ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 15: Αρμονικές συναρτήσεις.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

1. Αρμονικές συναρτήσεις.
2. Θεώρημα Liouville .

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Green στην Ανάλυση που αφορά τις αρμονικές συναρτήσεις.

Αρμονικές συναρτήσεις (1)

Ορισμός: Μια πραγματική συνάρτηση $u(x, y)$ με πεδίο ορισμού το ανοικτό $A \subset \mathbb{R}^2$ λέγεται αρμονική αν

$$\Delta u(x, y) = \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) = 0, \qquad \forall x, y \in A.$$

Στην πραγματική ευθεία, οι μόνες αρμονικές είναι οι γραμμικές, αφού

$$\partial_x^2 u(x, y) = 0 \Leftrightarrow u(x) = ax + b.$$

Απεναντίας, στο επίπεδο υπάρχουν πολλές και ενδιαφέρουσες αρμονικές συναρτήσεις. Παραδείγματος χάριν, από τις εξισώσεις των Cauchy-Riemann συνάγεται ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Αρμονικές συναρτήσεις (2)

Η

$$log\|x\|, \qquad x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

είναι αρμονική, και με μια έννοια που θα γίνει κατανοητή στα πιο προχωρημένα μαθήματα της Ανάλυσης, παράγει όλες τις αρμονικές του επιπέδου.

Στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ οι αρμονικές κατασκευάζονται μέσω του πυρήνα Poisson $P\big((x,y),(x_1,y_1)\big)$ που ορίζεται ως εξής. Αν $(x,y) \in D(0,1)$ και $(x_1,y_1) \in \partial D(0,1)$ τότε

$$P\big((x,y),(x_1,y_1)\big) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)-(x_1,y_1)\|^2}$$

Αρμονικές συναρτήσεις (3)

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1-(x^2+y^2)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\sigma\upsilon\nu(\theta-\theta_1)+r^2}.$$

Αν $f: S(0,1) \to \mathbb{R}$ είναι π.χ. C^1, τότε η

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\sigma\upsilon\nu(\theta-\theta_1)+r^2} f(\theta_1)d\theta_1$$

είναι αρμονική και λύνει το πρόβλημα της αρμονικής επέκτασης της f στον δίσκο:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0, & \forall (x,y) \in D(0,1), \\ u(x,y) \to f(\theta) & \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ (x,y) \to e^{i\theta} \in S(0,1). \end{cases}$$

Αρμονικές συναρτήσεις (4)

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green ή τις ισοδύναμες εκφράσεις του, θα δείξουμε τα παρακάτω ουσιαστικά για τις αρμονικές:

- Την ιδιότητα του μέσου όρου. Για κάθε $P_0 \in A$ και για κάθε $D(P_0, r) \subset A$,

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(P_0,r)} u = \frac{1}{|S(P_0,r)|}\int_{S(P_0,r)} u$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right)\left\|ire^{i\theta}\right\| d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right) d\theta\,,$$

εξού και η ορολογία.

Αρμονικές συναρτήσεις (5)

- Την αρχή του μεγίστου. Αν A είναι συνεκτικό και το $P_0 \in int(A)$ είναι τοπικό μέγιστο της $|u|$, τότε η u είναι σταθερή.

Μέσος όρος. Ξεκινούμε την μελέτη του μέσου όρου για μια C^2συνάρτηση u. Θέτουμε

$$M(P_0, r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial D(P_0,r)} u = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u\big(P_0 + re^{i\theta}\big) \| ire^{i\theta} \| \, dt,$$

αφού η

$$t \to \gamma(t) = P_0 + re^{i\theta}, \qquad t \in [0,2\pi]$$

είναι μια παραμετρικοποίηση της περιφέρειας $\partial D(P_0, r)$ και $\gamma'(t) = ire^{it}$.

Αρμονικές συναρτήσεις (6)

Επιπλέον,

$$\left|\int_0^{2\pi} u\left(P_0 + re^{it}\right) r\, dt\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|u\left(P_0 + re^{it}\right)\right| r\, dt$$
$$\leq 2\pi r \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|u\left(P_0 + re^{it}\right)\right| < \infty,$$

αφού η u είναι C^2.

Άρα μπορούμε να περάσουμε το όριο μέσα στο ολκλήρωμα, κι έτσι έχουμε

$$\lim_{r\to 0} M(P_0, r) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right) r\, dt$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right) dt$$

Αρμονικές συναρτήσεις (7)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(P_0)dt = u(P_0), \qquad (1)$$

αφού η u είναι C^2 και συνεπώς

$$\lim_{r\to 0} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right) = u(P_0).$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι $\forall r > 0$,

$$M(P_0, r) = u(P_0) \underset{(1)}{=} \lim_{r\to 0} M(P_0, r)\,.$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\partial_r M(P_0, r) = 0.$$

Έχουμε

$$\partial_r M(P_0, r) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{M(P_0, r+h) - M(P_0, r)\}$$

Αρμονικές συναρτήσεις (8)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{2\pi(r+h)}\int_{\partial D(P_0,r+h)} u - \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(P_0,r)} u\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{1}{2\pi(r+h)}\int_0^{2\pi} u\big(P_0+(r+h)e^{it}\big)(r+h)dt$$

$$- \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u\big(P_0+re^{it}\big)rdt$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi h}\int_0^{2\pi}\left\{u\big(P_0+(r+h)e^{it}\big)-u\big(P_0+re^{it}\big)\right\}dt$$

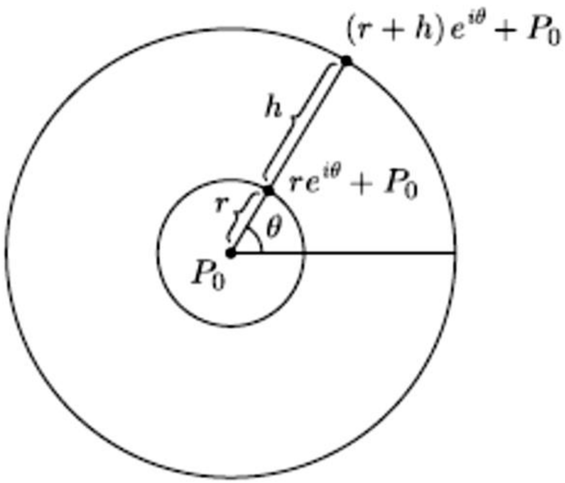
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{u\big(P_0+(r+h)e^{it}\big)-u\big(P_0+re^{it}\big)\right\}dt\,.\ (2)$$

Αρμονικές συναρτήσεις (9)

Όμως, το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{u\left(P_0+(r+h)e^{it}\right)-u\left(P_0+re^{it}\right)\right\}$$

είναι η παράγωγος στην διεύθυνση της ακτίνας (Σχ.1) που είναι κάθετος στην περιφέρεια.



Σχήμα 1

Αρμονικές συναρτήσεις (10)

Άρα είναι η παράγωγος στην διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου n, δηλαδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{u\left(P_0+(r+h)e^{it}\right)-u\left(P_0+re^{it}\right)\right\}=\frac{\partial u}{\partial n}\left(P_0+re^{it}\right)$$
$$=\langle \nabla u\left(P_0+re^{it}\right),n\rangle$$

Συνδυάζοντας με την (2), έχουμε

$$\partial_r M(P_0,r)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{u\left(P_0+(r+h)e^{it}\right)-u\left(P_0+re^{it}\right)\right\}dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle \nabla u\left(P_0+re^{it}\right),n\rangle dt$$

Αρμονικές συναρτήσεις (11)

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \langle \nabla u\left(P_0 + re^{it}\right), n\rangle r dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(P_0,r)} \langle \nabla u, n\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{D(P_0,r)} div \nabla u(x,y) dxdy \;\; (\alpha\pi\acute{o}\kappa\lambda\iota\sigma\eta)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{D(P_0,r)} \Delta u(x,y) dxdy = 0,$$

αφού η u είναι αρμονική. Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$div \nabla u(x,y) = \Delta u(x,y),$$

Αρμονικές συναρτήσεις (12)

που αποδεικνύεται εύκολα με πράξεις. Επομένως

$$\partial_r M(P_0, r) = 0,$$

και συνεπώς

$$M(P_0, r) = c = M(P_0, 0) \underset{(1)}{=} u(P_0)\,,$$

το οποίο είναι η ιδιότητα του μέσου όρου:

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(P_0, r)} u\,.$$

Αρμονικές συναρτήσεις (13)

Αρχή του μεγίστου. Υποθέτουμε ότι η $|u|$ έχει π.χ. τοπικό μέγιστο στο P_0. Τότε, για μικρό $\varepsilon > 0$,

$$|u(P)| < |u(P_0)|, \qquad \forall P \in \overline{D(P_0, \varepsilon)}.$$

Άρα

$$|u(P_0)| = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\partial D(P_0,\varepsilon)} u \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \left| u\left(P_0 + \varepsilon e^{it}\right) \right| \varepsilon dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| u\left(P_0 + \varepsilon e^{it}\right) \right| dt$$

Όμως, $\left| u\left(P_0 + \varepsilon e^{it}\right) \right| < |u(P_0)|$ και συνεπώς

$$|u(P_0)| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(P_0)| dt = |u(P_0)|,$$

άτοπο, εκτός εάν η u είναι σταθερή στον $D(P_0, \varepsilon)$.

Αρμονικές συναρτήσεις (14)

Τώρα, θα τελειώσουμε την απόδειξη, αν δείξουμε ότι $u(P') = c$ για οποιοδήποτε P' μέσα στο A. Όμως, το A είναι συνεκτικό (κατά τόξα) και συνεπώς μπορούμε να ενώσουμε το P_0 με το P' με μια συνεχή καμπύλη γ που είναι εξ ολοκλήρου μέσα στο A. Τέλος, η καμπύλη γ είναι συμπαγής, άρα μπορούμε να την καλύψουμε με πεπερασμένο αριθμό δίσκων $D\left(P_j, \varepsilon\right), 1 \leq j \leq N(\varepsilon)$, που ανήκουν εξ ολοκλήρου στο A, αφού μπορούμε να πάρουμε το ε όσο μικρό θέλουμε και το A είναι ανοικτό. Από το πρώτο βήμα λοιπόν έχουμε ότι

$$u\Big|_{D\left(P_j, \varepsilon\right)} = c_j, 1 \leq j \leq N(\varepsilon).$$

Όμως, οι δίσκοι $D\left(P_j, \varepsilon\right)$ τέμνονται, άρα $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = c$.

Θεώρημα Liouville (1)

Μία ενδιαφέρουσα συνέπεια του μέσου όρου είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα (Liouville): Αν η $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική και φραγμένη, τότε η u είναι σταθερή.

Απόδειξη: Από την ιδιότητα του μέσου όρου έχουμε

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(P_0,r)} u = \left(\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D(P_0,r)} u\right)\frac{2}{\rho^2}\int_0^{\rho} r dr$$

$$= \frac{1}{\pi r}\left(\int_0^{2\pi} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right) r d\theta\right)\frac{1}{\rho^2}\int_0^{\rho} r dr$$

$$= \frac{1}{\pi\rho^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right) rd\, rd\theta$$

Θεώρημα Liouville (2)

$$= \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{D(P_0,\rho)} u(P_0 + (x,y))dxdy\,.$$

Από τον ως άνω τύπο και το γεγονός ότι η u είναι φραγμένη, έχουμε

$|u(P_0) - u(P_1)| =$

$$= \frac{1}{\pi\rho^2} \left| \iint_{D(P_0,\rho)} u(P_0 + (x,y))dxdy \right.$$

$$\left. - \iint_{D(P_1,\rho)} u(P_0 + (x,y))dxdy \right| \leq$$

Θεώρημα Liouville (3)

$$\leq \frac{1}{\pi\rho^2}\sup_{\mathbb{R}^2}|u|\left|\iint_{D(P_0,\rho)-D(P_1,\rho)} dxdy + \iint_{D(P_1,\rho)-D(P_0,\rho)} dxdy\right| \xrightarrow{\rho\to\infty} 0,$$

αφού το μέτρο της συμμετρικής διαφοράς

$$\{D(P_0,\rho) - D(P_1,\rho)\} \cup \{D(P_1,\rho) - D(P_0,\rho)\},$$

διαιρεμένο με ρ^2, τείνει στο 0 καθώς το $\rho \to \infty$ (κάντε ένα σχήμα).

Αρμονικές και μέσος όρος (1)

Θα δείξουμε τώρα ότι η ιδιότητα του μέσου όρου χαρακτηρίζει πλήρως τια αρμονικές συναρτήσεις.

Πρόταση: Αν η $u: D \to \mathbb{R}$ είναι C^2 και ικανοποιεί την ιδιότητα του μέσου όρου για όλους τους δίσκους που περιέχονται στο D, τότε είναι αρμονική.

Απόδειξη: Ας είναι $D(P, r)$ ένας δίσκος που περιέχεται στο D. Θα εκφράσουμε την $\Delta u(P)$ με την βοήθεια του μέσου όρου $M(P, r)$. Καταρχήν, από την υπόθεση έχουμε

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(P_0 + re^{i\theta}\right)d\theta = M(P, r),$$

και αφού το $u(P)$ είναι ανεξάρτητο του r, έπεται ότι

$$\partial_r M(P, r) = \partial_r u(P) = 0.$$

Αρμονικές και μέσος όρος (2)

Από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

και συνεπώς

$$\partial_r M(P,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_r u\left(P_0 + re^{i\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\partial_x u\left(P_0 + re^{i\theta}\right)\sigma\upsilon\nu\theta + \partial_y u\left(P_0 + re^{i\theta}\right)\eta\mu\theta\right\}d\theta\,.$$

Άρα

$$\partial_r^2 M(P,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_r^2 u\left(P_0 + re^{i\theta}\right)d\theta =$$

Αρμονικές και μέσος όρος (3)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\partial_x^2 u(P_0 + re^{i\theta})\sigma\upsilon\nu^2\theta + \partial_{xy}^2 u(P_0 + re^{i\theta})\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta$$
$$+ \partial_{xy}^2 u(P_0 + re^{i\theta})\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta$$
$$+ \partial_y^2 u(P_0 + re^{i\theta})\eta\mu^2\theta\}d\theta$$
$$\xrightarrow{r\to 0}$$
$$\partial_x^2 u(P_0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu^2\theta d\theta + 2\partial_{xy}^2 u(P_0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta d\theta$$
$$+ \partial_y^2 u(P_0)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\eta\mu^2\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\partial_x^2 u(P_0) + \frac{1}{2}\partial_y^2 u(P_0).$$

Αρμονικές και μέσος όρος (4)

Άρα για κάθε $P \in D$,

$$\frac{1}{2}\Delta u(P) = \partial_r^2 M(P,r) = 0,$$

δηλαδή η u είναι αρμονική.

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 15: Αρμονικές συναρτήσεις». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης