ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 1: Εισαγωγή.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

Εισαγωγή: Το διπλό ολοκλήρωμα, η αρχή του Cavalieri.

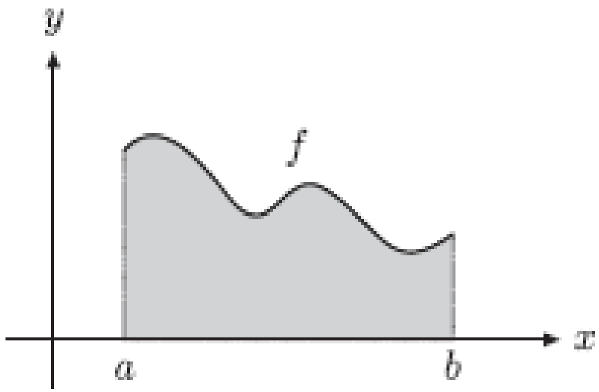
Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή δίνεται ο ορισμός του διπλού ολοκληρώματος και υπολογίζουμε διπλά ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας την αρχή του Cavalieri.

Το διπλό ολοκλήρωμα (1)

Ας ξεκινήσουμε με μια οικεία εικόνα του Ολοκληρωτικού Λογισμού συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι θετική και συνεχής (δες Σχήμα 1), τότε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f δίδεται ως γνωστόν από το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx\,.$$



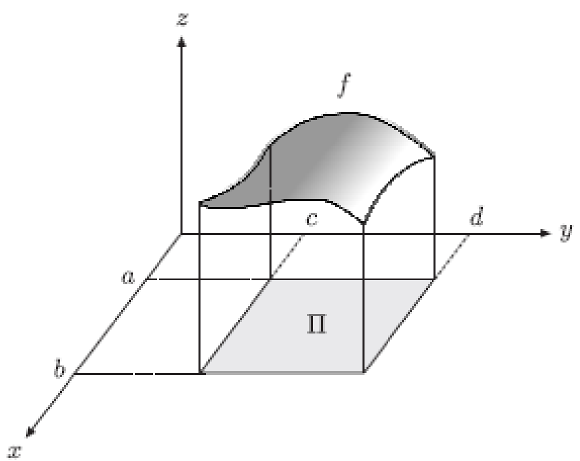
Σχήμα 1

Το διπλό ολοκλήρωμα (2)

Το αντίστοιχο ερώτημα για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x,y)$ που ορίζεται πάνω σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ είναι το ακόλουθο: Αν

$$f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$$

είναι συνεχής και θετική, τι μπορεί να είναι ο όγκος V του στερεού που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f;



Σχήμα 2

Το διπλό ολοκλήρωμα (3)

Το στερεό του Σχήματος 2 σίγουρα έχει κάποιον όγκο V που τον συμβολίζουμε ως εξής:

$$V = \int_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_{\Pi} f \, .$$

Τον ονομάζουμε **διπλό ολοκλήρωμα** της $f(x,y)$ επί του ορθογωνίου Π. Πως άραγε μπορούμε να ορίσουμε, και εν συνεχεία να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ επί του ορθογωνίου Π;

Πρίν, ας θυμηθούμε τον ορισμό του ολοκληρώματος

$$\int_a^b f(x)dx$$

στην διάσταση 1.

Το διπλό ολοκλήρωμα (4)

Αν

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

είναι μία διαμέριση Δ του διαστήματος $[a, b]$, τότε σχηματίζουμε τα αθροίσματα Riemann $R_\Delta(f)$ της $f(x)$:

$$R_\Delta(f) = \sum_{0 \le j \le n-1} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j), \qquad \xi_j \in [x_j, x_{j+1}].$$

Το ολοκλήρωμα Riemann

$$\int_a^b f(x)dx$$

ορίζεται σαν το όριο των αθροισμάτων Riemann $R_\Delta(f)$ καθώς

Το διπλό ολοκλήρωμα (5)

το βήμα

$$\delta = \max_{0 \le j \le n-1} \left(x_{j+1} - x_j \right)$$

της διαμέρισης Δ τείνει στο 0.

Στην περίπτωση των συναρτήσεων δύο μεταβλητών που ορίζονται πάνω σε ένα ορθογώνιο $\Pi = [a, b] \times [c, d]$, κάνουμε ακριβώς το ίδιο. Μία διαμέριση

$$\Delta_1 \colon \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

του $[a, b]$, και μια διαμέριση

$$\Delta_2 \colon \; c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$$

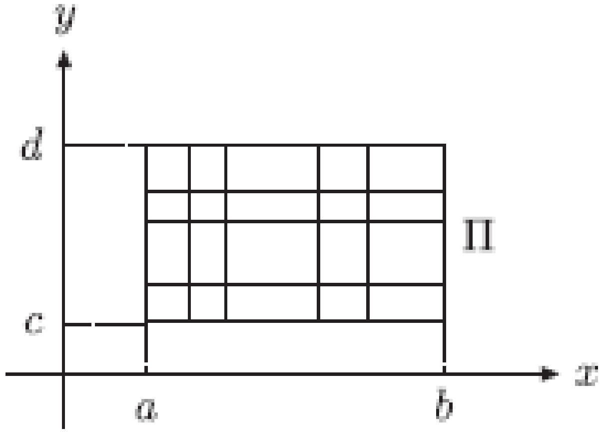
του $[c, d]$,

Το διπλό ολοκλήρωμα (6)

δίνουν μια διαμέριση του ορθογωνίου $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ στα ορθογώνια

$$S_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_i, y_{i+1}],$$

όπως στο επόμενο σχήμα.



Σχήμα 3

Το διπλό ολοκλήρωμα (7)

Σχηματίζουμε λοιπόν τα αθροίσματα Riemann της $f(x, y)$

$$R_\Delta(f) = \sum_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le n-1}} f(\xi_j, \eta_j)|S_{ij}|, \qquad (\xi_j, \eta_j) \in S_{ij},$$

όπου

$$S_{ij} = (x_{i+1} - x_i) \times (y_{j+1} - y_j)$$

είναι το εμβαδόν του S_{ij}. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Riemann

$$\iint_\Pi f(x, y) dxdy$$

της $f(x, y)$ ως το όριο, εφόσον βέβαια υπάρχει, των ως άνω

Το διπλό ολοκλήρωμα (8)

αθροισμάτων Riemann, καθώς το βήμα της διαμέρισης

$$\delta = \max_{i,j} \delta_{ij} = \max_{i,j} diamS_{ij}$$

τείνει στο 0. Θυμίζουμε ότι $diamS_{ij}$ είναι η διάμετρος του ορθογωνίου S_{ij}.

Θα δούμε στη συνέχεια ότι μια συνεχής συνάρτηση επί ενός ορθογωνίου είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Προηγείται όμως η εξέταση του παρακάτω ουσιώδους ερωτήματος: Πώς άραγε μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy$$

μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x,y)$;

Το διπλό ολοκλήρωμα (9)

Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση της μιας μεταβλητής, την απάντηση στο ως άνω ερώτημα την δίνει το Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

όπου F είναι μία αντιπαράγωγος της f. Δυστυχώς στις πολλές μεταβλητές δεν υπάρχει αντίστοιχο θεώρημα. Από την δυσκολία αυτή μας έβγαλαν, καταρχήν ο Αρχιμήδης και πολύ αργότερα ο μαθητής του Γαλιλαίου Cavalieri.

Η αρχή του Cavalieri (1)

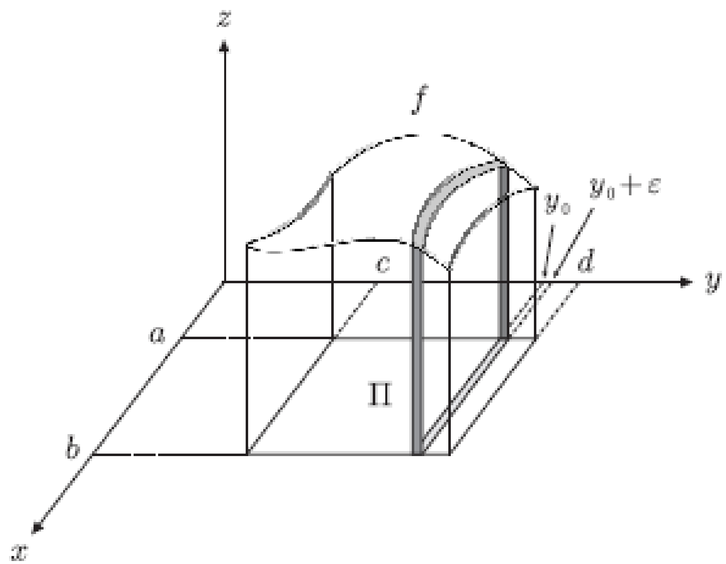
Για τον υπολογισμό του όγκου V που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνεχούς και θετικής συνάρτησης $f(x,y)$, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Κόβουμε μια λεπτή φέτα V_ε του όγκου V παράλληλα με το επίπεδο xOz, αυτήν ακριβώς που βρίσκεται πάνω από το ορθογώνιο

$$\Pi_\varepsilon = [a,b] \times [y_0 + \varepsilon, y_0],$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.

Η αρχή του Cavalieri (2)



Σχήμα 4

Η αρχή του Cavalieri (3)

Θεωρούμε ως βάση της φέτας την αριστερή κάθετη πλευρά.
Η βάση αυτή έχει εμβαδόν ίσο με

$$\int_a^b f(x, y_0)dx$$

Έτσι ο όγκος V_ε υπολογίζεται ως εξής:

$$V_\varepsilon = \varepsilon\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \beta\alpha\sigma\eta\varsigma\ \times\ \acute{\upsilon}\psi o\varsigma$$

$$= \int_a^b f(x, y_0)dx \times (y_0 + \varepsilon - y_0) = \varepsilon \int_a^b f(x, y_0)dx\,.$$

Αν τώρα κόψουμε σε τέτοιες μικρές φέτες το στερεό και αθροίσουμε τους όγκους $V_{\varepsilon 1}, V_{\varepsilon 2}, \dots, V_{\varepsilon n}$ που προκύπτουν, έχουμε

Η αρχή του Cavalieri (4)

$$
\begin{aligned}
V = V_{\varepsilon_1} + V_{\varepsilon_2} + \cdots + V_{\varepsilon_n} &= \sum_{1 \le j \le n} V_{\varepsilon_j} \\
&= \sum_{1 \le j \le n} \left(\int_a^b f(x, y_0) dx \right) \varepsilon_j \\
&= \sum_{1 \le j \le n} F(y_j)(y_j + \varepsilon_j - y_j),
\end{aligned}
$$

όπου

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx\,.$$

Η αρχή του Cavalieri (5)

Τα ως άνω αθροίσματα Riemann της F συγκλίνουν στο

$$\int_c^d F(y)dy\,.$$

καθώς $\max \varepsilon_j \to 0$. Έτσι

$$V = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy,$$

δηλαδή, για να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

ολοκληρώνουμε την $f(x,y)$ πρώτα ως προς x θεωρώντας το y σταθερό, και στην συνέχεια ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα ως προς y.

Η αρχή του Cavalieri (6)

Ας δώσουμε ένα απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα. Αν

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

και $\Pi = [-1,1] \times [0,1]$,

τότε έχουμε

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=-1}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = \frac{4}{3}.$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Η αρχή του Cavalieri (7)

Παρατηρούμε ότι στην εφαρμογή της αρχής του Cavalieri, μπορούμε να κόψουμε τις φέτες διαφορετικά, δηλαδή παράλληλα προς το επίπεδο yOz. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι ο όγκος

$$V = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

είναι ίσος με το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx,$$

το οποίο λέγεται επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα.

Η αρχή του Cavalieri (8)

Θα δούμε στη συνέχεια ότι για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τα επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy \text{ και } \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

είναι ίσα μεταξύ τους και ισούνται με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy\,.$$

Αυτό μας το εγγυάται ένα από τα κεντρικά θεωρήματα του μαθήματος, το Θεώρημα του Fubini.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

«Λογισμός 4. Ενότητα 1: Εισαγωγή». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης