ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Λογισμός 4

Ενότητα 18: Το Θεώρημα του Stokes.

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

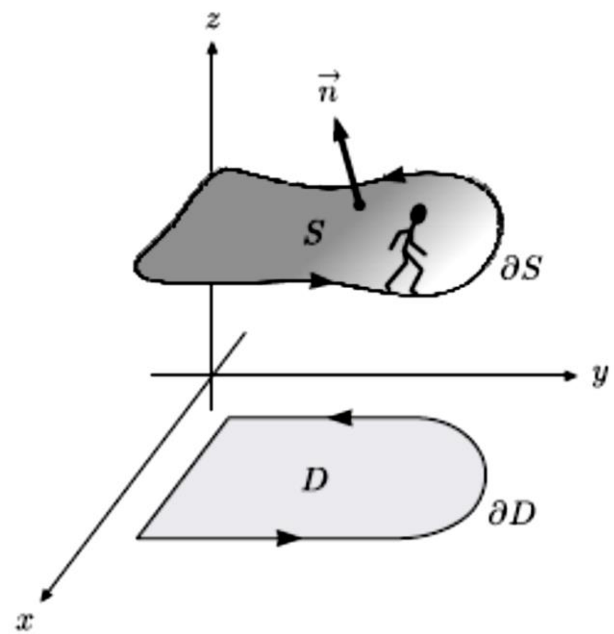
1. Θεώρημα του Stokes.
2. Συντηρητικά πεδία.

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύεται το θεώρημα του Stokes και χαρακτηρίζονται τα συντηρητικά πεδία.

Το θεώρημα του Stokes (1)

Ας είναι S μία προσανατολισμένη και λεία επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$, και ας υποθέσουμε ότι το σύνορο της ∂S είναι κλειστή, απλή και λεία καμπύλη (Σχ.1)



Σχήμα 1

Το θεώρημα του Stokes (2)

Το θεώρημα του Stokes, που είναι ο καμπυλομένος Green, συνδέει το ολοκλήρωμα επί της S της στροφής $rotF = \nabla \times F$ ενός C^1 διανυσματικού πεδίου F με το ολοκλήρωμα του F επί του συνόρου ∂S.

Θεώρημα 1 (Stokes) Ας είναι S και F όπως παραπάνω. Τότε

$$\int_{\partial S} F = \iint_S \; rotF \,, \qquad (1)$$

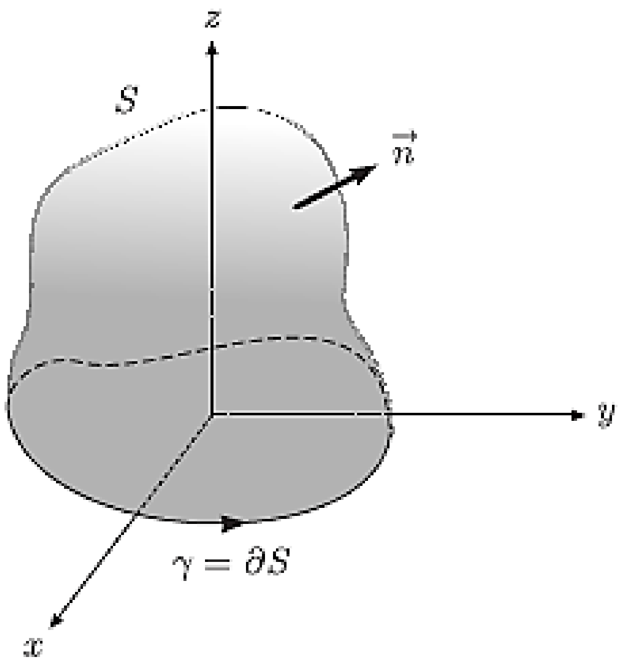
όπου ο προσανατολισμός του συνόρου ∂S είναι ο επαγόμενος προσανατολισμός από τον προσανατολισμό της επιφάνειας S.

Το θεώρημα του Stokes (3)

Ένας πρακτικός τρόπος που μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε τον επαγόμενο προσανατολισμό του συνόρου ∂S, είναι ο ακόλουθος: Αν ένας παρατηρητής προχωρά κατά μήκος του συνόρου, με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να έχει την διεύθυνση του σώματος προς τα πάνω, τότε ακολουθεί τον θετικό προσανατολισμό του ∂S αν το εσωτερικό της S βρίσκεται στα αριστερά του (Σχ.1)

Παράδειγμα 1: Αν $F = yi - xj + e^{xz}k$, και S είναι η επιφάνεια του σχήματος 2, δηλαδή μια σφαίρα (ή γενικότερα μια κλειστή επιφάνεια) που το σύνορο της είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$, να υπολογιστεί το $\iint_S \ rotF$.

Το θεώρημα του Stokes (4)



Σχήμα 2

Το θεώρημα του Stokes (5)

Λύση: Από τον Stokes, αρκεί να υπολογίσουμε το $\int_{\partial S} F$ που είναι πολύ πιο εύκολο. Έχουμε

$$\int_{\partial S} F = \int_0^{2\pi} \langle F(\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t), (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \langle (\eta\mu t, -\sigma\upsilon\nu t), (-\eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t)\rangle dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\eta\mu^2 t + \sigma\upsilon\nu^2 t) dt = -2\pi$$

Ας δικαιολογήσουμε τώρα αυτό που είπαμε στην αρχή της παραγράφου, ότι δηλαδή ο Stokes είναι ο καμπυλομένος Green.

Το θεώρημα του Stokes (6)

Παρατήρηση 1: Αν η επιφάνεια S είναι δισδιάστατη (δηλαδή είναι ένα χωρίο του $\mathbb{R}^2$) και το πεδίο

$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$$

είναι ανεξάρτητο του z, τότε η (1) δίνει τον Green:

$$\int_{\partial S} F = \iint_S \left(\partial_x Q - \partial_y P\right).$$

Πράγματι,

$$rotF = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\partial_x Q - \partial_y P\right)k,$$

και η εξωτερική κάθετος στην επίπεδη επιφάνεια S είναι το k.

Το θεώρημα του Stokes (7)

Έτσι, από τον ορισμό του επί-επιφάνειου ολοκληρώματος έχουμε

$$\iint_S rotF = \iint_S \langle\big(\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\big)k, k\rangle dxdy$$

$$= \iint_S \big\{\partial_x Q(x,y) - \partial_y P(x,y)\big\} dxdy\,.$$

Παρατήρηση 2: Αν το πεδίο F είναι αστρόβιλο, δηλαδή αν $rotF = 0$, τότε από τον τύπο (1) έχουμε

$$\int_{\partial S} F = \iint_S rotF = 0.$$

Το θεώρημα του Stokes (8)

Παρατήρηση 3: Δεν θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Stokes όπως και του Gauss, που θα μελετήσουμε παρακάτω. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, δεν είναι τίποτε άλλο από την κατά παράγοντες ολοκλήρωση.

Συντηρητικά πεδία (1)

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Stokes είναι ο χαρακτηρισμός των συντηρητικών πεδίων που έχουν μεγάλη πέραση στην Φυσική.

Στα επικαμπύλια ολοκληρώματα, είδαμε ότι ένα πεδίο κλίσεων

$$F = \nabla f$$

ικανοποιεί

$$\int_\gamma F = \int_\gamma \nabla f = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big),$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου, αφού εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης γ.

Συντηρητικά πεδία (2)

Τα πεδία κλίσεων είναι σημαντικά για την Φυσική. Συνήθως, το πεδίο F είναι η δύναμη και η f το δυναμικό. Π.χ. για την βαρύτητα, σε ένα σώμα μάζας m, η δύναμη που ασκείται είναι το βάρος του

$$F = g\frac{mM}{r^3}\vec{r},$$

όπου g είναι η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και M είναι η μάζα της γής. Το δυναμικό είναι ίσο με

$$f = -g\frac{mM}{r},$$

αφού

$$\nabla r^{-1} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Συντηρητικά πεδία (3)

Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τα πεδία που γράφονται σαν πεδία κλίσεων.

Θεώρημα 2 (Συντηρητικά πεδία) Έστω F ένα C^1 πεδίο ορισμένο στον $\mathbb{R}^3$ εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i. Για κάθε απλή και κλειστή καμπύλη γ,

$$\int_{\gamma} F = 0.$$

ii. Για οποιεσδήποτε απλές καμπύλες γ_1 και γ_2 με ίδια άκρα,

$$\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$$

Συντηρητικά πεδία (4)

iii. Το πεδίο F είναι η κλίση μιας συνάρτησης f, δηλαδή $F = \nabla f$.

iv. Το πεδίο F είναι αστρόβιλο, δηλαδή $\nabla \times F = 0$.

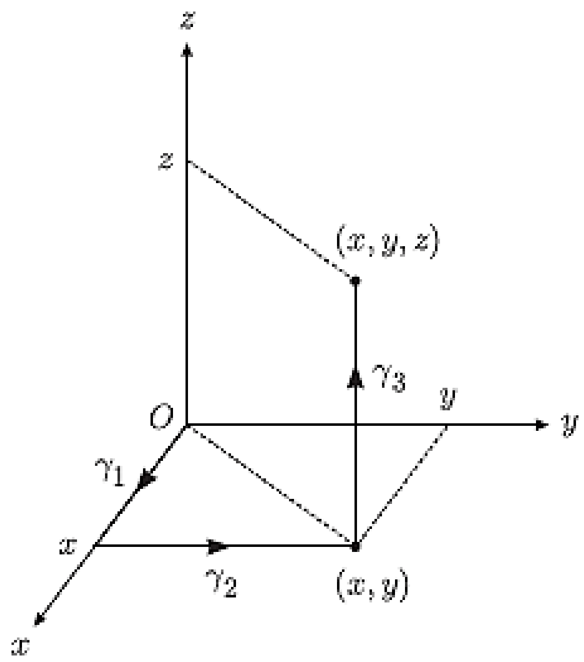
Ένα πεδίο που ικανοποιεί μια από τις παρακάτω συνθήκες λέγεται συντηρητικό.

Απόδειξη Θα ακολουθήσουμε την σειρά $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Είναι προφανής αφού η $\gamma_1 + \gamma_2^{op}$ είναι κλειστή καμπύλη.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ενώνουμε το 0 με το σημείο (x, y, z) ακολουθώντας την καμπύλη του σχήματος 3.

Συντηρητικά πεδία (5)



Σχήμα 3

Συντηρητικά πεδία (6)

Θέτουμε

$$f(x,y,z)=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} F$$

$$=\int_0^x F_1(t,0,0)dt+\int_0^y F_2(x,t,0)dt$$

$$+\int_0^z F_3(x,y,t)dt\,.$$

Έχουμε αμέσως ότι

$$\partial_z f(x,y,z)=F_3(x,y,z).$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε την υπόθεση και ακολουθούμε τον εξής δρόμο για να πάμε από το 0 στο (x,y,z):

Συντηρητικά πεδία (7)

Με την σ_1 ανεβαίνουμε στο z, μετά πάμε στο (z, y) παράλληλα με τον άξονα y, (σ_2), και τέλος φτάνουμε στο (x, y, z) παράλληλα με τον άξονα x (σ_3).

Επειδή η $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ έχει τα ίδια άκρα με την $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, από το (ii) έχουμε

$$\int_{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3} F = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} F = f(x, y, z).$$

Παραμετροποιώντας την $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, βρίσκουμε όπως και παραπάνω ότι

$$\partial_x f(x, y, z) = F_1(x, y, z).$$

Όμοια και για την $\partial_y f$.

Συντηρητικά πεδία (8)

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Πράξεις.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Stokes. Πράγματι, αν γ είναι κλειστή καμπύλη και S μια επιφάνεια με σύνορο την S, τότε από τον Stokes έχουμε

$$\int_{\gamma} F = \int_{S} \nabla \times F = 0$$

Συντηρητικά πεδία
Παράδειγμα (1)

Παράδειγμα 2: Αν
$$F = yi + (z\sigma\upsilon\nu yz + x)j + y(\sigma\upsilon\nu yz)k,$$
δείξτε, κάνοντας πράξεις ότι το F είναι αστρόβιλο και βρείτε ένα δυναμικό f του F.

Λύση: Ένας τρόπος για να βρούμε το δυναμικό είναι να μιμηθούμε την απόδειξη του θεωρήματος και να θέσουμε

$$f(x,y,z)$$
$$= \int_0^x F_1(t,0,0)dt + \int_0^y F_2(x,t,0)dt + \int_0^z F_3(x,y,t)dt$$
$$= \int_0^x 0dt + \int_0^y xdt + \int_0^z y\sigma\upsilon\nu yt dt$$
$$= xy + \eta\mu yz.$$

Συντηρητικά πεδία
Παράδειγμα (2)

Ένας δεύτερος τρόπος είναι να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτει:

$$\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x f = y, \\ \partial_y f = x + z\sigma\upsilon\nu yz, \\ \partial_z f = y\sigma\upsilon\nu yz. \end{cases}$$

Άρα

$$\begin{cases} f(x,y,z) = yx + c_1(y,z), \\ f(x,y,z) = xy + \eta\mu yz + c_2(x,z), \\ f(x,y,z) = \eta\mu yz + c_3(x,y). \end{cases}$$

Αν πάρουμε

$$c_1(y,z) = \eta\mu yz, c_2(y,z) = 0 \; \kappa\alpha\iota \; c_3(y,z) = xy,$$

Το βαρυτικό πεδίο (1)

έχουμε την λύση

$$f(x, y, z) = xy + \eta\mu yz$$

του ως άνω συστήματος των διαφορικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 3 (Το βαρυτικό πεδίο) Όπως ήδη είπαμε, η μάζα M της γής ασκεί σε ένα σώμα μάζας m που βρίσκεται σε απόσταση r την δύναμη

$$F = g\frac{mM}{r^3}\vec{r},$$

όπου g είναι η παγκόσμια σταθερά βαρύτητας.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι το βαρυτικό πεδίο F είναι αστρόβιλο, δηλαδή

$$\nabla \times F = 0.$$

Το βαρυτικό πεδίο (2)

Κατόπιν, για να βρούμε μια συνάρτηση δυναμικού για το πεδίο της βαρύτητας, παρατηρούμε ότι

$$\nabla r^{-1} = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

και συνεπώς το δυναμικό είναι η

$$f = -g\frac{mM}{r}.$$

Πράγματι

$$\nabla f = -gmM\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = gmM\frac{\vec{r}}{r^3} = F.$$

Το βαρυτικό πεδίο (3)

Παρατήρηση 4: Επισημαίνουμε μια σημαντική διαφορά μεταξύ των Stokes και του Green. Στον Stokes, το πεδίο μπορεί να έχει πεπερασμένο αριθμό ανώμαλων σημείων. Το κλασσικό παράδειγμα είναι το βαρυτικό πεδίο

$$F = g\frac{mM}{r^3}\vec{r},$$

που στο 0 δεν ορίζεται. Απεναντίας, στον Green τα πράγματα είναι πιο αυστηρά, και οι ανωμαλίες απαγορεύονται όπως δείχνει το παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγματα (1)

Παράδειγμα 4: Αν

$$F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j = -\frac{y}{x^2+y^2}i + \frac{x}{x^2+y^2}j,$$

$$(x,y) \neq (0,0),$$

τότε, κάνοντας πράξεις, δείξτε ότι

$$\partial_x Q = \partial_y P,$$

ενώ

$$\int_{S(0,1)} Pdx + Qdy = 2.$$

Προφανώς, αν αφαιρέσουμε την ανωμαλία από το $F(x,y)$, ο Green ισχύει. Το επόμενο παράδειγμα είναι τυπικό της εφαρμογής του Green, αφού μας επιτρέπει να υπολογίζουμε επικαμπύλια αλλάζοντας την καμπύλη ολοκλήρωσης.

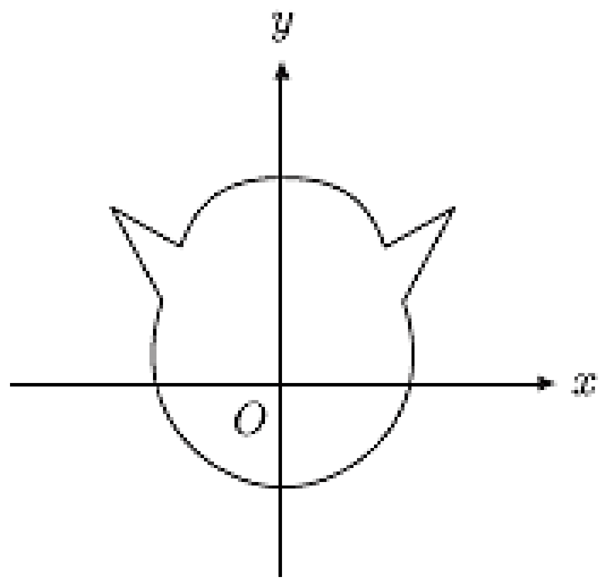
Παράδειγματα (2)

Παραδειγμα 5: Αν $F(x,y)$ είναι το πεδίο του παραπάνω παραδείγματος και γ είναι το κεφάλι του γάτου του σχήματος 4, να υπολογιστεί το $\int_\gamma F$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι το 0 είναι ανώμαλο σημείο του πεδίου F, και βρίσκεται στο εσωτερικό της γ. Συνεπώς ο Green δεν ισχύει. όμως, αν το R είναι μεγάλο, ο κύκλος $S(0,R)$ περιέχει το κεφάλι του γάτου. Ας είναι A το χωρίο που ορίζεται από τις δύο αυτές καμπύλες. Τότε το πεδίο F είναι C^1 αφού $0 \notin A$. Συνεπώς

$$\int_{\gamma+S(0,R)^{op}} F = \iint_A \left(\partial_x Q - \partial_y P\right) = 0,$$

Παράδειγματα (3)



Σχήμα 4

Παράδειγματα (4)

αφού όπως είδαμε

$$\partial_x Q = \partial_y P.$$

Άρα

$$\int_\gamma F = -\int_{S(0,R)^{op}} F = \iint_{S(0,R)} F$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\eta\mu\theta}{R^2}\right)(-R\eta\mu\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} \left(\frac{R\sigma\upsilon\nu\theta}{R^2}\right)(R\sigma\upsilon\nu\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Βιβλιογραφία

1. Γ. Γεωργανόπουλος, *Ολοκληρωτικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών*, Εκδόσεις Αδελφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995.
2. Τ. Χατζηαφράτης, *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*, Αθήνα, 1996.
3. J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2000.
4. M. Spivac, *Λογισμός σε Πολλαπλότητες*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Μιχάλης Μαριάς. «Λογισμός 4. Ενότητα 18: Το Θεώρημα του Stokes». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

http://eclass.auth.gr/courses/OCRS437/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Αναστασία Γ. Γρηγοριάδου
Θεσσαλονίκη, Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης