Λογισμός 4

Ενότητα 7: Ο Fubini για τριπλά ολοκληρώματα.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα.

Σκοποί ενότητας

Δίνουμε τα βασικά παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα.

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (1)

Η ιστορία είναι ακριβώς η ίδια με την περίπτωση των δύο μεταβλητών.

Έτσι, για ένα ορθογώνιο

$$\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

του $\mathbb{R}^3$ έχουμε

$$\iiint_{\Pi} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_{[a_3,b_3]} \left(\int_{[a_2,b_2]} \left(\int_{[a_1,b_1]} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz \,.$$

Αν A είναι ένα σύνολο με σύνορο ∂A μέτρου 0, τότε

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (2)

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_{pr_{x,y}A}\left(\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy\,, (1)$$

όπου

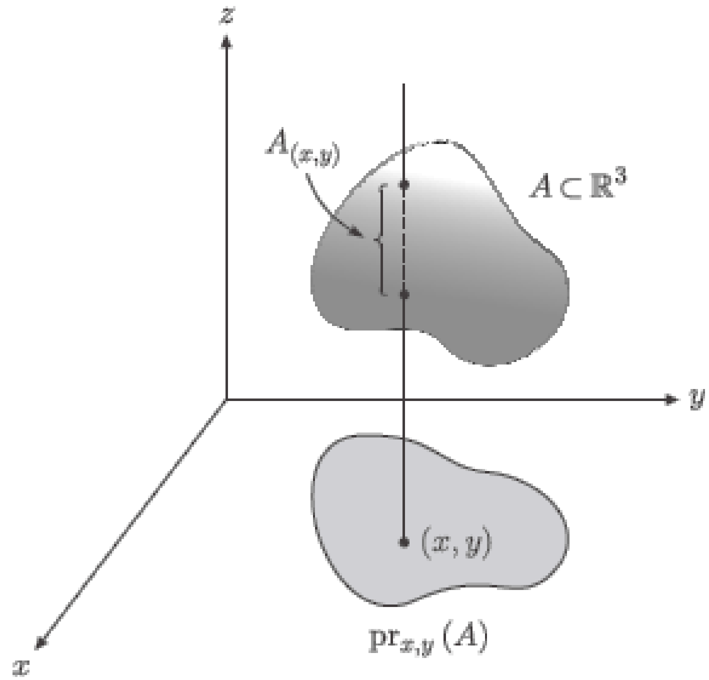
$$A_{(x,y)} = \{z: (x,y,z) \in A\}$$

είναι η τομή του A με την κατακόρυφο που φεύγει από το (x,y), και

$$pr_{x,y}A = \{(x,y), (x,y,z) \in A\}$$

είναι η προβολή του A στο επίπεδο xOy (Σχ.1).

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (3)



Σχήμα 1

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (4)

Αν στην (1) θέσουμε

$$F(x,y) = \int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)dz\,,$$

τότε

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz = \int_{pr_{x,y}A} \left(\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$

$$= \int_{pr_{x,y}A} F(x,y)dxdy\,,$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με Fubini στις δύο διαστάσεις.

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (5)

Τέλος, αναφέρουμε την συνήθη περίπτωση, όπου το σύνολο A επί του οποίου ολοκληρώνουμε, παραμετρικοποιείται ως εξής:

$A = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}.$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \,.$$

Στην συνέχεια, δίνουμε αρκετά παραδείγματα υπολογισμού τριπλών ολοκληρωμάτων.

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (6)

Παράδειγμα 1: Έστω A το στερεό που ορίζεται από την επιφάνεια $z = x^2 + y^2$, τα επίπεδα $x = 0, y = 0, z = 2$, και τις συνθήκες $x \geq 0, y \geq 0$ (Σχ. 2). Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_A xdxdydz$$

Λύση: Η προβολή επί του επιπέδου είναι το σύνολο

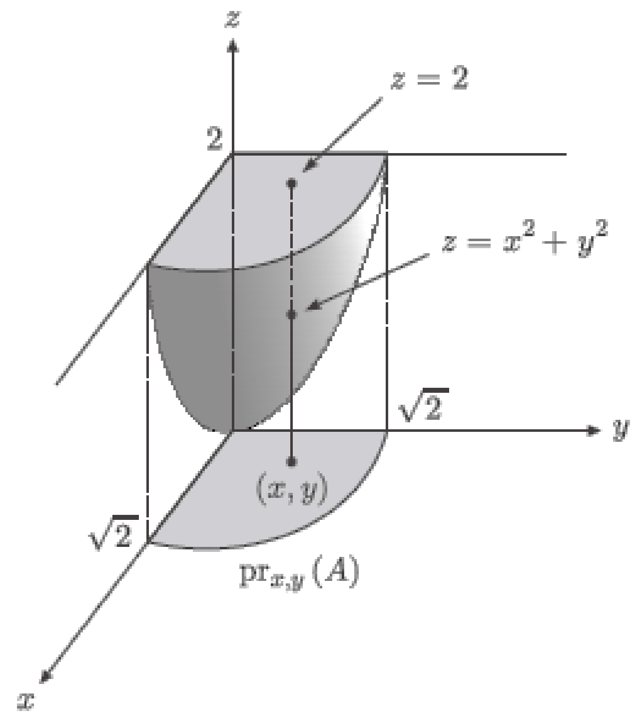
$$pr_{x,y}A = \{(x, y)\colon\ x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(δες Σχ.4 Ενότητα 6)

Αν $(x, y) \in pr_{x,y}A$, τότε

$$A_{(x,y)} = \{z\colon\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2\}.$$

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (7)



Σχήμα 2

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (8)

Άρα,

$$\iiint_A xdxdydz = \iint_{pr_{x,y}A} dxdy \int_{A(x,y)} xdz$$

$$= \iint_{pr_{x,y}A} xdxdy \int_{x^2+y^2}^{2} dz$$

$$= \iint_{pr_{x,y}A} x(2 - x^2 - y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} xdx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2 - x^2 - y^2)dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \left\{2x\sqrt{2 - x^2}(1 - x^2) - \frac{x}{3}\left(\sqrt{2 - x^2}\right)^3\right\} dx = \cdots$$

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (9)

Παράδειγμα 2: Να υπολογιστεί ο όγκος της μπάλας

$$B(0,r) = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}.$$

Λύση: Η προβολή της μπάλας επί του επιπέδου xOy είναι ο δίσκος $\mathrm{D}(0,r)$. Αν τώρα το (x,y) ανήκει στο δίσκο $\mathrm{D}(0,r)$, τότε τα z επί της σφαίρας ικανοποιούν $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$. Συνεπώς η τομή $B_{x,y}$ της μπάλας είναι τα z που ικανοποιούν:

$$-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq +\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

Έχουμε λοιπόν

$$|B(0,r)| = \int_{B(0,r)} dxdydz = \int_{B(0,r)} dxdy \int_{-\sqrt{r^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2-y^2}} dz$$

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (10)

$$= \int_{B(0,r)} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

$$= 2\int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dy\,.$$

Θέτουμε $r^2 - x^2 = a^2$, και έχουμε

$$|B(0,r)| = 2\int_{-r}^{+r} dx \int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - y^2}\,dy$$

$$= 2\int_{-r}^{+r} \left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\tau o\xi\eta\mu\frac{y}{a}\right]_{-a}^{+a} dx$$

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (11)

$$= \int_{-r}^{+r} \{0 - 0 + a^2 τοξημ 1 - a^2 τοξημ(-1)\} dx$$

$$= \int_{-r}^{+r} \left\{a^2 \frac{\pi}{2} - a^2 \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} dx$$

$$= \pi \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2) dx\,.$$

Τέλος, με την αλλαγή $x = rw$, προκύπτει

$$|B(0,r)| = \pi \int_{-1}^{+1} (r^2 - r^2 w^2) r dw = \pi r^3 \int_{-1}^{+1} (1 - w^2) dw$$

$$= \pi r^3 \left(2 - \frac{1}{3} + \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} r^3.$$

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (12)

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_D xdxdydz\,,$$

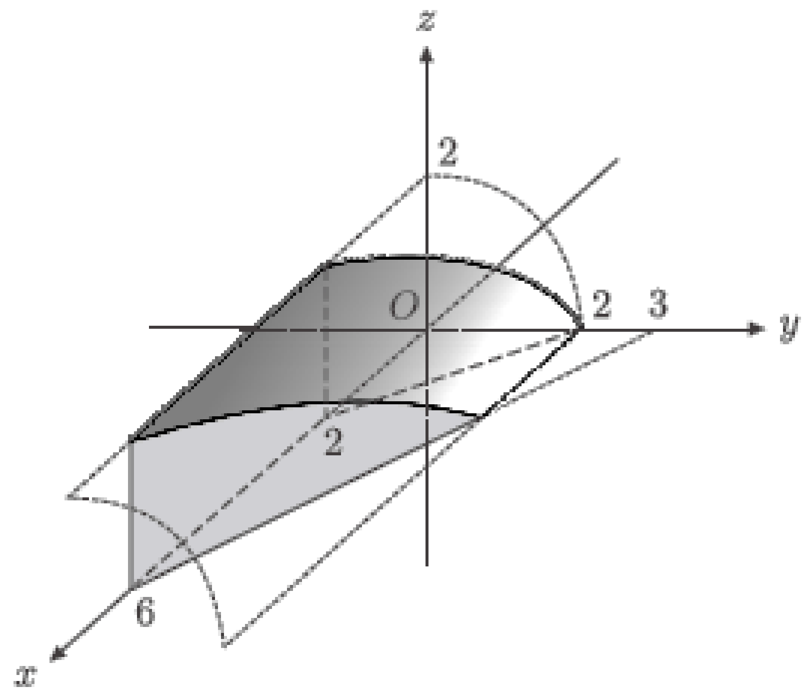
όπου D είναι το χωρίο του $1^{ου}$ ογδοημορίου του $\mathbb{R}^3$ που φράσσεται από τα επίπεδα $y = 0, z = 0, x + y = 2, 2y + x = 6$, και τον κύλινδρο $x^2 + z^2 = 4$ (Σχ.3).

Λύση: Ο κύλινδρος , έχει άξονα τον άξονα των x, και το κομμάτι που μας ενδιαφέρει είναι ζωγραφισμένο στο σχήμα. Άρα το ικανοποιεί , ενώ τα ικανοποιούν (δες Σχ.3):

$$0 \le x \le 2 \Rightarrow 2 - x \le y \le 3 - \frac{x}{2},$$

$$2 \le x \le 6 \Rightarrow 0 \le y \le 3 - \frac{x}{2}.$$

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (13)



Σχήμα 3

Εφαρμογές του Θεωρήματος Fubini σε τριπλά ολοκληρώματα (14)

Άρα,

$$\int_D xdxdydz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_{2-x}^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} zdz + \int_2^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} zdz$$

$$= \int_0^2 dx \int_{2-x}^{3-\frac{x}{2}} \frac{4-y^2}{2} dy + \int_2^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} \frac{4-y^2}{2} dy = \cdots$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 7: Ο Fubini για τριπλά ολοκληρώματα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης