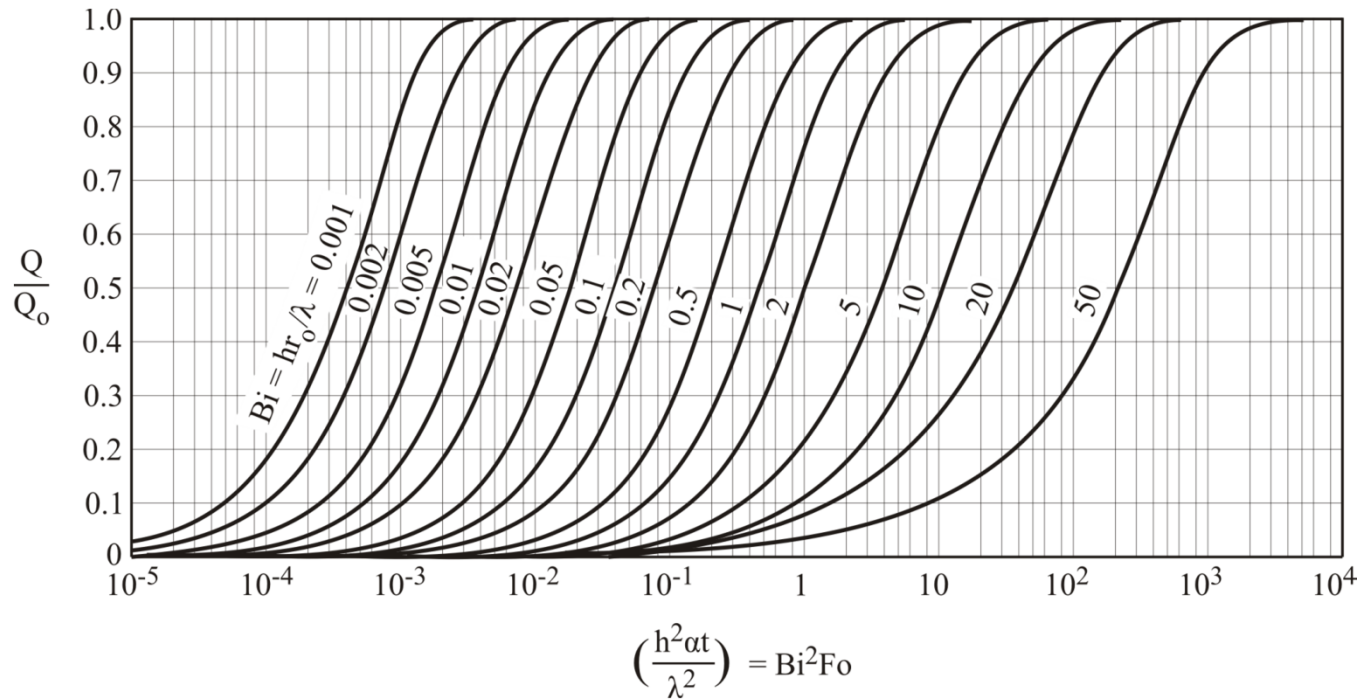
Εικόνα 7: Κατανομή θερμοκρασίας σε άπειρη πλάκα

ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ



Διαγράμματα Heisler (3/3)



Εικόνα 8: Συναλλαγή θερμότητας άπειρης πλάκας και ρευστού



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (1/2)

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

- Εικόνα 1:

Μία μικρή χάλκινη μπάλα μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύστημα συγκεντρωμένου όγκου κάτι που όμως δεν μπορεί να γίνει για ένα κομμάτι ψητού κρέατος: Σελίδα 260, Μεταφορά Μάζας και Θερμότητας, Yunus A. Cengel, Afshin J. Ghajar, εκδόσεις Τζιόλα

- Εικόνα 2:

Ψύξη θερμού αντικειμένου: Σελίδα 146, Εισαγωγή στη Μετάδοση Θερμότητας, Βασίλης Χατζηαθανασίου, εκδόσεις Σοφία

- Εικόνα 3:

Effect of Biot number on steady-state temperature distribution in a planewall with surface convection: Σελίδα 215, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 4th Edition, Frank P. Incropera, David P. De Witt, Wiley

- Εικόνα 4:

Transient temperature distribution for different Biot numbers in a plane wall symmetrically cooled by convection, Σελίδα 216, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 4th Edition, Frank P. Incropera, David P. De Witt, Wiley



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (2/2)

- Εικόνα 5:

(α) Μεγάλο επίπεδο τοίχωμα με τις επιφάνειές του εκτεθειμένες σε συναγωγή (β)
Μετάβατικό προφίλ θερμοκρασίας για ψύξη μεγάλου επίπεδου τοιχώματος: Σελίδα 153,
Εισαγωγή στη Μετάδοση Θερμότητας, Βασίλης Χατζηαθανασίου, εκδόσεις Σοφία

- Εικόνα 6:

Θερμοκρασία του επιπέδου συμμετρίας $x=0$ άπειρης πλάκας : Σελίδα 163, Εισαγωγή στη
Μετάδοση Θερμότητας, Βασίλης Χατζηαθανασίου, εκδόσεις Σοφία

- Εικόνα 7:

Κατανομή θερμοκρασίας σε άπειρη πλάκα: Σελίδα 164, Εισαγωγή στη Μετάδοση
Θερμότητας, Βασίλης Χατζηαθανασίου, εκδόσεις Σοφία

- Εικόνα 8:

Συναλλαγή θερμότητας άπειρης πλάκας και ρευστού: Σελίδα 164, Εισαγωγή στη Μετάδοση
Θερμότητας, Βασίλης Χατζηαθανασίου, εκδόσεις Σοφία



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Χατζηαθανασίου Βασίλειος, Καδή Στυλιανή. «ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ. Μεταβατικά φαινόμενα αγωγής». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://eclass.auth.gr/courses/OCRS421/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>





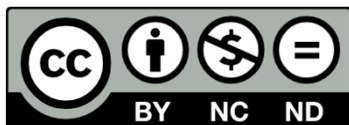
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Σβάρνα Κωνσταντίνα
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

