ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 14: Το θεώρημα του Green.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Το θεώρημα του Green.
   i. Διανυσματική μορφή του Green.
   ii. Το θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο.

Σκοποί ενότητας

Αποδεικνύεται το βασικό θεώρημα Green που σε ορισμένες περιπτώσεις, συνδέει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με το διπλό ολοκλήρωμα, και το πόρισμα του δηλαδή το θεώρημα της απόκλισης.

Θεώρημα του Green (1)

Το ακόλουθο θεώρημα είναι το κεντρικό θεώρημα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 1 (Green) Αν το χωρίο $A \subset \mathbb{R}^3$είναι τύπου 3 και $P, Q: A \to \mathbb{R}$ είναι C^1, τότε

$$\int_{\partial A} Pdx + Qdy = \iint_A \left(\partial_x Q - \partial_y P\right) dxdy\,.$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\partial A} Pdx = -\iint_A \partial_y P dxdy\,, \qquad (1)$$

και

Θεώρημα του Green (2)

$$\int_{\partial A} Q dy = \iint_A \partial_x Q dx dy\,, \qquad (2)$$

Ας δείξουμε την (1) .Η (2) είναι παρόμοια. Κοιτάζουμε το Σχήμα 1 και παραμετρικοποιούμε το ∂A ως εξής:

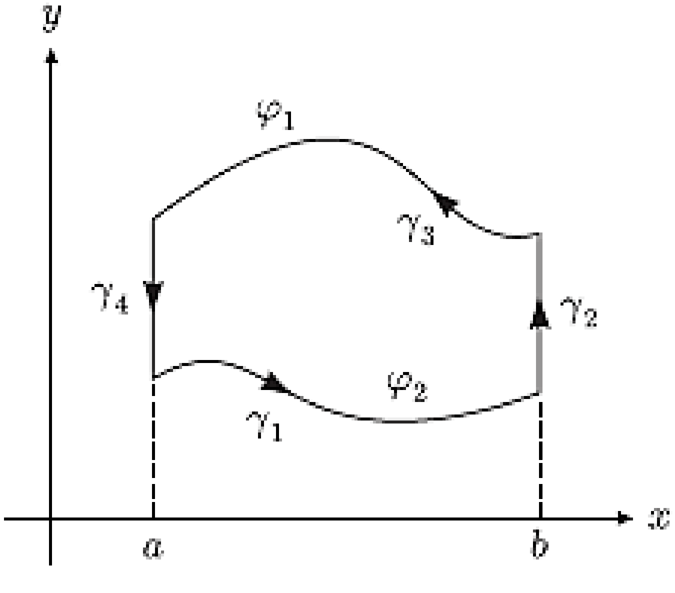
$$\partial A = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$

όπου

$$\gamma_1(t) = \big(t, \varphi_1(t)\big), \qquad t \in (a, b),$$

αφού η γ_1 είναι το γράφημα της φ_1.

Θεώρημα του Green (3)



Σχήμα 1

Θεώρημα του Green (4)

Στην συνέχεια,

$$\gamma_2(t) = (b, t), \qquad t \in (\varphi_1(b), \varphi_2(b)),$$

και

$$\gamma_3^{op}(t) = \big(t, \varphi_2(t)\big), \qquad t \in (a, b)$$

Τέλος,

$$\gamma_3^{op}(t) = (a, t), \qquad t \in (\varphi_1(b), \varphi_2(b)).$$

Με Fubini έχουμε

$$\iint_A \partial_y P dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \partial_y P(x, y) dy$$

$$= \int_a^b \big\{P\big(x, \varphi_2(x)\big) - P\big(x, \varphi_1(x)\big)\big\} dx\,, \qquad (3)$$

Θεώρημα του Green (5)

Από την παραμετρικοποίηση του συνόρου ∂A συνάγεται ότι

$$\int_{\partial A} Pdx = \int_{\gamma_1} Pdx + \int_{\gamma_2} Pdx + \int_{\gamma_3} Pdx + \int_{\gamma_4} Pdx$$

$$= \int_{\gamma_1} Pdx + \int_{\gamma_3} Pdx \ \ (x'(t) = 0 \ \varepsilon\pi\iota \ \tau\omega\nu \ \gamma_2, \gamma_4)$$

$$= \int_a^b P(\gamma_1(t))x'(t)dt - \int_a^b P(\gamma_3(t))x'(t)dt$$

$$= \int_a^b P\big(t, \varphi_1(t)\big)x'(t)dt - \int_a^b P\big(t, \varphi_2(t)\big)x'(t)dt$$

$$= -\iint_A \partial_y P dxdy \, .$$

Θεώρημα του Green (6)

Παράδειγμα 1: Αν $P(x,y) = x, Q(x,y) = y$, και $A = D(0,1)$, να γίνει επαλήθευση του Green.

Λύση: Επί της περιφέρειας $\partial D = S(0,1)$, έχουμε $x = \sigma\upsilon\nu t$ και $y = \eta\mu t$. Άρα

$$\iint_{\partial D} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} x(t)x'(t)dt + \int_0^{2\pi} y(t)y'(t)dt$$

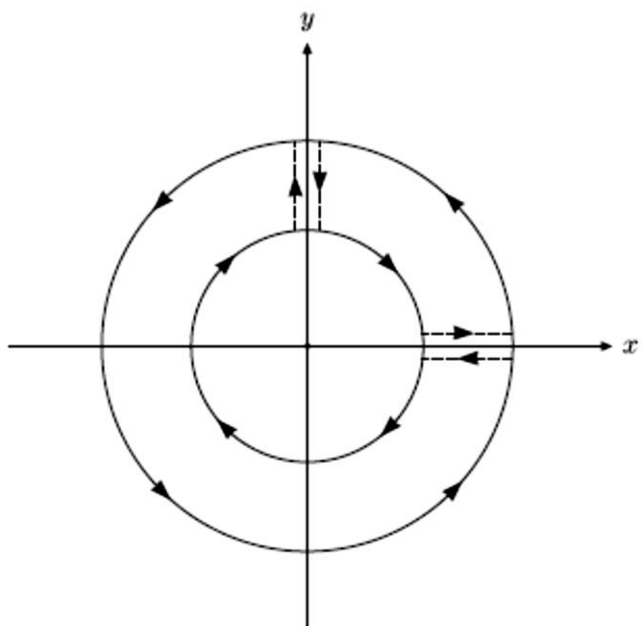
$$= -\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu t\,\eta\mu t dt + \int_0^{2\pi} \eta\mu t \sigma\upsilon\nu t dt = 0.$$

Επίσης, $\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y) = 0$, άρα

$$\iint_D \left(\partial_x Q - \partial_y P\right) dxdy = 0.$$

Θεώρημα του Green (7)

Παρατήρηση: Ο Green εφαρμόζεται σε μια κατηγορία χωρίων σαφώς μεγαλύτερη από αυτή των πεδίων τύπου 3. Εφαρμόζεται π.χ. σε χωρία που δεν είναι τύπου 3, αλλά διασπώνται σε τέτοια. Το κλασικό παράδειγμα είναι ο δακτύλιος του Σχ. 2.



Σχήμα 2

Θεώρημα του Green (8)

Παράδειγμα 2 (Εμβαδόν χωρίου): Αν $A \subset \mathbb{R}^2$, και ο Green εφαρμόζεται, τότε το εμβαδόν του δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$|A| = \frac{1}{2}\int_{\partial A} xdy - ydx\,.$$

Πράγματι, θέτοντας $P = -y$ και $Q = x$, έχουμε

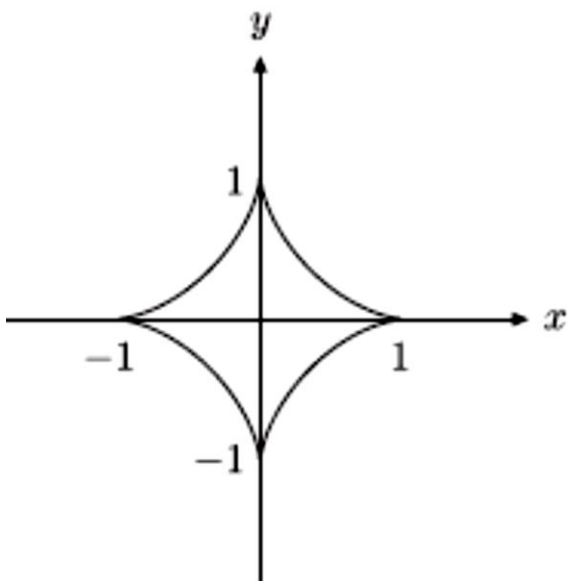
$$\int_{\partial A} xdy - ydx = \int_{\partial A} Qdy + Pdx =$$

$$\iint_{A} \left(\partial_x Q - \partial_y P\right)dxdy =$$

$$\iint_{A} (1+1)dxdy = 2|A|.$$

Θεώρημα του Green (9)

Παράδειγμα 3: Αν A είναι το υπο-κυκλοειδές
$$x^{3/2} + y^{3/2} = 1,$$
του Σχ.3, τότε χρησιμοποιώντας την παραμετρικοποίηση
$$x = \sigma\upsilon\nu^3 t \text{ και } y = \eta\mu^3 t, \quad t \in (0,2\pi)$$
να υπολογιστεί το εμβαδόν του.



Σχήμα 3

Θεώρημα του Green (10)

Λύση: Έχουμε

$$|A| = \frac{1}{2}\int_{\partial A} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu^3 t\,(\eta\mu^3 t)' - (\eta\mu^3 t)(\sigma\upsilon\nu^3 t)')dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu^4 t\,\eta\mu^2 t - \eta\mu^4 t\sigma\upsilon\nu^2 t)dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu^2 t\eta\mu^2 t(\sigma\upsilon\nu^2 t + \eta\mu^2 t)dt$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu^2 t\eta\mu^2 t dt = \frac{3}{8}\pi,$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται περνώντας π.χ. στα διπλάσια τόξα.

Διανυσματική μορφή του Green (1)

Αν το $F = Pi + Qj$ είναι C^1 και το χωρίο A είναι καλό, τότε

$$\int_{\partial A} F = \iint_A \langle rotF, \vec{k} \rangle dxdy = \iint_A \langle \nabla \times F, \vec{k} \rangle dxdy\,,$$

όπου η περιστροφή ή η στροφή $rotF = \nabla \times F$, δίνεται ως γνωστόν από τον τύπο:

$$rotF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \partial_z Qi + \partial_z Pj + \left(\partial_x Q - \partial_y P\right)k = \left(\partial_x Q - \partial_y P\right)k,$$

αφού τα P, Q είναι ανεξάρτητα του z.

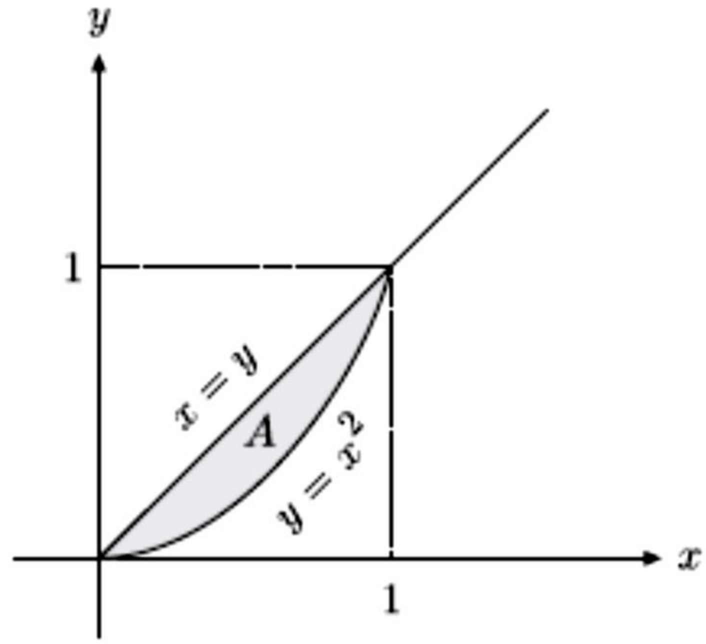
Διανυσματική μορφή του Green (2)

Συνεπώς
$$\langle \nabla \times F, \vec{k} \rangle = \langle \left(\partial_x Q - \partial_y P\right)\vec{k}, \vec{k} \rangle = \partial_x Q - \partial_y P.$$
Άρα, από τον Green,
$$\iint_A \langle \nabla \times F, \vec{k} \rangle dxdy = \iint_A \left(\partial_x Q - \partial_y P\right) dxdy = \int_{\partial A} F\,.$$
Παράδειγμα 4: Έστω A το χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x$ (Σχ.40), και $F = (xy^2, x + y)$.

1. Χρησιμοποιώντας διπλά ολοκληρώματα, να υπολογιστεί το
$$I = \iint_A \langle \nabla \times F, \vec{k} \rangle dxdy\,.$$

Διανυσματική μορφή του Green (3)

2. Να υπολογιστεί το I με τη βοήθεια του Green.



Σχήμα 4

Διανυσματική μορφή του Green (4)

Λύση: (1) Έχουμε

$$\langle \nabla \times F, \vec{k} \rangle = (1 - 2xy),$$

και

$$\iint_A (1 - 2xy)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (1 - 2xy)dy$$

$$= \int_0^1 [y - xy^2]_{y=x^2}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2 - x^3 - x^5)dx = \frac{1}{12}.$$

(2) Έχουμε

Διανυσματική μορφή του Green (5)

$$\iint_A \langle rotF, \vec{k} \rangle dxdy = \int_{\partial A} F$$

$$= \int_{\gamma_1} Qdy + Pdx + \int_{\gamma_2^{op}} Qdy + Pdx$$

$$= \int_{\gamma_1} Qdy + Pdx - \int_{\gamma_2} Qdy + Pdx\,,$$

όπου

$$\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) = (t, t^2),$$

και

$$\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t)) = (t, t),$$

για $t \in (0,1)$.

Διανυσματική μορφή του Green (6)

Άρα

$$\int_{\partial A} F = \int_0^1 \Big(\{x_1(t) + y_1(t)\}y_1'(t) + x_1(t)y_1^2(t)x_1'(t)\Big)\,dt -$$

$$-\int_0^1 \Big(\{x_2(t) + y_2(t)\}y_2'(t) + x_2(t)y_2^2(t)x_2'(t)\Big)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (\{t + t^2\}2t + tt^4)dt - \int_0^1 (\{t + t\} + tt^2)dt$$

$$= \int_0^1 (t^5 + t^3 + 2t^2 - 2t)dt = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{12}.$$

Το θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο (1)

Μία επαναδιατύπωση του θεωρήματος Green είναι το επόμενο θεώρημα της απόκλισης. Θυμίζουμε ότι η απόκλιση ενός πεδίου $F = Pi + Qj$ είναι η πραγματική συνάρτηση

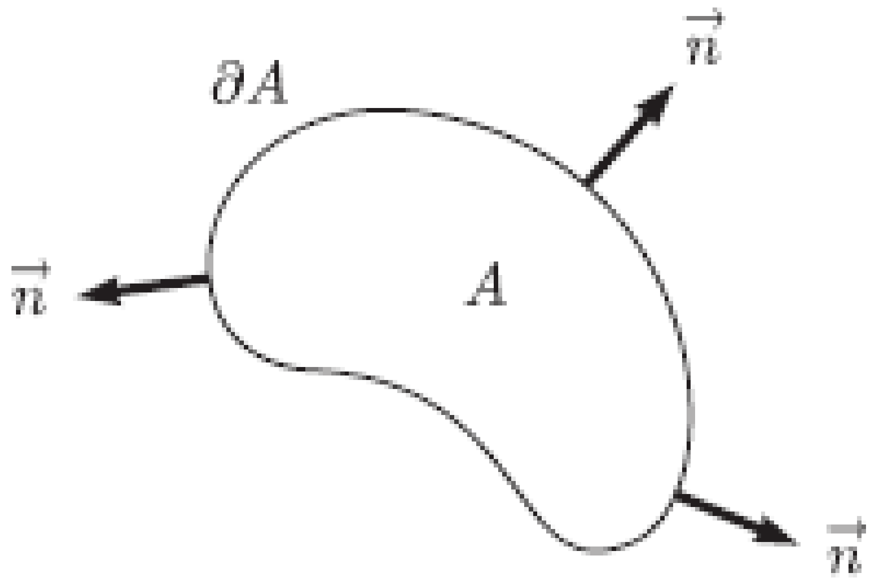
$$divF = \partial_x P + \partial_y Q.$$

Θεώρημα 1: Αν το $F = Pi + Qj$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο και το χωρίο A είναι π.χ. ανοιχτό με C^1 σύνορο, τότε

$$\int_{\partial A} \langle F, \vec{n} \rangle = \iint_A divFdxdy\,,$$

όπου $\vec{n}$ είναι η εξωτερική μοναδιαία κάθετος στο ∂A (Σχ.5)

Το θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο (2)



Σχήμα 5

Το θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο (3)

Απόδειξη: Αν $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big), t \in [0,1]$, είναι μια παραμετρικοποίηση του συνόρου ∂A, τότε η μοναδιαία κάθετος $\vec{n}$ δίνεται ως γνωστόν από τον τύπο

$$\vec{n}(t) = \frac{y'(t)i - x'(t)j}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

Πράγματι,

$$\|\vec{n}(t)\|^2 = \langle \vec{n}(t), \vec{n}(t) \rangle = \frac{y'(t)^2 + x'(t)^2}{x'(t)^2 + y'(t)^2} = 1$$

και το $\vec{n}(t)$ είναι κάθετο στην εφαπτομένη $\gamma'(t)$ της καμπύλης:

Το θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο (4)

$$\langle \vec{n}(t), \gamma'(t) \rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \langle y'(t)i - x'(t)j, x'(t)i + y'(t)j \rangle$$
$$= 0.$$

Επομένως, από τον ορισμό έχουμε

$$\int_{\partial A} \langle F, n \rangle = \int_0^1 \langle F, n \rangle \big(\gamma(t)\big) \|\gamma'(t)\| dt$$
$$= \int_0^1 \frac{Py'(t) - Qx'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$
$$= \int_0^1 \big(Py'(t) - Qx'(t)\big) dt = \int_{\partial A} Pdy - Qdx$$

Το θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο (5)

$$= \iint_A \left(\partial_y P + \partial_x Q\right) dxdy$$

$$= \iint_A divF dxdy \,,$$

όπου στο προτελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιήσαμε Green.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 14: Το θεώρημα του Green». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης