ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 11: Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.
2. Η περίπτωση των δύο διαστάσεων.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το θεώρημα αλλαγής των μεταβλητών στην γενική του μορφή.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (1)

Θεώρημα 1 (αλλαγής μεταβλητών): Ας είναι A ένα ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, και $A \xrightarrow{g} g(A)$ ένας 1-1 και C^1 μετασχηματισμός που ικανοποιεί

$$detDg(x) \neq 0, \forall x \in A.$$

Αν η $g(A) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε ισχύει ο τύπος της αλλαγής μεταβλητών:

$$\int_{g(A)} f(x)dx = \int_A (fog)(u)|detDg(u)|du. \quad (1)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (2)

1ο Βήμα Αν η (1) ισχύει για τις μπάλες $B(x, \varepsilon)$, τότε ισχύει και για το A.

Πράγματι, μπορούμε να καλύψουμε το A με μια αριθμήσιμη κάλυψη μπαλών $B\left(x_j, \varepsilon\right), j \in \mathbb{N}$.

Όμως, ο μετασχηματισμός g είναι 1-1, και συνεπώς το $g(A)$ καλύπτεται από τις εικόνες $g\left(B\left(x_j, \varepsilon\right)\right)$ των μπαλών της κάλυψης.

Ας είναι τώρα φ_j μια διαίρεση της μονάδας που αντιστοιχεί στην κάλυψη $g\left(B\left(x_j, \varepsilon\right)\right)$ του $g(A)$. Έχουμε

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (3)

$$\int_{g(A)} f(x)dx = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{g(A)} \varphi_j(x) f(x)dx$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{g\left(B(x_j,\varepsilon)\right)} \varphi_j(x) f(x)dx$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{B(x_j,\varepsilon)} \left(\varphi_j o g\right)(u)(f o g)(u)|detDg(u)|du \ \ (υπόθεση)$$

$$= \int_A \ (f o g)(u)|detDg(u)|du\,,$$

αφού οι $\varphi_j o g$ είναι διαίρεση της μονάδας που αντιστοιχεί στην κάλυψη $B\left(x_j, \varepsilon\right)$ του A.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (4)

Πράγματι, για κάθε $u \in A$,

$$\sum_j (\varphi_j o g)(u) = \sum_j \varphi_j\big(g(u)\big) = \sum_j \varphi_j(x) = 1,$$

αφού οι φ_j είναι διαίρεση της μονάδας. Θέτοντας $V = g(A)$, παρατηρούμε ότι το θεώρημα προκύπτει αν ισχύει η σχέση

$$\int_V f(x)dx = \int_{g^{-1}(V)} (f o g)(u)|detDg(u)|du\,. \quad (2)$$

2ο Βήμα Αρκεί να δείξουμε την (2) για $f(x) = 1$.

Αν η (2) ισχύει για $f(x) = 1$, τότε ισχύει και για τις σταθερές συναρτήσεις. Ας είναι Δ μια διαμέριση του V.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (5)

Για κάθε ορθογώνιο S της διαμέρισης, θέτουμε

$$f_S(x) = m_S(f) = \inf_{x \in S} f(x)\,.$$

Η f_S είναι σταθερή και ικανοποιεί $f_S(x) \leq f(x)$. Έχουμε

$$L_\Delta(f) = \sum_S m_S(f)|S| = \sum_S \int_S f_S$$

$$= \sum_S \int_{g^{-1}(S)} f_S o g |detDg| \ (f_S = c)$$

$$\leq \sum_S \int_{g^{-1}(S)} f o g |detDg| \ \ (f_S \leq f)$$

$$= \int_{g^{-1}(V)} f o g |detDg|\,. \quad (3)$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (6)

Όμως,

$$\int_V f = \sup_{\Delta} L_{\Delta}(f)\,,$$

δηλαδή το $\int_V f$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα των $L_{\Delta}(f)$, και συνεπώς από την (3) προκύπτει ότι

$$\int_V f \leq \int_{g^{-1}(V)} f o g |detDg|\,.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τα $U_{\Delta}(f)$, ακριβώς το ανάλογο επιχείρημα δίνει

$$\int_{g^{-1}(V)} f o g |detDg| \leq \int_V f\,,$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (7)

και συνεπώς

$$\int_V f = \int_{g^{-1}(V)} fog|detDg|.$$

3ο Βήμα Αν το θεώρημα αληθεύει για τους μετασχηματισμούς g και h, τότε αληθεύει και για την σύνθεσή τους.

Πράγματι,

$$\int_{hog(A)} f = \int_{h(g(A))} f = \int_{g(A)} foh|deth'|$$

$$= \int_A fohog(|deth'|)og|detg'|$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (8)

$$= \int_A fohog|\det(hog)'|.$$

4ο Βήμα Το θεώρημα αληθεύει αν ο μετασχηματισμός g είναι γραμμικός. Η απόδειξη του βήματος αυτού μπορεί να γίνει ως εξής:

(α) Αν ο μετασχηματισμός g είναι του τύπου

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, .., ax_i, \dots, x_n)$$

ή

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(x_1, .., x_i + x_j, \dots, x_n\right),$$

ή

$$g\left(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n\right) = \left(x_1, .., x_j, \dots, x_i, \dots, x_n\right),$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (9)

τότε για κάθε ορθογώνιο S ο όγκος $g(S)$ είναι ίσος με $|detg||S|$.

(β) Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός g με $detg \neq 0$, γράφεται ως σύνθεση των μετασχηματισμών του τύπου που είδαμε στο (α). Άρα ισχύει $|g(S)| = |detg||S|$.

5ο Βήμα Αρκεί να δείξουμε το θεώρημα για τους μετασχηματισμούς που ικανοποιούν

$$Dg(a) = I.$$

Πράγματι, ας είναι $T = Dg(a)$.

Τότε η Τ είναι γραμμική και συνεπώς $DT = T$. Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (10)

$$
\begin{aligned}
(T^{-1}og)'(x) &= (DT^{-1})\big(g(x)\big)oDg(x) \\
&= (T^{-1})\big(g(x)\big)oDg(x) \\
&= Dg(a)^{-1}oDg(x),
\end{aligned}
$$

για κάθε $x \in A$. Άρα, για $x = a$,

$$(T^{-1}og)'(a) = I.$$

6ο Βήμα και τέλος της απόδειξης. Με επαγωγή στην διάσταση.

Για $n = 1$, το θεώρημα είναι συνέπεια του Θεμελιώδους θεωρήματος του λογισμού. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει για $n - 1$. Θα το αποδείξουμε για το n.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (11)

Η πρώτη κίνηση που πρέπει να κάνουμε ώστε να εφαρμόσουμε την υπόθεση της επαγωγής, είναι να γράψουμε, τουλάχιστον τοπικά, τον μετασχηματισμό g ως σύνθεση δύο μετασχηματισμών ο καθένας των οποίων αλλάζει λιγότερες από n μεταβλητές. Ας είναι λοιπόν $a \in A$. Όπως αναφέραμε στο 5ο βήμα, μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι $Dg(a) = I$.

Θεωρούμε την εξής απεικόνιση

$$h(x) = (g_1(x), \dots, g_{n-1}(x), x_n), \qquad (4)$$

όπου g_k είναι οι συνιστώσες συναρτήσεις του μετασχηματισμού g.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (12)

Η h αλλάζει $n-1$ μεταβλητές. Τώρα, επειδή $Dg(a)=I$, έχουμε

$$Dh(a)=\begin{pmatrix} \left(\partial_j g_k(a)\right)_{\substack{1\le j\le n-1\\ 1\le k\le n-1}} & 0 \\ 0 & \partial_n x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I_n.$$

Άρα, από το θεώρημα της αντιστροφής, υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε επί της $B(a,\varepsilon)$, η h να είναι C^1 και αμφιδιαφορίσιμη. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε την

$$h\big(B(a,\varepsilon)\big)\overset{k}{\to}B(a,\varepsilon)$$

ως εξής:

$$k(y)=k(y_1,\dots,y_n)=(y_1,\dots,y_{n-1},g_n(h^{-1}(y))),$$
$$y\in h\big(B(a,\varepsilon)\big).$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (13)

Η k αλλάζει μόνο μία μεταβλητή. Θα δείξουμε επιπλέον ότι

$$koh = g.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in B(a, \varepsilon)$ και $y = h(k)$, ισχύει

$$\begin{aligned} koh(x) &= k\big(h(x)\big) = k(y) = k(y_1, \ldots, y_{n-1}, g_n(h^{-1}(y))) \\ &= \big(h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x), g_n\big(h^{-1}\big(h(x)\big)\big)\big) \\ &= (g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), g_n(x)). = g(x). \end{aligned}$$

Γράψαμε λοιπόν τον μετασχηματισμό g σαν σύνθεση των απεικονίσεων k και h οι οποίες αλλάζουν λιγότερες από n μεταβλητές, κι έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την υπόθεση της επαγωγής. Από το 3ο βήμα, αρκεί να δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για τους μετασχηματισμούς h και k.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (14)

Για τον h, από τα βήματα 1 και 2, αρκεί να ισχύει:

$$\int_{h(V)} dy = \int_V |detDh| dx\,,$$

όπου V είναι ένα από τα σύνολα της κάλυψης του A που συνήθως είναι μπάλες ή ορθογώνια. Εδώ μας βολεύουν τα ορθογώνια

$$\begin{aligned} V &= [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_{n-1}, b_{n-1}] \times [a_n, b_n] \\ &= V_{n-1} \times [a_n, b_n]. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$h(x) = (g_1(x), \dots, g_{n-1}(x), x_n) = \left(h_{x_n}(x), x_n\right),$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (15)

και επομένως

$$h(V) = h_{x_n}(V_{n-1}) \times [a_n, b_n],$$

όπου φυσικά

$$h_{x_n}(V_{n-1}) = \{(g_1(x), \dots, g_{n-1}(x)) : x = (x_1, \dots, x_n) \in V\}.$$

Από τον Fubini, έχουμε

$$\int_{h(V)} dy = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{h_{x_n}(V_{n-1})} dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{V_{n-1}} \left| detDh_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) \right| dx_1 \dots dx_{n-1}, \qquad (5)$$

αφού η h_{x_n} είναι $n-1$ μεταβλητών, και από την υπόθεση μας το θεώρημα ισχύει για $n-1$ μεταβλητές.

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (16)

Τώρα

$$h(x) = \left(h_{x_n}(x), x\right),$$

άρα

$$detDh(x) = \det\begin{pmatrix} Dh_{x_n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = detDh_{x_n}(x),$$

και συνδυάζοντας με την (5), έχουμε

$$\int_{h(V)} dy = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{V_{n-1}} \left|detDh_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1})\right| dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{V_{n-1}} |detDh(x_1, \dots, x_{n-1})| dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$= \int_{V} |detDh(x_1, \dots, x_{n-1})| dx_1 \dots dx_n .$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (17)

Άρα το θεώρημα ισχύει για την h. Η απόδειξη για την k είναι τελείως ανάλογη με αυτήν της h και έτσι η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Παρατήρηση: Από την σχέση (1) της αλλαγής μεταβλητών,

$$\int_{g(A)} f(x)dx = \int_A (fog)(u)|detDg(u)|du.$$

προκύπτει ότι αν

$$detDg(u) = 1, \qquad \forall u \in A,$$

τότε ο όγκος του χωρίου Α παραμένει αναλλοίωτος από τον μετασχηματισμό g, δηλαδή

$$|g(A)| = |A|.$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (18)

Τέτοιοι μετασχηματισμοί στο επίπεδο, είναι οι στροφές, οι μετατοπίσεις, και γενικά όλοι οι γραμμικοί που ορίζονται από έναν πίνακα της ομάδας SO(2). Για παράδειγμα, οι στροφές κατά γωνία θ δίνονται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta \\ -\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\theta \end{pmatrix}.$$

Η περίπτωση των δύο διαστάσεων (1)

Όπως είδαμε η απόδειξη του θεωρήματος της αλλαγής μεταβλητών είναι μεγάλη και δύσκολη. Θα δώσουμε λοιπόν ένα γεωμετρικό επιχείρημα που δίνει μια σύντομη (και λίγο πολύ διαισθητική) απόδειξη του θεωρήματος στις δύο διαστάσεις.

Ας είναι

$$\Phi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

ο C^1 μετασχηματισμός μας. Αν αφήσουμε το v να κινείται, τότε το γράφημα της

$$v \rightsquigarrow \Phi(u_0, v)$$

είναι μια καμπύλη της οποίας η εφαπτομένη στο σημείο

Η περίπτωση των δύο διαστάσεων (2)

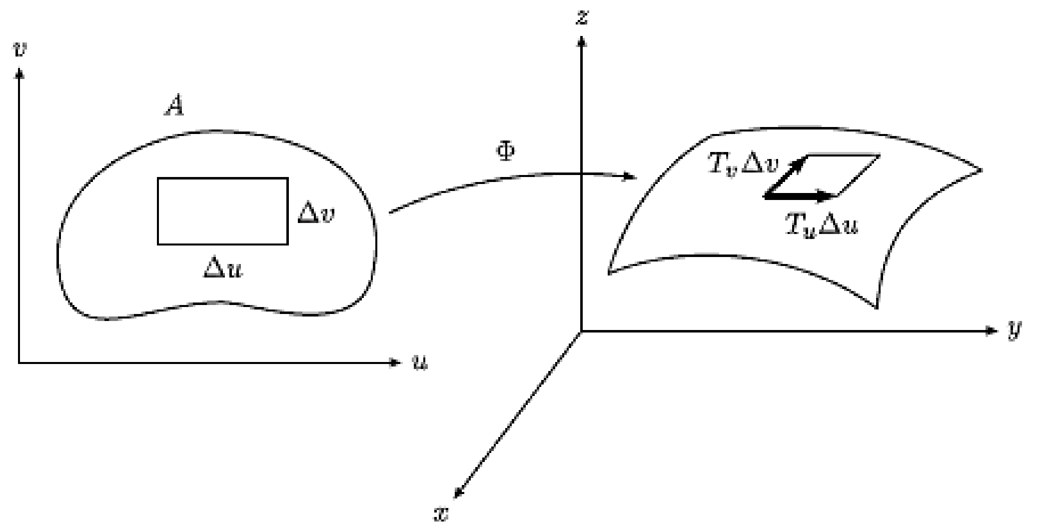
$\Phi(u_0, v_0)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης $v \rightsquigarrow \Phi(u_0, v)$ στο v_0:

$$\frac{\partial \Phi(u_0, v_0)}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)j = T_v.$$

Αν αφήσουμε να κινείται το u, τότε έχουμε το δεύτερο εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\frac{\partial \Phi(u_0, v_0)}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)j = T_u.$$

Η περίπτωση των δύο διαστάσεων (3)



Σχήμα 1

Η περίπτωση των δύο διαστάσεων (4)

Το διάνυσμα $\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial u}$, ως εφαπτομένη της u −καμπύλης, παριστά την ταχύτητα. Επομένως ένα σημείο που κινείται πάνω στη u −καμπύλη, σε χρόνο Δu διανύει απόσταση $\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial u}\Delta u$. όμοια, ένα σημείο επί της v −καμπύλης σε χρόνο Δv διανύει απόσταση $\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial v}\Delta v$. Άρα το στοιχειώδες παραλληλόγραμμο με πλευρές $\Delta u, \Delta v$ απεικονίζεται σε ένα καμπυλόγραμμο παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές είναι περίπου ίσες με

$$\frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial u}\Delta u, \qquad \frac{\partial\Phi(u,v)}{\partial v}\Delta v.$$

Η περίπτωση των δύο διαστάσεων (5)

Το εμβαδόν E αυτού του καμπυλόγραμμου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το μέτρο του εξωτερικού γινομένου των διανυσμάτων $\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} \Delta u$ και $\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v} \Delta v$, δηλαδή

$$E = \left\| \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v} \Delta v \right\|$$

$$= \left\| \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Έχουμε

$$\frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} k.$$

Η περίπτωση των δύο διαστάσεων (6)

Άρα,

$$E = \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u \Delta v = J(u,v) \Delta u \Delta v,$$

όπου $J(u,v)$ είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Παρατηρούμε δηλαδή ότι για να βρούμε το εμβαδόν της εικόνας του στοιχειώδους παραλληλογράμμου $\Delta u \Delta v$, πολλαπλασιάζουμε το $\Delta u \Delta v$ με την Ιακωβιανή ορίζουσα $J(u,v)$ του μετασχηματισμού.

Αν λοιπόν

$$\mathbb{R}^2 \supset D^* \xrightarrow{\Phi} \Phi(D^*) = D \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

Η περίπτωση των δύο διαστάσεων (7)

τότε, επειδή το ολοκλήρωμα είναι το όριο των αθροισμάτων Riemann, έχουμε

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{\Delta} f(x_i(u,v), y_i(u,v)) J(u_i, v_i)\, \Delta u_i \Delta v_i$$

$$= \iint_{D^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) J(u,v)\, du dv\,.$$

Προφανώς, κάνοντας την άθροιση στις καρτεσιανές συντεταγμένες, δηλαδή με τα στοιχειώδη παραλληλόγραμμα $\Delta x \Delta y$, θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα το οποίο δεν είναι άλλο από το $\iint_D \ f(x,y) dx dy$. Συνεπώς

$$\iint_{D^*} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) J(u,v)\, du dv = \iint_D \ f(x,y)\, dx dy\,.$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 11: Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης