ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Λογισμός 4

## **Ενότητα 16**: Το επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Περιεχόμενα ενότητας

1. Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες.
2. Εμβαδόν επιφάνειας.

# Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή μελετούμε τις λείες παραμετρικοποιημένες επιφάνειες και εισάγουμε το ολοκλήρωμα επί επιφανειών.

# Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες S (1)

Μέχρι τώρα οι επιφάνειες που είδαμε ήταν γραφήματα συναρτήσεων

$$\mathbb{R}^2 \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

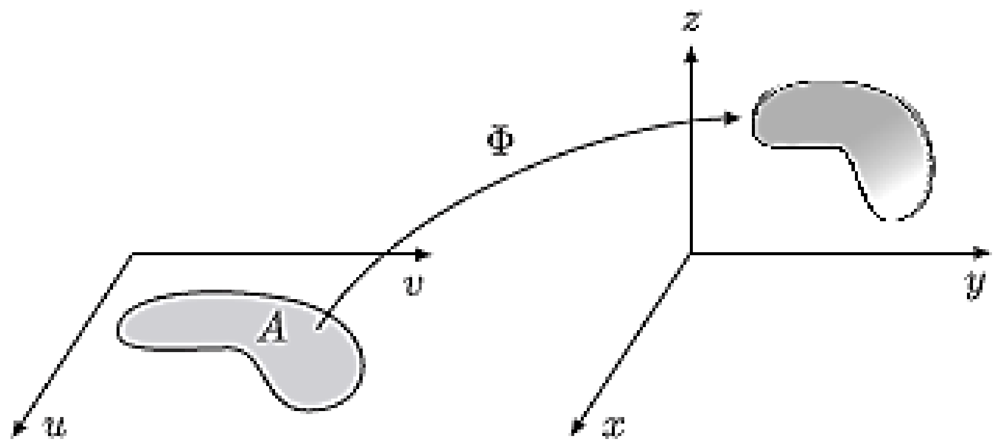
Όμως, όπως και για τις καμπύλες, όλες οι επιφάνειες δεν είναι γραφήματα συναρτήσεων. Εδώ θα περιοριστούμε στις παραμετρικοποιημένες επιφάνειες $S$ που ορίζονται ως εικόνα μιας $C^1$ συνάρτησης Φ (Σχ.1)

$$\mathbb{R}^2_{u,v} \supset A \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3_{x,y,z}, u, v \rightsquigarrow \Phi(u,v) = (x,y,z),$$

και

$$S = \Phi(A).$$

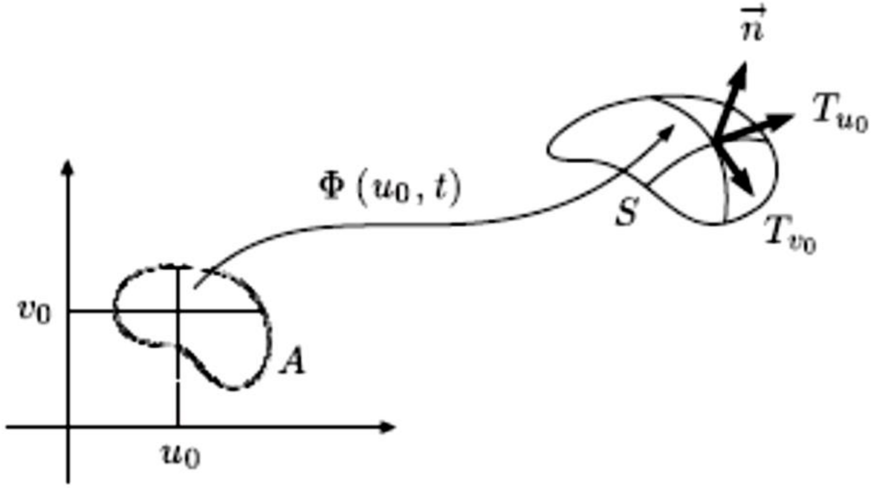
# Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες S (2)




Σχήμα 1

# Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες S (3)

Ας δούμε τώρα πότε μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $S$, όπως παραπάνω, είναι λεία, δηλαδή δεν παρουσιάζει γωνίες και τσακίσματα. Για αυτό χρειαζόμαστε να ορίσουμε τα εφαπτόμενα διανύσματά της (Σχ.2)




Σχήμα 2

# Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες S (4)

Ας είναι $\Phi(u_0, v_0)$ ένα σημείο της επιφάνειας. Αν αφήσουμε το $v$ να κινείται, τότε το γράφημα της συνάρτησης

$$v \rightsquigarrow \Phi(u_0, v)$$

είναι μία καμπύλη της οποίας η εφαπτομένη στο σημείο $\Phi(u_0, v_0)$ είναι η παράγωγος της $v \rightsquigarrow \Phi(u_0, v)$ στο $u_0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) &\coloneqq T_v(u_0, v_0)\\ &= \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) k.\end{aligned}$$

Αν αφήσουμε το $u$ να κινείται, έχουμε το δεύτερο εφαπτόμενο διάνυσμα

# Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες S (5)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) := T_u(u_0, v_0)$$
$$= \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)k.$$

Αφού τα διανύσματα $T_u(u_0, v_0)$ και $T_v(u_0, v_0)$ εφάπτονται στο $\Phi(u_0, v_0)$ σε δύο καμπύλες της επιφάνειας, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο της $S$ στο $\Phi(u_0, v_0)$. Αν συμβαίνει αυτό, τότε το κάθετο διάνυσμα

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$$

θα πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός. Έτσι ο επόμενος ορισμός είναι φυσιολογικός:

# Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες S (6)

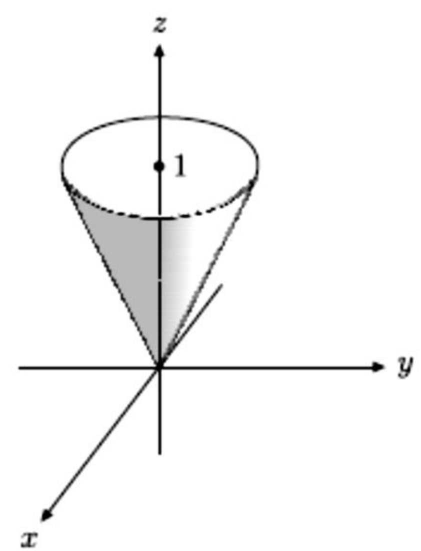
**Ορισμός**: Μια επιφάνεια είναι λεία αν σε κάθε σημείο της το κάθετο διάνυσμα είναι διάφορο του μηδενός.
Π.χ. μπορούμε να δούμε τον κώνο

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(Σχ.3) και ως παραμετρικοποιημένη επιφάνεια, με παραμετρικοποίηση:

$(u, v) \xrightarrow{\Phi} (x, y, z) = (u\sigma\upsilon\nu v, u\eta\mu v, u)$,

$u \geq 0, v \in [0,2\pi]$.




Σχήμα 3

# Παραμετρικοποιημένες επιφάνειες S (7)

Έχουμε,

$$T_u = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j + \frac{\partial z}{\partial u} k = \sigma\upsilon\nu v i + \ \eta\mu v j + k,$$

και

$$T_v = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j + \frac{\partial z}{\partial v} k = -u\eta\mu v i + u\sigma\upsilon\nu v j + 0k.$$

Άρα

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sigma\upsilon\nu v & \eta\mu v & 1 \\ -u\eta\mu v & \sigma u\upsilon\nu v & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -iu\sigma\upsilon\nu v - j(-u\eta\mu v) + k(u\sigma\upsilon\nu^2 v + u\eta\mu^2 v)$$

$$= -iu\sigma\upsilon\nu v + ju\eta\mu v + ku \neq 0,$$

για $u \neq 0$, δηλαδή για $(x, y, z) \neq (0,0,0)$. Συνεπώς ο κώνος είναι λείος παντού εκτός της κορυφής του.

# Εμβαδόν επιφάνειας (1)

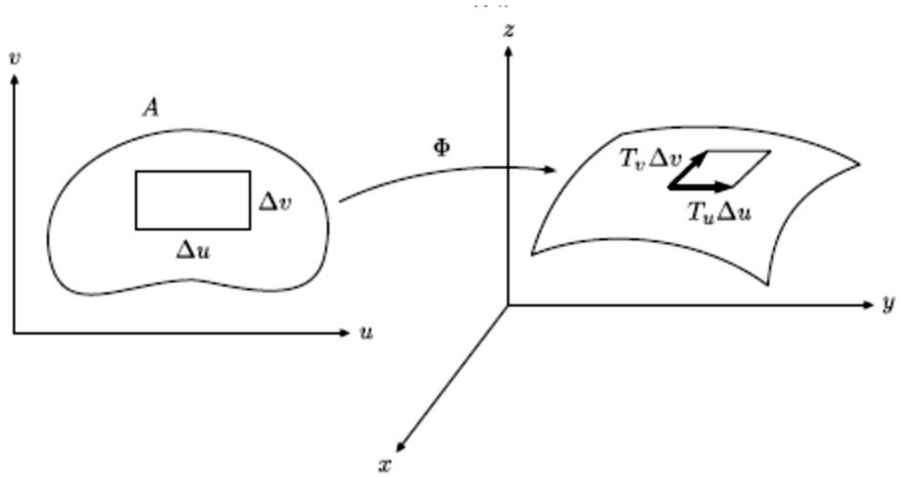
Ας είναι

$$\mathbb{R}^2_{u,v} \supset A \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3_{x,y,z}, \qquad (u,v) \rightsquigarrow (x,y,z),$$

μια λεία παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $S$ και

$$\Pi = \Delta u \times \Delta v$$

ένα μικρό ορθογώνιο του $A$, όπως στο Σχήμα 4.




Σχήμα 4

# Εμβαδόν επιφάνειας (2)

Το μήκος του $\Phi(\Delta u)$ είναι ίσο με

$$\nabla_u \Phi(u,v)\Delta u = T_u \Delta u,$$

αφού η παράγωγος $\nabla_u \Phi(u,v)$ στην κατεύθυνση του $u$ δίνει την μεταβολή της $\Phi$. Όμοια, η μεταβολή του $\Delta v$ είναι $T_v \Delta v$. Άρα το εμβαδόν του $\Phi(\Pi)$ είναι ίσο με

$$\|T_u \Delta u \times T_v \Delta v\| = \|T_u \times T_v\| \Delta u \Delta v.$$

Επομένως, αν έχουμε μια κάλυψη του $A$ με μικρά ορθογώνια $\Pi_i = \Delta u_i \Delta v_i$ που οι εικόνες του $\Phi(\Pi_i)$ καλύπτουν την επιφάνεια $S$, τότε

$$\varepsilon\mu\beta(S) = |S| \sim \sum_i |\Phi(\Pi_i)| = \sum_i \left\| T_{u_i} \Delta u_i \times T_{v_i} \Delta v_i \right\| =$$

# Εμβαδόν επιφάνειας (3)

$$= \sum_i \|T_{u_i} \times T_{v_i}\| \Delta u_i \Delta v_i$$

$$= \sum_i \|T_{u_i} \times T_{v_i}\| |\Pi_i| \to \int_A \|T_{u_i} \times T_{v_i}\| du dv\,.$$

Έχουμε δηλαδή τον τύπο που δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας.

Ένας εύκολος λογαριασμός δίνει ότι

$$\|T_u \times T_v\|^2 = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2,$$

όπου

# Εμβαδόν επιφάνειας (4)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial_u y & \partial_v y \\ \partial_u z & \partial_v z \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial_u z & \partial_v z \\ \partial_u x & \partial_v x \end{vmatrix}.$$

**Παράδειγμα 1:** Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας του κώνου:

$$x = u\sigma\upsilon\nu v, y = u\eta\mu v, z = u, \qquad u \in (0,1), v \in (0,2\pi).$$

**Λύση:** Έχουμε,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu v & -u\eta\mu v \\ \eta\mu v & u\sigma\upsilon\nu v \end{vmatrix} = u$$

και

# Εμβαδόν επιφάνειας (5)

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial_u y & \partial_v y \\ \partial_u z & \partial_v z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta\mu v & u\sigma\upsilon\nu v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -u\sigma\upsilon\nu v.$$

Κοιτάζοντας τους δύο παραπάνω πίνακες, συμπεραίνουμε αμέσως ότι

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial_u z & \partial_v z \\ \partial_u x & \partial_v x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sigma\upsilon\nu v & -u\eta\mu v \end{vmatrix} = -u\eta\mu v.$$

Άρα,

$$\|T_u \times T_v\|^2 = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2$$
$$= u^2 + u^2\sigma\upsilon\nu^2 v + u^2\eta\mu^2 v = 2u^2$$

Συνεπώς,

# Εμβαδόν επιφάνειας (6)

$$|S| = \int_{D(0,1)} \|T_u \times T_v\| du dv = \int_{D(0,1)} \sqrt{2}|u| du dv$$
$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r|\sigma\upsilon\nu\theta| r dr d\theta$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu\theta d\theta = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

**Παράδειγμα 2:** (**Εμβαδόν γραφήματος**) Αν η επιφάνεια $S$ είναι το γράφημα της $C^1$ συνάρτησης $\mathbb{R}^2 \supset A \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, τότε έχει την παραμετρικοποίηση:

$$x = u, y = v, z = f(x, y).$$

# Εμβαδόν επιφάνειας (7)

Έχουμε

$$T_u = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j + \frac{\partial z}{\partial u} k = i + \frac{\partial f}{\partial x} k,$$

$$T_v = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j + \frac{\partial z}{\partial v} k = j + \frac{\partial f}{\partial y} k.$$

Επομένως,

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x} i - \frac{\partial f}{\partial y} j + k.$$

Άρα το εμβαδόν του γραφήματος δίνεται από τον τύπο:

# Εμβαδόν επιφάνειας (8)

$$|S| = \int_A \|T_u \times T_v\| dudv = \int_A \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy$$

**Παράδειγμα 3:** Να υπολογιστεί το εμβαδόν της σφαίρας

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

**Λύση:** Η μισή σφαίρα $(z \geq 0)$ είναι το γράφημα της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \qquad x^2 + y^2 \leq r^2.$$

Άρα,

$$|S| = 2\int_{D(0,r)} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dxdy$$

# Εμβαδόν επιφάνειας (9)

$$= 2\int_{D(0,r)} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^2-x^2-y^2}+1}dxdy$$

$$= 2\int_{D(0,r)} \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2-y^2}+1}dxdy$$

$$= 2r\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \sqrt{\frac{1}{r^2-\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\rho^2\eta\mu^2\theta}}\rho d\rho d\theta$$

$$= 4\pi r\int_0^1 \frac{1}{r\sqrt{1-u^2}} rurdu$$

$$= 4\pi r^2.$$

# Εμβαδόν επιφάνειας (10)

**Παράδειγμα 4:** Εμβαδόν επιφάνειας από την περιστροφή της $y = f(x)$

- γύρω από τον άξονα των $x$, και
- γύρω από τον άξονα των $y$.

**Λύση:** (1) Σε αυτή την περίπτωση έχουμε την παραμετρικοποίηση

$$x = u, \qquad y = f(u)\sigma\upsilon\nu v, \qquad z = f(u)\eta\mu v.$$

Άρα

$$T_u = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j + \frac{\partial z}{\partial u} k = i + \frac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu v j + \frac{\partial f}{\partial x}\eta\mu v k,$$

$$T_v = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j + \frac{\partial z}{\partial v} k = -f(x)\eta\mu v j + f(x)\sigma\upsilon\nu v k.$$

# Εμβαδόν επιφάνειας (11)

Επομένως,

$$T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \dfrac{\partial f}{\partial x}\sigma\upsilon\nu v & \dfrac{\partial f}{\partial x}\eta\mu v \\ 0 & -f(x)\eta\mu v & f(x)\sigma\upsilon\nu v \end{vmatrix}$$

$$= i(f(x)\partial_x f(x)\sigma\upsilon\nu^2 v + f(x)\partial_x f(x)\sigma\upsilon\nu^2 v) - jf(x)\sigma\upsilon\nu v - kf(x)\eta\mu v$$

$$= if(x)\partial_x f(x) - jf(x)\sigma\upsilon\nu v - kf(x)\eta\mu v.$$

Άρα

$$\|T_u \times T_v\|^2 = f(x)^2\partial_x f(x)^2 + f(x),$$

και συνεπώς

# Εμβαδόν επιφάνειας (12)

$$|S| = \int_A \|T_u \times T_v\| du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx du$$

$$= 2\pi \int_\alpha^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \,.$$

(2) Αν τώρα η $S$ είναι εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα των $y$, τότε έχουμε την παραμετρικοποίηση

$$x = u\sigma\upsilon\nu v, \qquad y = f(u), \qquad z = u\eta\mu v.$$

η οποία δίνει

$$|S| = \int_A \|T_u \times T_v\| du dv = 2\pi \int_\alpha^b |x| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \,.$$

# Βιβλιογραφία


1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

# Σημείωμα Αναφοράς

 «Λογισμός 4. Ενότητα 16: Το επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης