Λογισμός 4

Ενότητα 6: Εφαρμογές του Fubini.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

BY SA

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

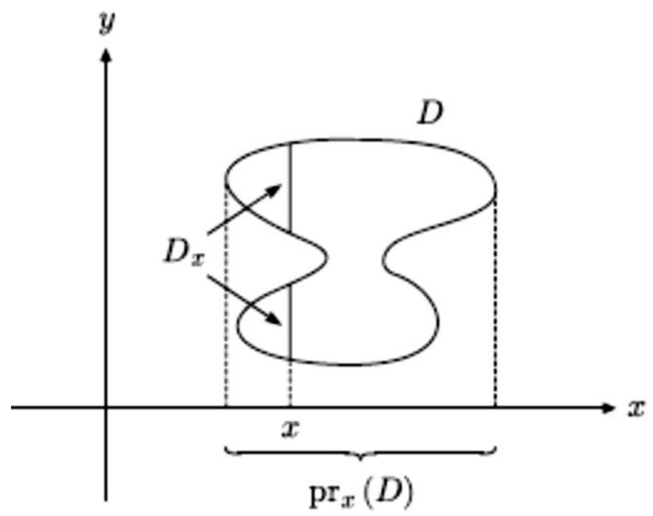
1. Παραδείγματα - Εφαρμογές του Fubini.

Σκοποί ενότητας

Δίνουμε τα βασικά παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος Fubini.

Εφαρμογές του Fubini (1)

Ας είναι $D \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο με σύνορο ∂D μέτρου μηδέν, και ας είναι $f: D \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Το D περιέχεται στο ορθογώνιο $\Pi = A \times B$, όπου $A = pr_x(D)$και $B = pr_y(D)$ (Σχ. 1)



Σχήμα 1

Εφαρμογές του Fubini (2)

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο Π, και το θεώρημα του Fubini μας δίνει (δες Σχήμα 1)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{A\times B} f(x,y)1_D(x,y)dxdy$$

$$= \int_{pr_x(D)} \left(\int_B f(x,y)1_D(x,y)dy \right) dx$$

$$= \int_{pr_x(D)} \left(\int_{D_x} f(x,y)dy \right) dx\,,$$

αφού για x σταθερό,

Εφαρμογές του Fubini (3)

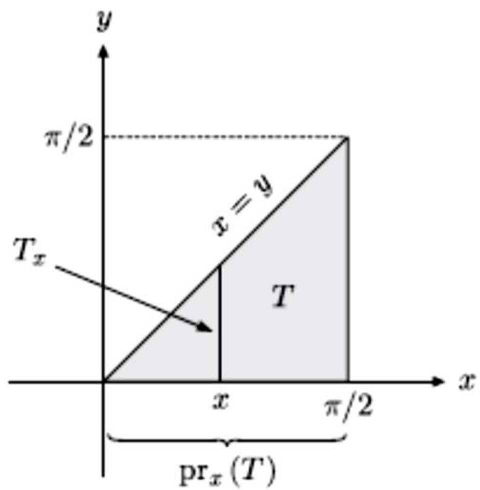
$$f(x,y)1_D(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \alpha\nu\ y \in D_x, \\ 0, & \alpha\nu\ \acute{o}\chi\iota, \end{cases}$$

όπου

$$D_x = \{y\colon (x,y) \in D\}.$$

Το D_x είναι η τομή του D με την κάθετο που φεύγει από το x.

Παράδειγμα 1: Αν T είναι το τρίγωνο του σχήματος 2,



Σχήμα 2

Εφαρμογές του Fubini (4)

τότε

$$\iint_T (x^3y + \sigma\upsilon\nu x)dxdy = \int_{pr_x(T)} \left(\int_{T_x} (x^3y + \sigma\upsilon\nu x)dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x (x^3y + \sigma\upsilon\nu x)dy \right) dx$$

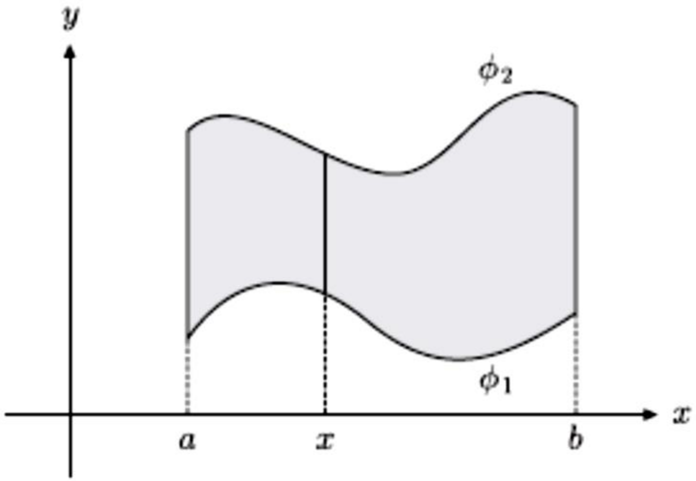
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^5}{2} + \sigma\upsilon\nu x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{12} + \eta\mu x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 + 1.$$

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (1)

Γενικά ένα χωρίο D σαν αυτό του σχήματος 3, λέγεται χωρίο τύπου 1, και έχει την ακόλουθη παραμετρικοποίηση:

$$D = \{(x, y) \colon a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$



Σχήμα 3

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (2)

Αν D είναι τύπου 1 και $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε από το θεώρημα του Fubini, αμέσως συμπεραίνουμε ότι

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$
$$= \int_{pr_x(D)} \left(\int_{D_x} f(x,y)dy \right) dx$$
$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \,.$$

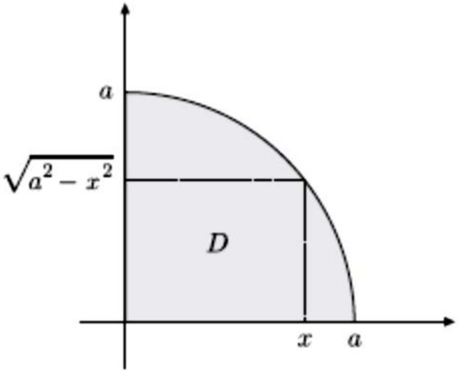
Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (3)

Παράδειγμα 2: Αν D είναι το πρώτο τεταρτημόριο του δίσκου $D(0,a)$, (Σχ. 4), και

$$f(x,y)=\sqrt{a^2-y^2},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\iint_D f(x,y)dxdy\,.$$



Σχήμα 4

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (4)

Λύση: Έχουμε

$$I = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dy \, .$$

Το ως άνω επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα είναι δύσκολο. Κοιτάζουμε λοιπόν να δούμε μήπως η ολοκλήρωση πρώτα ως προς x μας δώσει κάτι πιο εύκολο, αφού η $f(x, y)$ είναι ανεξάρτητη του x.

Έχουμε

$$D = \{(x, y)\colon \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(x), 0 \leq y \leq \alpha\}, \qquad (1)$$

όπου $\psi_1(y) = 0$ και $\psi_2(x) = \sqrt{a^2 - y^2}$.

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (5)

Επομένως,

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-y^2}dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}dy \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\sqrt{a^2-y^2}dy$$

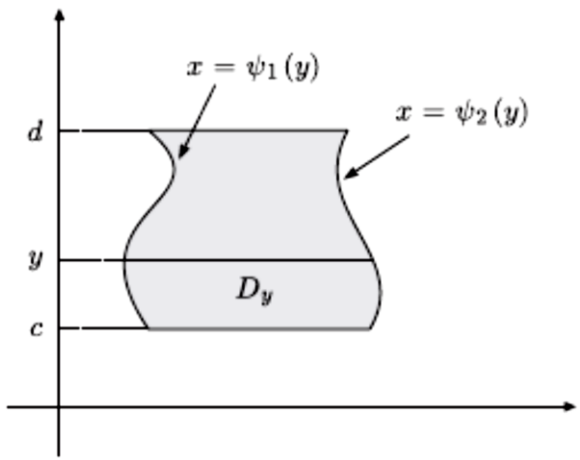
$$= \int_0^a (a^2-y^2)dy = \left[a^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^a$$

$$= a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}.$$

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (6)

Στο προηγούμενο παράδειγμα αναγκαστήκαμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Αυτό μας το επέτρεψε η μορφή του πεδίου D, που μας έδωσε την παραμετρικοποίηση (1).

Γενικά ένα πεδίο με παραμετρικοποίηση όπως στην (1) λέγεται χωρίο τύπου 2 (Σχ. 5).



Σχήμα 5

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (7)

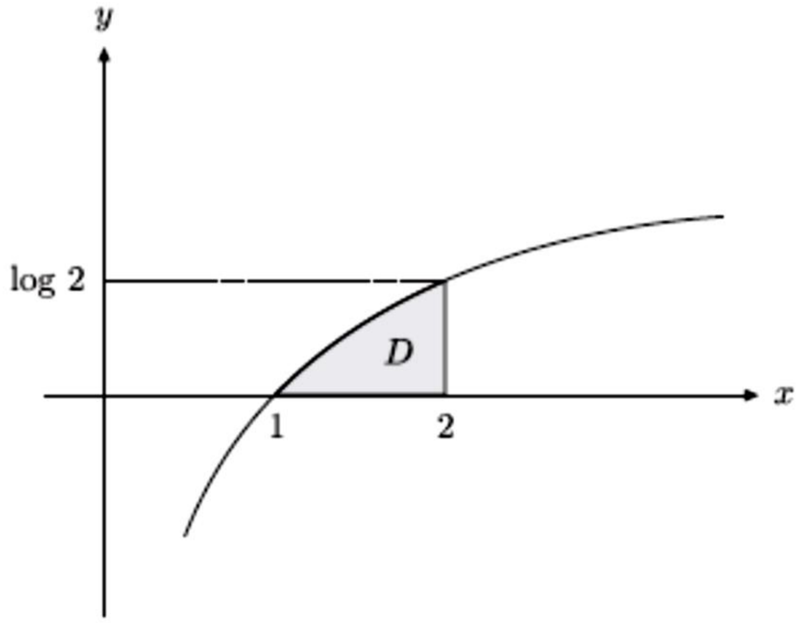
Ένα χωρίο που είναι και τύπου 1 και τύπου 2, όπως π.χ. το τεταρτημόριο του σχήματος 4, λέγεται τύπου 3.

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί το επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^2 dx \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}dy\,.$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα φαίνεται δύσκολο. Πρέπει λοιπόν να αλλαχθεί η σειρά ολοκλήρωσης μήπως και πέσουμε σε κάτι πιο εύκολο. Πρέπει όμως πρώτα να βρούμε το χωρίο ολοκλήρωσης (δες το Σχήμα 6).

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (8)



Σχήμα 6

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (9)

Αν

$$y = \varphi_2(x) = logx$$

τότε

$$x = e^y,$$

Άρα

$$D = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq logx\}$$
$$= \{(x, y): e^y \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq log2\}$$

Συνεπώς το D είναι τύπο 1 και 2, δηλαδή τύπου 3, και έχουμε

$$I = \int_0^{log2} dy \int_{e^y}^{2} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dx$$

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (10)

$$= \int_0^{log2} \sqrt{1+e^{2y}}dy \int_{e^y}^2 (x-1)dx$$

$$= \int_0^{log2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{e^y}^2 dy$$

$$= \int_0^{log2} \sqrt{1+e^{2y}} \left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y\right) dy$$

$$\underset{e^y=w}{=} \int_1^2 \sqrt{1+w^2} \left(\frac{w}{2} - 1\right) dw\,.$$

Το ως άνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται πιο εύκολα.

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (11)

Παρατήρηση 1: Γενικά, όταν μας δίνεται ένα δύσκολο επαναλαμβανόμενο ολοκλήρωμα, κάνουμε τις εξής κινήσεις: πρώτα προσδιορίζουμε το χωρίο ολοκλήρωσης, και στη συνέχεια αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και ολοκληρώνουμε.

Παράδειγμα 4: Αν A είναι το τρίγωνο

$$\{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\},$$

να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_A \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx dy\,.$$

Χωρία τύπου 1, 2, και 3 (12)

Λύση: Αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y, έχουμε

$$I = \int_0^1 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx \int_0^x dy = \int_0^1 x\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx\,,$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα. Αν όμως ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x έχουμε

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx\,,$$

το οποίο είναι δύσκολο.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 6: Εφαρμογές του Fubini». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

BY SA

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης