Λογισμός 4

Ενότητα 5: Το Θεώρημα του Fubini.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Το Θεώρημα Fubini.

Σκοποί ενότητας

Το Θεώρημα Fubini είναι ένα από τα κεντρικά θεωρήματα του λογισμού ολοκληρωμάτων πολλών μεταβλητών. Μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πολλαπλά ολοκληρώματα ανάγωντάς τα σε απλά.

Θεώρημα Fubini (1)

Θα ξεκινήσουμε με ένα-δύο απλά παραδείγματα και κατόπιν θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος στην γενικότητά του. Στο τέλος θα δώσουμε πολλές και ποικίλες εφαρμογές του.

Ας είναι

$$f\colon \Pi = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$$

μια συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το θεώρημα του Fubini μας λέει ότι

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Θεώρημα Fubini (2)

Αν π.χ. $\Pi = [-1,1] \times [0,1]$ και $f(x,y) = x^2 + y$, τότε

$$\iint_{[-1,1]\times[0,1]} (x^2+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2+y)dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=-1}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{-1}{3} + 2y \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y \right) dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}y + \frac{2y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Θεώρημα Fubini (3)

Ομοίως, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης και να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{1}(x^2+y)dy\right)dx=\frac{5}{3}.$$

Ας περάσουμε τώρα στο θεώρημα Fubini όπως ισχύει στην γενικότητα του, δηλαδή για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις επί φραγμένων συνόλων με σύνορο μέτρου 0.

Ας είναι λοιπόν $A\times B$ ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^{m\times n}$, όπου A είναι ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^m$ και Β ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα Fubini (4)

Αν

$$A \times B \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

είναι ολοκληρώσιμη, τότε κατά τον Fubini, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy$$

ως το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα

$$\int_A \left(\int_B f(x,y)dx\right)dy\,.$$

Χρειαζόμαστε κάποιους συμβολισμούς.

Θεώρημα Fubini (5)

Αν $A \times B \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, θέτουμε

$$g_x(y) = f(x, y),$$

άρα

$$g_x : B \to \mathbb{R}.$$

Επίσης, συμβολίζουμε με

$$\mathcal{L}(x) = \underline{\int_B} g_x(y) dy = \underline{\int_B} f(x, y) dy$$

το κάτω και με

$$\mathfrak{U}(x) = \overline{\int_B} g_x(y) dy = \overline{\int_B} f(x, y) dy$$

το άνω ολοκλήρωμα της g_x επί του B.

Θεώρημα Fubini (6)

Επισημαίνουμε ότι τα αθροίσματα $\mathcal{L}(x)$ και $\mathfrak{U}(x)$ υπάρχουν αφού η f είναι φραγμένη και συνεπώς και η g_x. Έχουμε το

Θεώρημα 1 (Fubini) Ας είναι $A \times B$ ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^{m\times n}$, όπου A είναι ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^m$ και B ένα ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$. Αν $A \times B \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε οι $x \mapsto \mathcal{L}(x)$ και $x \mapsto \mathfrak{U}(x)$ είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \mathcal{L}(x)dx = \int_A \left(\int_{\_B} g_x(y)dy\right)dx$$

$$= \int_A \left(\int_{\_B} f(x,y)dy\right)dx, \qquad (1)$$

Θεώρημα Fubini (7)

και

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \mathfrak{U}(x)dx = \int_A \left(\overline{\int_B} g_x(y)dy\right)dx$$

$$= \int_A \left(\overline{\int_B} f(x,y)dy\right)dx\,.$$

Πριν περάσουμε στην απόδειξη, ας κάνουμε δύο παρατηρήσεις.

Θεώρημα Fubini (8)

Παρατηρήση 1:

1. Προφανώς οι ρόλοι των A και B στα παραπάνω ολοκληρώματα μπορούν να εναλλαγούν. Μπορούμε δηλαδή να ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x και και μετά ως προς y.
2. Σε όλες σχεδόν τις εφαρμογές, η $y \to g_x(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y για κάθε x. Έτσι π.χ. στην (1) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα κάτω ολοκληρώματα με τα ολοκληρώματα, και συνεπώς

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \left(\int_B g_x(y)dy \right) dx$$
$$= \int_A \left(\int_B f(x,y)dy \right) dx \,.$$

Θεώρημα Fubini (9)

Απόδειξη (**του θεωρήματος Fubini**). Ας είναι Δ_1 μια διαμέριση του $A \subset \mathbb{R}^m$ σε ορθογώνια S_A, και Δ_2 μια διαμέριση του $B \subset \mathbb{R}^n$ σε ορθογώνια S_B. Συμβολίζουμε με Δ την διαμέριση του $A \times B$ που παράγεται από τα ορθογώνια $S_A \times S_B$. Θα δείξουμε ότι η

$$\mathcal{L}(x) = \underline{\int_B} g_x(y)dy = \underline{\int_B} f(x,y)dy$$

είναι ολοκληρώσιμη, δείχνοντας ότι μπορούμε να κάνουμε τη διαφορά

$$U_{\Delta_1}(\mathcal{L}) - L_{\Delta_1}(\mathcal{L})$$

όσο μικρή θέλουμε.

Θεώρημα Fubini (10)

Για αυτό, θα δείξουμε ότι

$$U_{\Delta_1}(\mathcal{L}) \leq U_{\Delta}(f)$$

και

$$L_{\Delta}(f) \leq L_{\Delta_1}(\mathcal{L}).$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$U_{\Delta_1}(\mathcal{L}) - L_{\Delta_1}(\mathcal{L}) \leq U_{\Delta}(f) - L_{\Delta}(f) \leq \varepsilon,$$

αφού η f είναι ολοκληρώσιμη.

Κοιτάζουμε τα κάτω αθροίσματα

Θεώρημα Fubini (11)

$$L_{\Delta}(f) = \sum_{S_A \times S_B} m_{S_A \times S_B}(f)|S_A \times S_B|$$

$$= \sum_{S_A \times S_B} \inf_{(x,y) \in S_A \times S_B} f(x, y)\, |S_A||S_B|$$

$$\leq \sum_{S_A \times S_B} \inf_{y \in S_B} f(x_0, y)\, |S_A||S_B|\,,$$

όπου x_0 είναι κάποιο τυχαίο σημείο του S_A.

Όμως έχουμε θέσει

$$f(x_0, y) = g_{x_0}(y).$$

Θεώρημα Fubini (12)

Άρα,

$$L_\Delta(f) \le \sum_{S_A \times S_B} \inf_{y \in S_B} f(x_0, y)\,|S_A||S_B|$$

$$= \sum_{S_A \times S_B} \inf_{y \in S_B} g_{x_0}(y)\,|S_A||S_B|$$

$$\le \sum_{S_A} \left(\sum_{S_B} \inf_{y \in S_B} g_{x_0}(y)\,|S_B| \right) |S_A|$$

$$\le \sum_{S_A} L_{\Delta_2}(g_{x_0})|S_A| \underset{L_{\Delta_2}(g_{x_0}) \le \int_B g(x_0) = L(x_0)}{\le} \sum_{S_A} \mathcal{L}(x_0)|S_A|, \qquad (2)$$

για κάθε $x_0 \in A$.

Θεώρημα Fubini (13)

Ας διαλέξουμε τώρα στην (2) ένα x_0 τ.ω.

$$\mathcal{L}(x_0) = \inf_{x\in S_A} \mathcal{L}(x) = m_{S_A}(\mathcal{L}).$$

Συνεπώς

$$L_\Delta(f) \le \sum_{S_A} \mathcal{L}(x_0)|S_A| \le \sum_{S_A} \inf_{x\in S_A} \mathcal{L}(x)\,|S_A|$$

$$\le \sum_{S_A} m_{S_A}(\mathcal{L})|S_A| = L_{\Delta_1}(\mathcal{L}). \quad (3)$$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$U_{\Delta_1}(\mathcal{L}) \le U_\Delta(f). \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) έχουμε

$$U_{\Delta_1}(\mathcal{L}) - L_{\Delta_1}(\mathcal{L}) \le U_\Delta(f) - L_\Delta(f) \le \varepsilon,$$

Θεώρημα Fubini (14)

αν η διαμέριση Δ είναι αρκετά λεπτή, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη.

Συνεπώς, η $\mathcal{L}$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \sup_{\Delta} L_{\Delta}(f) \underset{(3)}{\leq} \sup_{\Delta_1} L_{\Delta_1}(\mathcal{L}) = \int_A \mathcal{L}(x)dx$$

$$= \int_A \left(\underline{\int}_B g_x(y)dy\right)dx = \int_A \left(\underline{\int}_B f(x,y)dy\right)dx\,.$$

Όμοίως, από την (4) έχουμε την αντίστροφη ανισότητα, και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης.

Θεώρημα Fubini (15)

Παρατηρήση 2:

Μια εύκολη περίπτωση του Fubini είναι αυτή των χωρισμένων μεταβλητών, όταν δηλαδή η $A \times B \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ικανοποιεί

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y), \forall (x, y) \in A \times B.$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \left(\int_A f_1(x) dx \right) \left(\int_B f_2(y) dy \right).$$

Για παράδειγμα,

$$\int_{[0,1]^2} e^{x+2y} dx dy = \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^1 e^{2y} dy \right).$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 5: Το Θεώρημα του Fubini». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης