ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 13: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή εισάγεται το μήκος καμπύλης και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Μήκος καμπύλης (1)

Μήκος καμπύλης

Έστω γ μια C^1 καμπύλη στο επίπεδο. Τίθενται δύο θεμελιώδη ερωτήματα:

- Ποιο είναι το μήκος της γ; Και
- Αν η γ είναι η τροχιά ενός σωματιδίου που κινείται υπό την επίδραση μιας δύναμης F, ποιο είναι το έργο που παράγεται μετά από χρόνο t;

Για να απαντηθούν τα ως άνω ερωτήματα χρειάζεται η εισαγωγή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

Ξεκινούμε με τον υπολογισμό του μήκους της γ.

Μήκος καμπύλης (2)

Η καμπύλη γ είναι η C^1 απεικόνιση

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \rightsquigarrow \gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big),$$

με συνιστώσες τις $x(t)$ και $y(t)$ και άκρα τα $\gamma(0)$ και $\gamma(1)$ (Σχ.1).

Ας είναι μία διαμέριση

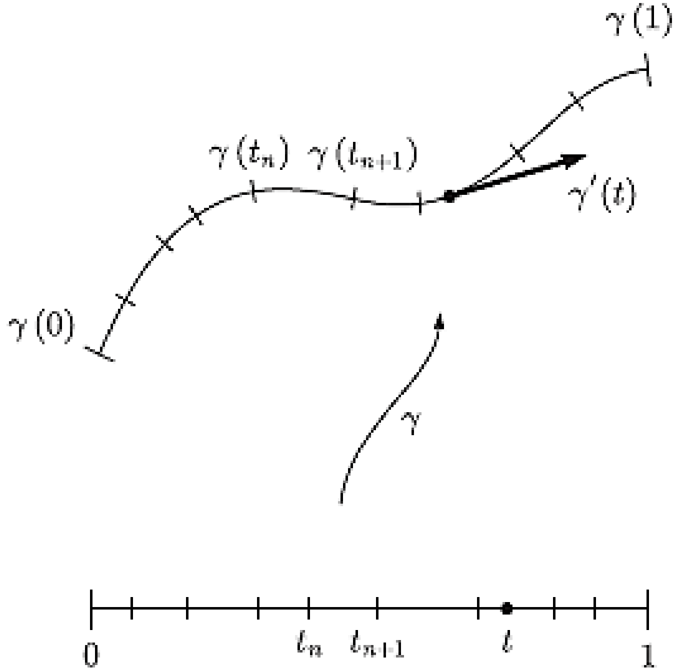
$$\gamma(0) = s_1 < \cdots < s_n = \gamma(1)$$

της γ που προέρχεται από μια διαμέριση

$$0 = t_1 < \cdots < t_n = 1$$

του [0,1].

Μήκος καμπύλης (3)



Σχήμα 1

Μήκος καμπύλης (4)

Το μήκος $L(\gamma)$ της γ προσεγγίζεται από το άθροισμα μηκών των στοιχειωδών τόξων Δ_{s_k}:

$$L(\gamma) \sim \sum L\left(\Delta_{s_k}\right)$$

Όμως, όταν τα μεγέθη είναι μικρά, το στοιχειώδες τόξο Δ_{s_k} ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζει η εφαπτομένη $\gamma'(\xi_k)$ της καμπύλης σε κάποιο $\xi_k \in (t_{k+1}, t_k)$. Επιπλέον, για κάθε $t \in (t_{k+1}, t_k)$,

$$\gamma'(t) \sim \gamma'(\xi_k)$$

Άρα, εφαρμόζοντας τον τύπο

Μήκος καμπύλης (5)

$$\delta\iota\alpha\sigma\tau\eta\mu\alpha = \tau\alpha\chi\acute{\upsilon}\tau\eta\tau\alpha \times \chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$$

έχουμε

$$\begin{aligned} L\left(\Delta_{s_k}\right) &\sim \|\gamma'(\xi_k)\|(t_{k+1}-t_k) \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'(\xi_k)\| dt \sim \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\sim \sum_k L\left(\Delta_{s_k}\right) \sim \sum_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\gamma'(t)\| dt \sim \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt\,. \end{aligned}$$

Μήκος καμπύλης (6)

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι το μήκος της καμπύλης δίδεται από τον τύπο

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt\,.$$

Παραδείγματος χάριν, για τον κύκλο

$$\gamma(t) = \{(r\sigma\upsilon\nu 2\pi t, r\eta\mu 2\pi t) \colon t \in (0,1)\}$$

με κέντρο το 0 και ακτίνα r, έχουμε

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(-r2\pi\ \eta\mu 2\pi t)^2 + (r2\pi\ \sigma\upsilon\nu 2\pi t)^2} dt = \int_0^1 r2\pi dt = 2\pi r$$

Μήκος καμπύλης (7)

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ επί της καμπύλης γ. Η μόνη διαφορά είναι ότι αντί των αθροισμάτων $\sum_k L\left(\Delta_{s_k}\right)$, τώρα χρησιμοποιούνται τα

$$\sum_k f(\xi_k) L\left(\Delta_{s_k}\right) \sim \sum f(\xi_k) \|\gamma'(\xi_k)\| (t_{k+1} - t_k)$$

$$= \sum \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\xi_k) \|\gamma'(\xi_k)\| dt \sim \sum \int_{t_k}^{t_{k+1}} f\big(\gamma(t)\big) \|\gamma'(t)\| dt$$

$$\to \int_0^1 f\big(\gamma(t)\big) \|\gamma'(t)\| dt\,.$$

Μήκος καμπύλης (8)

Ορίζουμε λοιπόν το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \, f$ της f επί της γ από τον τύπο

$$\int_\gamma \, f = \int_0^1 f\big(\gamma(t)\big)\|\gamma'(t)\|dt$$

$$= \int_0^1 f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt\,.$$

Τώρα που έχουμε την πείρα από όλα τα προηγούμενα ολοκληρώματα, μπορούμε να πούμε αμέσως ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f επί της γ, ως ολοκλήρωμα Riemann, υπάρχει εφόσον η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση

Μήκος καμπύλης (9)

$$f\big(\gamma(t)\big)\|\gamma'(t)\| = f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

έχει ασυνέχειες μέτρου μηδέν. Άρα δεν πρέπει να έχουμε κανέναν ενδοιασμό να ολοκληρώνουμε π.χ. συνεχείς συναρτήσεις επί τμηματικά λείων καμπυλών.

Παράδειγμα 1: (μήκος γραφήματος) Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, είναι μία C^1 συνάρτηση, τότε το μήκος του γραφήματος της f είναι ίσο με το μήκος της καμπύλης

$$\gamma(t) = \big(t, f(t)\big), t \in [a,b],$$

δηλαδή

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt\,.$$

Μήκος καμπύλης (10)

Προφανώς, ότι είπαμε για τις καμπύλες στο επίπεδο, ισχύει και για τις καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$. Έτσι, αν

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \qquad t \in [0,1]$$

είναι μια C^1 καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, τότε ο μήκος της δίνεται από τον τύπο

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt\,.$$

Π.χ. το μήκος του αρχικού κομματιού του ατέρμον κοχλία

$$\gamma(t) = (\sigma\upsilon\nu 2\pi t, \eta\mu 2\pi t, 2\pi t), \qquad t \in [0,1]$$

είναι ίσο με

Μήκος καμπύλης (11)

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{(-2\pi\eta\mu 2\pi t)^2 + (-2\pi\sigma\upsilon\nu 2\pi t)^2 + (2\pi)^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+1} dt = 2\pi\sqrt{2}.$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (1)

Ας είναι

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \qquad t \in [0,1]$$

μια C^1 καμπύλη στον $\mathbb{R}^3$, και

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

ένα C^1 διανυσματικό πεδίο. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του F επί της γ ορίζεται ως εξής:

$$\int_\gamma F = \int_0^1 \langle F\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle dt$$

$$= \int_0^1 P\big(x(t), y(t), z(t)\big) x'(t) dt + \int_0^1 Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) y'(t) dt$$

$$+ \int_0^1 R\big(x(t), y(t), z(t)\big) z'(t) dt\,.$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (2)

Στα εγχειρίδια συνήθως συμβολίζεται με

$$\int_{\gamma} f = \int_{0}^{1} Pdx + Qdy + Pdz\,,$$

αφού

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = x'(t)dt,$$

κλπ.

Ο λόγος της μελέτης τέτοιων ολοκληρωμάτων είναι η παρουσία τους σε διάφορα μεγέθη της Φυσικής. Το παρακάτω παράδειγμα θα σας πείσει.

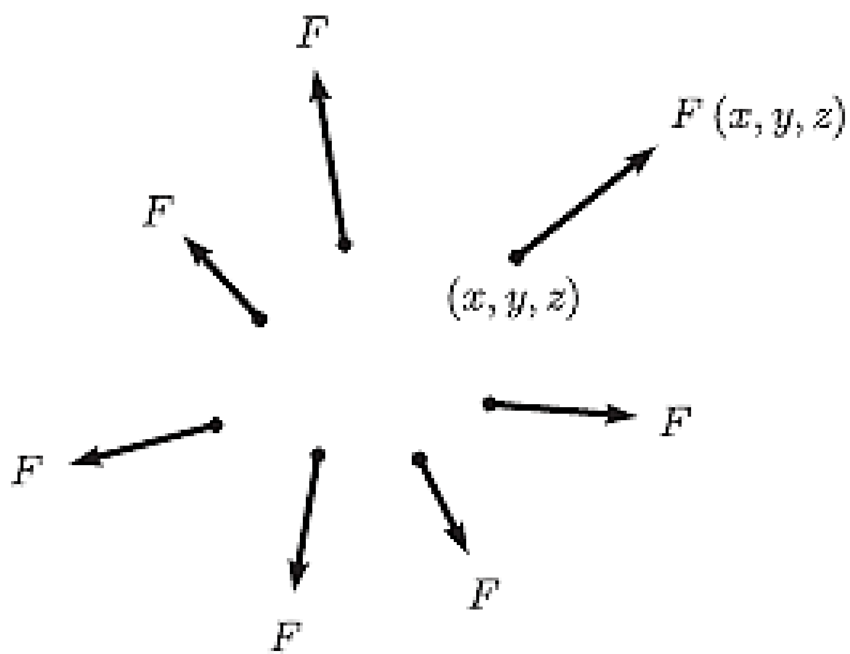
Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (3)

Παράδειγμα 2 (έργο δύναμης) Ας είναι $F(x, y, z)$ ένα πεδίο δυνάμεων στον χώρο, δηλαδή μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbb{R}^3 \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ (Σχ.2).

Τα κλασσικά παραδείγματα τέτοιων πεδίων είναι το βαρυτικό και το ηλεκτρικό πεδίο, με F το βάρος ή την ηλεκτρική έλξη (ή απώθηση), αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ένα σωματίδιο q (μάζα ή ηλεκτρικό φορτίο) ταξιδεύει μέσα στο πεδίο, και η τροχιά του είναι η C^1 καμπύλη γ.

Το ακόλουθο ερώτημα είναι φυσιολογικό: Ποιο είναι το έργο W που παρήχθη κατά το ταξίδι του σωματιδίου q επί της καμπύλης γ;

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (4)



Σχήμα 2

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (5)

Λύση: Κοιτάζουμε πρώτα την πιο εύκολη περίπτωση.

1. Η γ είναι ευθεία και η F σταθερή. Αν F_1 είναι η συνιστώσα της F επί της γ, τότε από την Φυσική του Λυκείου, έχουμε

$$W = \|F_1\| \times L(\gamma) = \int_0^1 \|F_1\| \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \int_0^1 \left\|F_1\big(\gamma(t)\big)\right\| \|\gamma'(t)\| dt$$

$$= \int_0^1 \left\|F_1\big(\gamma(t)\big)\right\| \|\gamma'(t)\| \sigma\upsilon\nu\theta dt$$

$$= \int_0^1 \langle F\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle dt\,,$$

όπου θ είναι γωνία της F με τη γ.

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (6)

2. Η γενική περίπτωση. Κόβουμε την γ σε μικρά τόξα $\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\big)$, τα οποία θεωρούμε περίπου ευθείες. Επί των τόξων αυτών η δύναμη F είναι περίπου σταθερά. Άρα από την πρώτη περίπτωση, το έργο W_i επί του $\big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\big)$ είναι
$$W_i \sim \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle F\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle dt \to \int_0^1 \langle F\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle dt\,,$$

Άρα, το έργο επί της γ δίδεται από το άθροισμα δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου F επί της καμπύλης γ.

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (7)

Ας δώσουμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 3: Αν

$$F(x,y,z) = (x, y+1, z^2)$$

και

$$\gamma(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, t), \qquad t \in [0,2\pi]$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\gamma F$.

Λύση: Έχουμε, από τον ορισμό,

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \langle F\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle dt$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (8)

$$= \int_0^{2\pi} \{F_1\big(\gamma(t)\big)x'(t) + F_2\big(\gamma(t)\big)y'(t) + F_3\big(\gamma(t)\big)z'(t)\}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \{x(t)x'(t) + \big(y(t) + x(t)\big)y'(t) + z^2(t)z'(t)\}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \{\sigma\upsilon\nu t(\sigma\upsilon\nu t)' + (\eta\mu t + 1)(\eta\mu t)' + t^2(t)'\}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \{-\sigma\upsilon\nu t\, \eta\mu t + \eta\mu t\, \sigma\upsilon\nu t + (\eta\mu t)' + t^2\}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \{(\eta\mu t)' + t^2\}dt = \frac{(2\pi)^3}{3}.$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (9)

Παράδειγμα 4: Αν $F(x,y,z)=(x,y,z)$ και $\gamma(t)$ είναι ο κύκλος

$$(0,\sigma\upsilon\nu t,\eta\mu t), t\in[0,2\pi],$$

να υπολογιστεί τον ολοκλήρωμα $\int_\gamma F$.

Λύση: Ας το δούμε πρώτα γεωμετρικά. Η δύναμη F είναι κάθετη στην σφαίρα

$$S_2(0,1)=\{g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=1\}.$$

Πράγματι, η κάθετη στην σφαίρα είναι το διάνυσμα

$$\frac{\nabla \mathrm{g}(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|}=\frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}=\frac{2(x,y,z)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$=(x,y,z)=F(x,y,z).$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (10)

Η F λοιπόν είναι κάθετη στην σφαίρα $S_2(0,1)$ και συνεπώς και στον μεσημβρινό της κύκλο $\gamma(t)$. Άρα η δύναμη δεν παράγει έργο καθώς κινείται επί της γ.

Μπορούμε επίσης να το δούμε πιο εύκολα απευθείας, αφού

$$\begin{aligned}\langle F\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle \\ &= x(t)x'(t) + \big(y(t) + x(t)\big)y'(t) + z^2(t)z'(t) \\ &= 0 + \sigma\upsilon\nu t(\sigma\upsilon\nu t)' + (\eta\mu t)(\eta\mu t)' \\ &= -\sigma\upsilon\nu t\,\eta\mu t + \eta\mu t\,\sigma\upsilon\nu t = 0.\end{aligned}$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (11)

Παρατήρηση: Το πρόσημο του επικαμπύλιου ολοκληρώματος εξαρτάται από την φορά που διασχίζουμε την καμπύλη. Και είναι φυσικό, αφού αλλάζουμε τα όρια ολοκλήρωσης. Πράγματι, η αντίθετη καμπύλη γ_{op} της $\gamma(t)$, είναι η καμπύλη που έχει ακριβώς το ίδιο ίχνος με την γ, αρχή το τέλος της γ κα τέλος την αρχή της γ (Σχ.3)

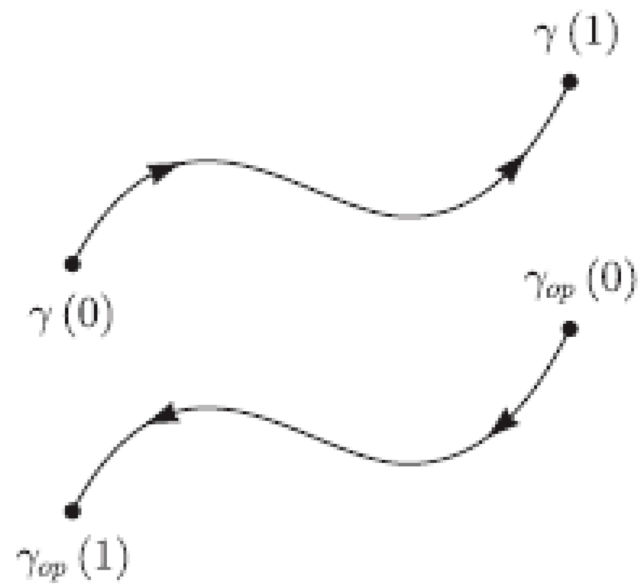
Με άλλα λόγια, έχει την ακόλουθη παραμετρικοποίηση

$$\gamma_{op}(t) = \gamma(a+b-t), \qquad t \in (a,b)$$

Οπότε,

$$\gamma_{op}(a) = \gamma(b) \text{ και } \gamma_{op}(b) = \gamma(a).$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (12)



Σχήμα 3

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (13)

Ας γυρίσουμε στο επικαμπύλιο. Έχουμε την πρόταση:

Πρόταση 1: Αν F είναι C^1 διανυσματικό πεδίο, τότε

$$\int_{\gamma} F = -\int_{\gamma_{op}} F$$

Απόδειξη: Είναι μια απλή αλλαγή μεταβλητής:

$$\int_{\gamma_{op}} F = \int_a^b \langle F\big(\gamma_{op}(t), {\gamma_{op}}'(t)\big)\rangle dt = \int_a^b \langle F\big(\gamma(a+b-t), -\gamma'^{(a+b-t)}\big)\rangle dt$$

$$= \int_a^b \langle F\big(\gamma(s), -\gamma'^{(s)}\big)\rangle(-ds) -= \int_a^b \langle F\big(\gamma(s), -\gamma'^{(s)}\big)\rangle ds$$

$$= -\int_{\gamma} F\,.$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (14)

Δίνουμε την έκφραση του Θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού στα επικαμπύλια:

Πρόταση 2: Αν $\mathbb{R}^3 \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ είναι C^1 και $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ είναι μια C^1 καμπύλη, τότε

$$\int_{\gamma} \nabla f = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big),$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης και όχι από την ίδια την καμπύλη.

Απόδειξη: Πράγματι,

$$\langle \nabla f\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle = (f o \gamma)'(t)$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (15)

και συνεπώς

$$\int_\gamma \nabla f = \int_a^b \langle \nabla f\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle dt = \int_a^b (f o \gamma)'(t) dt = f\big(\gamma(b)\big) - f\big(\gamma(a)\big).$$

Έχουμε το άμεσο

Πόρισμα

1. Αν η γ_1 έχει την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος με την γ, τότε

$$\int_\gamma \nabla f = \int_{\gamma_1} \nabla f\,.$$

2. Αν η γ είναι κλειστή καμπύλη, δηλαδή $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε

$$\int_\gamma \nabla f = 0.$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (16)

Παράδειγμα 5: Να υπολογιστεί το

$$\int_\gamma \; ydx + xdy\,,$$

αν $\gamma(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \eta\mu^3 \frac{\pi t}{2}\right), t \in [0,1]$.

Λύση: Αν $f(x,y) = xy$, τότε

$$\nabla f(x,y) = (y,x).$$

Άρα

$$\int_\gamma \; \nabla f = \int_\gamma \; ydx + xdy = \int_0^1 \{y(t)x'(t) + x(t)y'(t)\}dt$$

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (17)

$$= \int_0^1 \langle \nabla f\big(x(t), y(t)\big), \gamma'(t) \rangle dt = \int_\gamma \nabla f$$

$$= f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = \frac{1}{4} \eta\mu^3 \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Τελειώνουμε την παράγραφο αυτή με το έργο και την σχέση του με την κινητική ενέργεια.

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (18)

Παράδειγμα 6: Ας υποθέσουμε ότι ένα αντικείμενο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης F επί της καμπύλης γ. Από το νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι

$$F\big(\gamma(t)\big) = m\gamma''(t).$$

Επίσης, είναι γνωστό από την Μηχανική ότι η ταχύτητα του είναι ίση με $\gamma'(t)$ και η κινητική ενέργεια με

$$E(t) = \frac{1}{2}m\|\gamma'(t)\|^2.$$

Όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, το έργο W που παράγεται από την κίνηση δίδεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Το επικαμπύλιο διανυσματικών πεδίων (19)

$$W = \int_\gamma F = \int_a^b \langle F\big(\gamma(t), \gamma'(t)\big)\rangle dt = m\int_a^b \langle \gamma''^{(t)}, \gamma'(t)\rangle dt$$

$$= m\int_a^b \frac{1}{2}\partial_t \langle \gamma'^{(t)}, \gamma'(t)\rangle dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_a^b \partial_t \|\gamma'(t)\|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2} m\|\gamma'(b)\|^2 - \frac{1}{2} m\|\gamma'(a)\|^2 = E(b) - E(a),$$

δηλαδή το παραχθέν έργο είναι ίσο με την διαφορά της κινητικής ενέργειας στα άκρα της καμπύλης.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης