ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 8: Αλλαγή μεταβλητών.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Πολικές συντεταγμένες.
2. Κυλινδρικές συντεταγμένες.
3. Σφαιρικές συντεταγμένες.

Σκοποί ενότητας

Όπως γνωρίζουμε από την διάσταση 1, η αλλαγή μεταβλητής είναι πολλές φορές απαραίτητη για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Η επιλογή της κατάλληλης αλλαγής στηρίζεται στη μορφή της συνάρτησης f που θέλουμε να ολοκληρώσουμε. Στις πολλές μεταβλητές ισχύουν τα ίδια, μόνο που εδώ παίζει ρόλο και η γεωμετρία του χωρίου που ολοκληρώνουμε.

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (1)

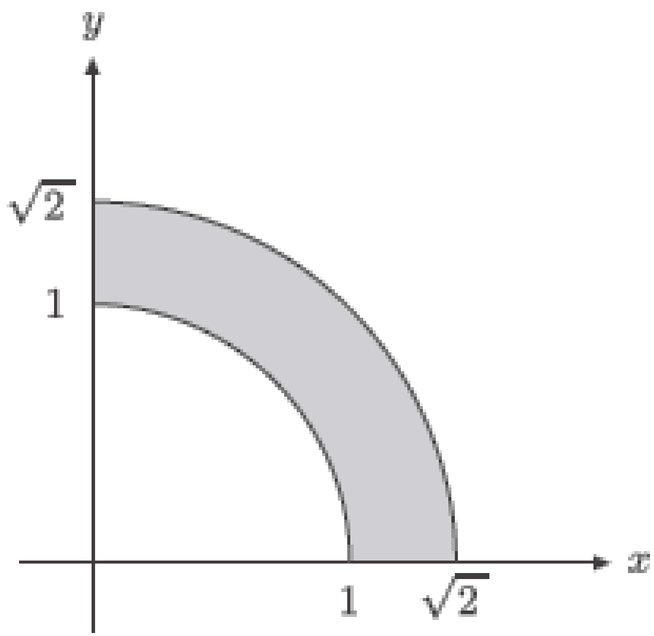
Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι διαφωτιστικό. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_D \log(x^2 + y^2)\, dxdy\,,$$

όπου D είναι το πρώτο τεταρτημόριο του δακτυλίου με κέντρο το 0, εσωτερική ακτίνα 1 και εξωτερική $\sqrt{2}$.

Παρατηρούμε πως η συνάρτηση f είναι ακτινική και πως το χωρίο D έχει μια κυκλική συμμετρία. (Σχ.1)

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (2)



Σχήμα 1

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (3)

Συνεπώς οι πολικές συντεταγμένες

$$x = r\sigma\upsilon\nu\theta, y = r\eta\mu\theta,$$

φαίνονται οι πλέον ενδεδειγμένες για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

Έχουμε

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)dxdy$$

$$= \iint_D foT(r,\theta)dxdy\,,$$

όπου

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (4)

$$T: [0, +\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2,$$
$$T(r,\theta) = (x,y) = (r\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\theta)$$

είναι ο μετασχηματισμός των πολικών συντεταγμένων.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $(x,y) \in D$, τότε οι νέες μεταβλητές r, θ ικανοποιούν

$$1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Άρα, αν θελήσουμε να ολοκληρώσουμε ως προς r και θ, κατά αναλογία με τη διάσταση 1, θα έχουμε

$$I = \iint_D foT(r,\theta)dxdy = \iint_{\substack{1 \leq r \leq \sqrt{2}, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}} foT(r,\theta)??\,drd\theta =$$

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (5)

$$= \iint_{D^*} foT(r,\theta) ?? \, dr d\theta \, , \qquad (1)$$

όπου

$$D^* = \left\{(r,\theta) \colon 1 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

είναι το χωρίο των μεταβλητών r,θ. Όπως διαπιστώνουμε, το D^* είναι ένα ορθογώνιο και ισχύει

$$T(D^*) = D^*.$$

Τώρα, πρέπει να δούμε τι θα βάλουμε στη θέση των ερωτηματικών ?? στην σχέση (1).

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (6)

Προφανώς κάτι που έχει σχέση με τις παραγώγους $\partial_r x, \partial_\theta x$ και $\partial_r y, \partial_\theta y$. Θυμηθείτε ότι στην διάσταση 1, όταν $x = \varphi(r)$, τότε το dx αντικαθιστάται με το

$$\varphi'(r)dr = \partial_r x dr.$$

Για να βγάλουμε άκρη, κοιτάζουμε την πιο απλή περίπτωση, όπου

$$f(x, y) = 1, \forall x, y,$$

και ο μετασχηματισμός T δίνεται από έναν 2x2 πίνακα A, ανεξάρτητο των r,θ:

$$T(r, \theta) = A\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (7)

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$I = \iint_D f o T(r,\theta) dxdy = \iint_D dxdy = |D| = |T(D^*)| = |A(D^*)|$$
$$= |detA||D^*|,$$

αφού, όπως είναι γνωστό από την Γραμμική Άλγεβρα,

$$|A(D^*)| = |detA||D^*|,$$

όταν το D^* είναι ορθογώνιο και ο A πίνακας 2×2. Τέλος, επειδή η παράγωγος $DT(r,\theta)$ του γραμμικού μετασχηματισμού $T = A$ δίδεται από την ορίζουσα $detA$, έχουμε

$$|detA||D^*| = |detA| \int_{D^*} drd\theta = \int_{D^*} |detA| drd\theta$$

$$= \int_{D^*} |DT(r,\theta)| drd\theta \, .$$

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (8)

Επομένως η αντικατάσταση των ερωτηματικών ?? στην σχέση (1) γίνεται ως ακολούθως:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D foT(r,\theta)dxdy$$

$$= \iint_{T(D^*)} foT(r,\theta)dxdy = \iint_{D^*} foT(r,\theta)??\,drd\theta$$

$$= \iint_{D^*} foT(r,\theta)|DT(r,\theta)|drd\theta\,,$$

ή όπως λένε οι Φυσικοί, το στοιχειώδες εμβαδόν $dxdy$ μετασχηματίζεται μέσω του T στο $|DT(r,\theta)|drd\theta$.

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (9)

Επομένως, μπορούμε να πούμε γενικά ότι αν έχουμε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και ένα μετασχηματισμό $T(u) = x$, όπως στο διάγραμμα

$$\mathbb{R}^n \supset D^* \xrightarrow{T} T(D^*) = D \xrightarrow{f} \mathbb{R},$$

τότε ισχύει ο τύπος της αλλαγής μεταβλητών:

$$\int_D f(x)dx = \int_{D^*} f o T(u)|DT(u)|du \,.$$

Τον τύπο αυτόν θα τον αποδείξουμε στην πλήρη του γενικότητα στο τέλος του κεφαλαίου. Προηγουμένως θα τον εφαρμόσουμε στους κλασικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$.

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (10)

Ας γυρίσουμε στο παράδειγμα των πολικών συντεταγμένων της προηγούμενης παραγράφου. Έχουμε

$$|DT(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -r\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} = r.$$

Άρα, αν

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

τότε

$$f(r,\theta) = foT(r,\theta) = \log(r^2\sigma\upsilon\nu^2\theta + r^2\eta\mu^2\theta) = logr^2,$$

και

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (11)

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} foT(r,\theta)|DT(r,\theta)|drd\theta$$

$$= \iint_{\substack{1\le r\le\sqrt{2},\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} \log(r^2)rdrd\theta$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(logr)rdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^{\sqrt{2}} (logr)rdr$$

$$= \pi\int_1^{\sqrt{2}} (logr)rdr =$$

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (12)

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}} (logr)(r^2)'dr$$

$$= \frac{\pi}{2}[r^2 - logr]_1^{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{r} r^2 dr$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[r^2 - logr - \frac{r^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - log\sqrt{2}\right).$$

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (13)

Παράδειγμα 1: (ολοκλήρωμα Gauss) Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Λύση: Το ολοκλήρωμα Gauss δεν είναι στοιχειώδες και δεν υπολογίζεται με τις γνωστές μεθόδους. Για να το υπολογίσουμε, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} I^2 &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right) \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{-R}^{+R} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^{+R} e^{-y^2} dy \right) \end{aligned}$$

αλλάζοντας το x με το y στο δεύτερο ολοκλήρωμα.

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (14)

Από Fubini για χωρισμένες μεταβλητές έχουμε

$$I^2 = \lim_{R\to\infty} \iint_{[-R,R]^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy$$

$$= \lim_{R\to\infty} \iint_{[-R,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \lim_{R\to\infty} I_R \,.$$

Παρατηρούμε ότι το I_R ικανοποιεί

$$\iint_{D(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq I_R \leq \iint_{D(0,\sqrt{2}R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \,,$$

αφού ο δίσκος $D(0,R)$ είναι εγγεγραμένος στο τετράγωνο $[-R,R]^2$ και ο $D\left(0,\sqrt{2}R\right)$ περιγεγραμμένος.

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (15)

Με πολικές, υπολογίζουμε το

$$\iint_{D(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \iint_{D(0,R)} e^{-r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^R e^{-r^2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\underset{u=r^2}{=} 2\pi \int_0^{R^2} e^{-u} \frac{du}{2} = \pi\left(1 - e^{-R^2}\right).$$

Επομένως,

$$\pi\left(1 - e^{-R^2}\right) \leq I_R \leq \pi\left(1 - e^{-2R^2}\right),$$

και στο όριο

Εισαγωγή και πολικές συντεταγμένες (16)

$$I^2 = \lim_{R\to\infty} I_R = \pi.$$

Άρα,

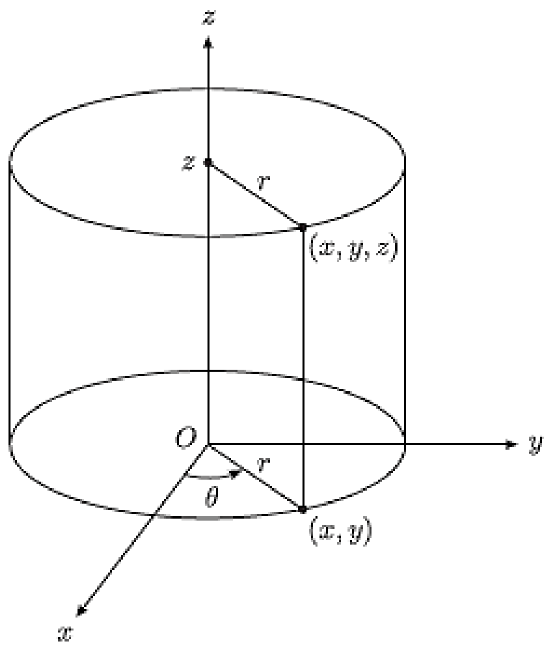
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (1)

Στις τρείς διαστάσεις, πλην των καρτεσιανών συνταταγμένων, συντεταγμένες ευρείας χρήσεως είναι επίσης οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές.

Για να βρούμε ις κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, θεωρούμε ότι βρίσκεται επι του κυλίνδρου με άξονα τον άξονα των z και ακτίνα $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (δες Σχ.2). Στο σχήμα αυτό, οι κυλινδρικές οφείλουν προφανώς το όνομά τους.

Κυλινδρικές συντεταγμένες (2)



Σχήμα 2

Κυλινδρικές συντεταγμένες (3)

Έχουμε,

$$x = r\sigma\upsilon\nu\theta, y = r\eta\mu\theta, z = z.$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού T των κυλινδρικών συντεταγμένων

$$(r,\theta,z) \xrightarrow{T} (x = r\sigma\upsilon\nu\theta, y = r\eta\mu\theta, z = z)$$

είναι η

$$detDT = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\theta & 0 \\ -r\eta\mu\theta & r\sigma\upsilon\nu\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (4)

Παράδειγμα 2: Έστω D το χωρίο που ορίζεται από τις συνθήκες:

$$0 < x^2 + y^2 < z^2, \qquad 0 < z < 1.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_D xyz dxdydz\,.$$

Λύση: Έχουμε

$$I = \iiint_D (r\sigma\upsilon\nu\theta)(r\eta\mu\theta)zrdrd\theta dz$$

$$= \iiint_D (\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta)zr^3 drd\theta dz$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (5)

$$= \int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta d\theta \int_0^1 dz \int_0^z r^3 dr = 0,$$

αφού το ολοκλήρωμα ως προς θ δίνει 0:

$$\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \eta\mu\theta(\eta\mu\theta)' d\theta = \left[\frac{\eta\mu^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (6)

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D zdxdydz\,,$$

όπου D είναι το χωρίο στο εσωτερικό του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$, που είναι πάνω από το επίπεδο $z = 0$, και έξω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Λύση: Επειδή πρόκειται περί κυλίνδρων και κώνων, θα χρησιμοποιήσουμε τις κυλινδρικές συντεταγμένες. Έτσι, το ολοκλήρωμα μας γράφεται ως εξής:

$$I = \int_{D=T(D^*)} zdxdydz = \int_{D^*} zrdrd\theta dz\,.$$

Κυλινδρικές συντεταγμένες (7)

Μένει να προσδιορίσουμε το D^*. Από το σχήμα έχουμε

$$D^* = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq r\}.$$

Άρα,

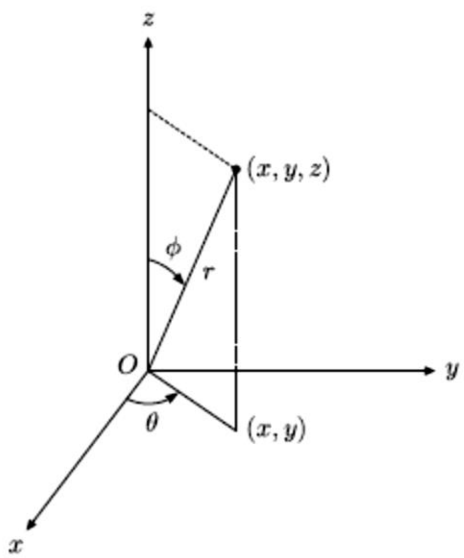
$$I = \int_{D^*} zrdrd\theta dz = \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r zdz$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\frac{r^2}{2}dr = \frac{\pi}{4}.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (1)

Για να βρούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες ενός σημείου $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, θεωρούμε ότι βρίσκεται επί της σφαίρας με κέντρο το 0 και ακτίνα

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Σχήμα 3

Σφαιρικές συντεταγμένες (2)

Όπως και στις κυλινδρικές, είναι ακριβώς το σχήμα αυτό που δίνει στις σφαιρικές το όνομά τους.

Έχουμε,

$$r > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta < 2\pi,$$

και

$$x = r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$y = r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta,$$

$$z = r\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού των σφαιρικών συντεταγμένων

$$(r, \theta, \varphi) \to (x = r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta, r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta, r\sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (3)

δίνεται από

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & \eta\mu\varphi\eta\mu\theta & \sigma\upsilon\nu\varphi \\ -r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta & r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & 0 \\ r\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta & r\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu\theta & -r\eta\mu\varphi \end{vmatrix}$$

$$= -r^2\eta\mu\varphi.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (4)

Παράδειγμα 4: Να υπολογιστεί ο όγκος της μπάλας $B(0,R)$.
Λύση: Θυμίζουμε ότι τον έχουμε ήδη υπολογίσει με Fubini. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες. Έχουμε

$$\begin{aligned} B(0,R) &= \{x^2+y^2+z^2 \le R^2\} \\ &= \{(r,\theta,\varphi): 0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi\}, \end{aligned}$$

οπότε

$$|B(0,R)| = \int_{B(0,R)} dxdydz = \int_{B(0,R)} r^2 \eta\mu\varphi drd\theta d\varphi$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \eta\mu\varphi d\varphi = 2\pi \frac{R^3}{3} [-\sigma\upsilon\nu\varphi]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (5)

Παράδειγμα 5: Έστω D το χωρίο που ορίζεται από τις συνθήκες:

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1, 0 < x^2 + y^2 < z^2, z > 0.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_D \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{z}\right\} dxdydz\,.$$

Λύση: Έχουμε

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(r\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (r\eta\mu\varphi\eta\mu\theta)^2} = r\eta\mu\varphi.$$

Άρα,

$$I = \int_D \left\{\frac{1}{r\eta\mu\varphi} + \frac{1}{r\sigma\upsilon\nu\varphi}\right\} r^2\eta\mu\varphi drd\theta d\varphi$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (6)

$$= \int_{\substack{0<r<1, \\ 0<\theta<2\pi, \\ 0<\varphi<\frac{\pi}{4}}} \left\{1 + \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right\} r dr d\theta d\varphi$$

αφού στις σφαιρικές, οι συνθήκες που ορίζουν το D γράφονται ως εξής:

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < r^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < r < 1, z > 0 \Leftrightarrow$$
$$r\sigma\upsilon\nu\varphi > 0 \Leftrightarrow \varphi > \frac{\pi}{2},$$

και

$$0 < x^2 + y^2 < z^2 \Leftrightarrow 0 < r^2\eta\mu^2\varphi < r^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Leftrightarrow$$
$$0 < \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \varepsilon\varphi\varphi < 1 \Leftrightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

Σφαιρικές συντεταγμένες (7)

Άρα,

$$I = \int_{\substack{0<r<1,\\ 0<\theta<2\pi,\\ 0<\varphi<\frac{\pi}{4}}} \left\{1 + \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right\} r dr d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{1 + \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right\} d\varphi =$$

$$= \pi \left\{\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma\upsilon\nu\varphi)'}{\sigma\upsilon\nu\theta} d\varphi\right\} = \frac{\pi^2}{4} - \pi[log(\sigma\upsilon\nu\varphi)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \log\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 8: Αλλαγή μεταβλητών». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου

Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης