ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 2: Ορισμός του ολοκληρώματος.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Το ολοκλήρωμα Riemann.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Riemann χρησιμοποιώντας τα αθροίσματα Darboux και Riemann, και θα αποδείξουμε το θεώρημα του Lebesgue, που προσδιορίζει επακριβώς την κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Το ολοκλήρωμα Riemann (1)

Ας είναι

$$\Pi = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ και $f: \Pi \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int \dots \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

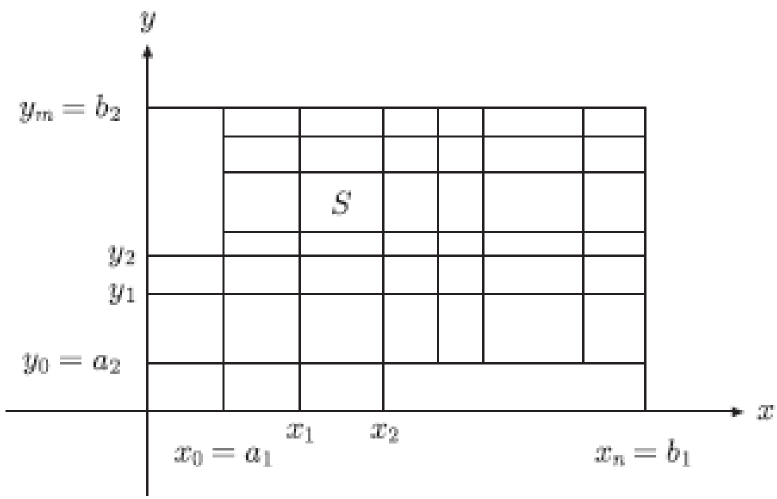
της $f(x_1, \dots, x_n)$ επί του Π.

Όπως ακριβώς και στον $\mathbb{R}^2$, διαμερίσεις

$$\Delta_1 \dots \Delta_n \text{ των } [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

Το ολοκλήρωμα Riemann (2)

αντιστοίχως, δίνουν μια διαμέριση Δ του ορθογωνίου $\Pi = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ σε ορθογώνια S, όπως στο Σχ. 1.



Σχήμα 1

Το ολοκλήρωμα Riemann (3)

Μία διαμέριση Δ' του Π λέγεται εκλέπτυνση της Δ, αν κάθε ορθογώνιο S της Δ' περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο της Δ. Γράφουμε

$$\Delta \subset \Delta'.$$

Ας είναι Δ μια διαμέριση του ορθογωνίου Π και ας συμβολίσουμε με S όλα της τα ορθογώνια. Θέτουμε

$$L_\Delta(f) = \sum_{S \in \Delta} m_S(f) vol(S),$$

όπου

$$m_S(f) = \inf_{x \in S} f(x).$$

Το ολοκλήρωμα Riemann (4)

Το πεπερασμένο άθροισμα $L_\Delta(f)$ το ονομάζουμε κάτω άθροισμα Darboux της f επί της διαμέρισης Δ. Ομοίως, το άνω άθροισμα ορίζεται ως εξής:

$$U_\Delta(f) = \sum_{S\in\Delta} M_S(f) vol(S),$$

όπου

$$M_S(f) = \sup_{x\in S} f(x).$$

Προφανώς

$$L_\Delta(f) \le U_\Delta(f).$$

Το ολοκλήρωμα Riemann (5)

Επισημαίνουμε επίσης ότι, για κάθε διαμέριση Δ του Π,

$$L_{\Delta}(f) \leq \sup_{x \in \Pi} f(x) vol(\Pi) \,.$$

και

$$\inf_{x \in \Pi} f(x)\, vol(\Pi) \leq U_{\Delta}(f).$$

Συνεπώς τα

$$\sup_{\Delta} L_{\Delta}(f)\,, \qquad \inf_{\Delta} U_{\Delta}(f)$$

υπάρχουν και τα συμβολίζουμε ως

$$\sup_{\Delta} L_{\Delta}(f) = \underline{\int_{\Pi}} f\,, \qquad \inf_{\Delta} U_{\Delta}(f) = \overline{\int_{\Pi}} f\,.$$

Το ολοκλήρωμα Riemann (6)

Τα ως άνω ολοκληρώματα λέγονται κάτω ολοκλήρωμα και άνω ολοκλήρωμα της f επί του Π.

Το επόμενο Λήμμα ξεκαθαρίζει περισσότερο τα πράγματα και είναι αναγκαίο για τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Λήμμα 1: Αν Δ' είναι μια εκλέπτυνση της Δ, τότε

$$L_{\Delta}(f) \leq L_{\Delta'}(f) \leq U_{\Delta'}(f) \leq U_{\Delta}(f).$$

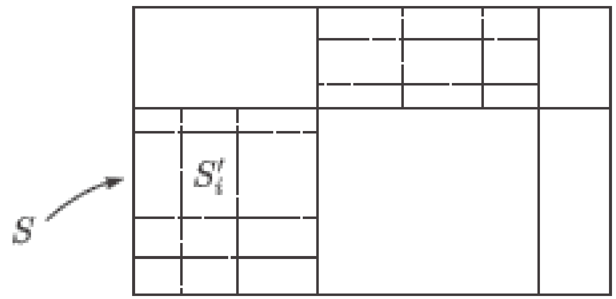
Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο την αριστερή ανισότητα. Η μεσαία είναι προφανής από τον ορισμό, ενώ η δεξιά είναι αντίστοιχη με την αριστερή.

Ας είναι S ένα ορθογώνιο της Δ. Αφού η Δ' είναι εκλέπτυνση της Δ, το S γράφεται ως εξής:

Το ολοκλήρωμα Riemann (7)

$$S = S_1' \cup S_2' \cup \cdots \cup S_k',$$

όπου $S_j' \in \Delta'$ (Σχήμα 2)



Σχήμα 2

Όμως $S_j' \subset S$, άρα

$$m_S(f) = \inf_{x \in S} f(x) \leq \inf_{x \in S_j'} f(x) = m_{S_j'}(f),$$

και συνεπώς

$$m_S(f) vol(S) = m_S(f)\{vol(S'_1) + \cdots + vol(S_k')\}$$
$$\leq m_{S_1'}(f) vol(S'_1) + \cdots + m_{S_k'}(f) vol(S_k').$$

Το ολοκλήρωμα Riemann (8)

Αθροίζοντας έχουμε

$$L_{\Delta}(f) = \sum_{S\in\Delta} m_S(f)vol(S) \leq \sum_{S'\in\Delta'} m_{S'}(f)vol(S') = L_{\Delta'}(f).$$

από το Λήμμα 1 συμπεραίνουμε ότι για κάθε $f: \Pi \to \mathbb{R}$, τα κάτω αθροίσματα $L_{\Delta}(f)$ αυξάνουν και τα άνω αθροίσματα $U_{\Delta}(f)$ φθίνουν, καθώς η διαμέριση γίνεται λεπτότερη:

$$L_{\Delta}(f) \leq L_{\Delta'}(f), \qquad U_{\Delta}(f) \geq U_{\Delta'}(f),$$

για

$$\Delta \subset \Delta'.$$

Το ολοκλήρωμα Riemann (9)

Επιπλέον, ικανοποιούν

$$L_{\Delta}(f) \leq U_{\Delta}(f).$$

Συνεπώς, ο ακόλουθος ορισμός είναι απόλυτα φυσιολογικός:

Ορισμός: Αν Π είναι ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$, τότε μια φραγμένη συνάρτηση $f\colon \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann επί του Π ανν

$$\sup_{\Delta} L_{\Delta}(f) = \inf_{\Delta} U_{\Delta}(f)\,.$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε ο ως άνω κοινός αριθμός λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f, και συμβολίζεται ως εξής:

$$\int_{\Pi} f = \int_{\Pi} f(x)dx = \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_n)dx_1 d \dots dx_n\,.$$

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (1)

Για να αντιμετωπίσουμε την γενική περίπτωση, χρειαζόμαστε το ακόλουθο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας.

Θεώρημα 1: Μια φραγμένη συνάρτηση $f: \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann επί του Π ανν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει διαμέριση Δ_0 του Π τέτοια ώστε

$$U_{\Delta_0}(f) - L_{\Delta_0}(f) \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η συνθήκη (1) ισχύει. Τότε $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει διαμέριση Δ_0 τ.ω.

$$\inf_{\Delta} U_{\Delta}(f) \leq U_{\Delta_0}(f) \leq L_{\Delta_0}(f) + \varepsilon \leq \sup_{\Delta} L_{\Delta}(f) + \varepsilon.$$

Συνεπώς

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (2)

$$\inf_{\Delta} U_{\Delta}(f) - \sup_{\Delta} L_{\Delta}(f) \leq \varepsilon,$$

$\forall \varepsilon > 0$, δηλαδή

$$\inf_{\Delta} U_{\Delta}(f) = \sup_{\Delta} L_{\Delta}(f)$$

και η f είναι ολοκληρώσιμη.

Αντιστρόφως, αν η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή αν

$$\inf_{\Delta} U_{\Delta}(f) = \sup_{\Delta} L_{\Delta}(f),$$

τότε $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχουν διαμερίσεις Δ_1 και Δ_2 του Π τ.ω.

$$U_{\Delta_1}(f) - L_{\Delta_2}(f) \leq \varepsilon.$$

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (3)

Τώρα, ας είναι Δ_0 μια εκλέπτυνση των Δ_1 και Δ_2, δηλαδή $\Delta_1 \subset \Delta_0$ και $\Delta_2 \subset \Delta_0$. Από το Λήμμα 1 έχουμε

$$L_{\Delta_2}(f) \leq L_{\Delta_0}(f) \text{ και } U_{\Delta_0}(f) \leq U_{\Delta_1}(f)$$

αφού $L_{\Delta}(f) \nearrow$ και $U_{\Delta}(f) \searrow$. Άρα

$$U_{\Delta_0}(f) - L_{\Delta_0}(f) \leq U_{\Delta_1}(f) - L_{\Delta_2}(f) \leq \varepsilon$$

από την συνθήκη (1).

Ας δώσουμε δύο παραδείγματα εφαρμογής του θεωρήματος.

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (4)

Παράδειγμα 1: Αν $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ δίδεται από τον τύπο

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu\ 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 & \alpha\nu\ \dfrac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}.$$

Λύση: Σύμφωνα με το θεώρημα, για να δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, αρκεί $\forall \varepsilon > 0$ να βρούμε μια διαμέριση Δ του $[0,1]^2$ τ.ω.

$$U_\Delta(f) - L_\Delta(f) \leq \varepsilon.$$

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (5)

Ας είναι λοιπόν Δ μια διαμέριση του $[0,1]^2$ που προέρχεται από μια διαμέριση Δ_1 του

$$\Pi_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0,1]$$

και από μια Δ_2 του

$$\Pi_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0,1]$$

Έχουμε

$$U_\Delta(f) = \sum_{S \in \Delta} \sup_{x \in S} f(x,y)\, vol(S)$$

$$= \sum_{S \in \Delta_1} \sup_{x \in S} f(x,y)\, vol(S) + \sum_{S \in \Delta_2} \sup_{S \in \Delta} f(x,y)\, vol(S)$$

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (6)

$$= 0 + \sum_{S \in \Delta_2} 1vol(S) = vol(\Pi_2).$$

Όμοια,

$$L_\Delta(f) = vol(\Pi_2).$$

Κατά συνέπεια η f είναι ολοκληρώσιμη, και επιπλέον

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)dxdy = vol(\Pi_2) = \frac{1}{2}.$$

Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα μιας μη ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (7)

Παράδειγμα 2: Η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών επί του τετραγώνου $[0,1]^2$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ (x,y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0 & \alpha\nu\ (x,y) \notin \mathbb{Q}^2, \end{cases}$$

που είναι γνωστή και ως συνάρτηση Dirichlet, δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Λύση: Πράγματι, ας είναι Δ μια οποιαδήποτε διαμέριση του τετραγώνου $[0,1]^2$ και ας είναι S ένα ορθογώνιο της Δ. Λόγω της πυκνότητας των ρητών αριθμών στους πραγματικούς, θα έχουμε σίγουρα ένα $(x_0, y_0) \in S$ με $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$.

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (8)

Άρα $f(x_0, y_0) = 1$, και κατά συνέπεια

$$M_S(f) = \sup_{(x,y)\in S} f(x,y) = 1.$$

Άρα

$$U_\Delta(f) = \sum_{S\in\Delta} \sup_{x\in S} f(x,y)\, vol(S) = 1.$$

Ανάλογα, μπορούμε να βρούμε ένα $(x_1, y_1) \in S$ με $(x_1, y_1) \notin \mathbb{Q}^2$.

Άρα $f(x_1, y_1) = 0$, και κατά συνέπεια

$$m_S(f) = \inf_{(x,y)\in S} f(x,y) = 0.$$

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (9)

Συνεπώς

$$L_{\Delta}(f)=\sum_{S\in\Delta}\inf_{(x,y)\in S} f(x,y)\, vol(S)=0,$$

και η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

θα δώσουμε χωρίς απόδειξη την ακόλουθη πρόταση, η οποία δείχνει ότι οι δύο τρόποι εισαγωγής του ολοκληρώματος είναι ισοδύναμοι. Θυμίζουμε πρώτα ότι το βήμα $\|\Delta\|$ μιας διαμέρισης Δ δίδεται από

$$\|\Delta\|=\max_{S\in\Delta} diam S\,.$$

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (10)

Πρόταση 1: Αν Π είναι ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$, τότε μια φραγμένη συνάρτηση $f: \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη επι του Π ανν τα αθροίσματα Riemann

$$R_\Delta(f,\xi_S) = \sum_{S\in\Delta} f(\xi_S)|S|\,, \xi_S \in S,$$

συγκλίνουν καθώς το βήμα ||Δ|| της διαμέρισης τείνει στο μηδέν. Το όριο των αθροισμάτων Riemann είναι το ολοκλήρωμα της f.

Η κλάση των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων θα προσδιοριστεί παρακάτω με το θεώρημα του Lebesgue. Προς το παρόν ας δείξουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (11)

Πρόταση 2: Αν $\mathbb{R}^n \supset \Pi \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη: Η f ως συνεχής επί του ορθογωνίου Π, είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού το Π είναι συμπαγές. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\eta(\varepsilon) > 0$, που εξαρτάται μόνο από το ε, τ.ω.

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

για όλα τα x, y που ικανοποιούν $\|x - y\| \leq \eta(\varepsilon)$.

Ας είναι τώρα Δ_0 μια διαμέριση του Π της οποίας τα ορθογώνια S έχουν διάμετρο μικρότερη του $\eta(\varepsilon)$. Τότε

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (12)

$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon, \forall x, y \in S,$$

αφού

$$diam\|x-y\| \leq diam(S) \leq \eta(\varepsilon).$$

Συνεπώς

$$\sup_{x\in S} f(x) - \inf_{x\in S} f(x) \leq \varepsilon, \forall x, y \in S.$$

Άρα,

$$U_{\Delta}(f) - L_{\Delta}(f) = \sum_{S\in\Delta} \left\{\sup_{x\in S} f(x) - \inf_{x\in S} f(x)\right\} vol(S)$$

$$\leq \sum_{S\in\Delta} \varepsilon vol(S) = \varepsilon vol(\Pi).$$

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (13)

Παρατήρηση: Αν $f: \Pi \to \mathbb{R}$ είναι θετική και συνεχής, τότε ο όγκος του στερεού Ω που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Pi} f \,.$$

Πράγματι, μια διαμέριση Δ του Π παράγει μία διαμέριση του στερεού Ω σε στοιχειώδη στερεά T (κάντε ένα σχήμα) που ικανοποιούν

$$\inf_{x \in S} f(x)\, vol(S) \leq vol(T) \leq \sup_{x \in S} f(x)\, vol(S).$$

Αθροίζοντας έχουμε

Ολοκληρώσιμες κατά Riemann συναρτήσεις (14)

$$\sum_{S\in\Delta} \inf_{x\in S} f(x)\, vol(S) \leq vol(T) \leq \sum_{S\in\Delta} \sup_{x\in S} f(x)\, vol(S)\,,$$

δηλαδή,

$$L_\Delta(f) \leq vol(\Omega) \leq U_\Delta(f).$$

για κάθε διαμέριση Δ του Π. Άρα

$$vol(\Omega) = \int_\Pi f\,.$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 2: Ορισμός του ολοκληρώματος». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης