Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Λογισμός 4

Ασκήσεις

Μιχ. Γ. Μαριάς
Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2013

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

Ενότητα 2η και Ενότητα 3η

- Δείξτε ότι μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$ ή ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ είναι μέτρου μηδέν.
- Ας είναι $f: [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ η κλιμακωτή συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{1}{n^2}, x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], y \in [0,1].$$

  Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

- Ας είναι $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα. Δείξτε ότι για κάθε $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$, διάφορα μεταξύ τους,

$$\sum_{j \le n} \omega(f, x_j) \le f(b) - f(a).$$

- Ας είναι $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και φραγμένη. Δείξτε ότι το σύνολο των ασυναχειών της είναι μέτρου μηδέν και συνεπώς η f είναι ολοκληρώσιμη. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι το σύνολο $B_n = \left\{x: \omega(f,x) > \frac{1}{n}\right\}$είναι πεπερασμένο.)

Ενότητα 5η και Ενότητα 6η

- Αν $\Pi = [-1,1] \times [0,3]$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\iint_\Pi e^{x+y} dxdy, \iint_\Pi \sigma\upsilon\nu \frac{\pi x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi y}{2} dxdy.$$

- Αν $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$, να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\iint_D x^3 y dxdy, \iint_D (y + \eta\mu\pi x^2) dxdy.$$

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\iint_D (x^2 + 3y^2) dxdy, \acute{o}\pi o\upsilon\ D = \{x^2 + y^2 \le 1\},$$

$$\iint_D y e^x dxdy, \acute{o}\pi o\upsilon\ D = \{0 \le y \le 1, 0 \le x \le y^2\}.$$

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\iint_D 3x^2 y^2 dxdy,$$

  όπου D η περιοχή μεταξύ των καμπύλων

$$y = |x|, y = -|x|, x \in [-1,1],$$

και

$$\iint_D (x^4 + y^2) dxdy,$$

όπου D η περιοχή μεταξύ των καμπύλων $y = x^3 \; και \; y = x^2$.

- Σχεδιάστε το χωρίο D όπου γίνεται η ολοκλήρωση στα παρακάτω ολοκληρώματα, αλλάξτε την σειρά ολοκλήρωσης, και υπολογίστε τα:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \eta\mu\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dydx\,, \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2\, dxdy,$$

$$\int_1^2 \int_0^{logy} e^{-x}\, dydx\,, \int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+y^2}} dxdy.$$

- Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{\frac{y}{x}}\, dxdy\,, \int_0^1 \int_0^{\sigma\upsilon\nu^{-1}} e^{\eta\mu x}\, dxdy,$$

$$\int_0^1 \int_x^1 x^2 e^{y^2}\, dydx\,, \int_0^1 \int_x^1 x^2 e^{y^4}\, dydx.$$

- (Εναλλαγή παραγώγισης και ολοκλήρωσης) Αν η $f(x,y)$ είναι C^1, δείξτε ότι

$$\int_0^x \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) dydt = \int_a^b \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y) dtdy$$

και συμπεράνετε ότι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^b f(x,y)\, dy\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dy.$$

- (Το θεώρημα του Schwarz) Αν η $f(x,y)$ είναι C^2, δείξτε με την βοήθεια του Fubini ότι

$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y).$$

  - Υπόδειξη: Αν για κάποιο (x_0, y_0),

$$\partial_{xy} f(x_0,y_0) - \partial_{yx} f(x_0,y_0) > 0,$$

τότε από την C^2 συνέχεια της f, υπάρχει ένα μικρό ορθογώνιο $S = [a,b] \times [c,d]$ που περιέχει το (x_0, y_0) τ.ω.

$$\partial_{xy} f(x,y) - \partial_{yx} f(x,y) > 0, \forall (x,y) \in S.$$

Αλλά

$$\iint_S \left(\partial_{xy} f(x,y) - \partial_{yx} f(x,y)\right) dxdy = \cdots.$$

Ενότητα 7η

- Να υπολογιστεί ο όγκος του τετραέδρου T με κορυφές τα σημεία $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$, και $(0,0,1)$.
- Να υπολογιστεί η μάζα του ως άνω τετραέδρου αν η πυκνότητα του είναι ίση με xy (δηλαδή να υπολογιστεί το $\int_T \; xydxdydz$.)
- Να υπολογιστεί η μάζα του κυλίνδρου με βάση τον δίσκο $D(0, r)$ και ύψος h, αν η πυκνότητα του σε κάθε σημείο είναι ανάλογη με την απόσταση του σημείου από την βάση.
- Να ολοκληρωθεί η συνάρτηση
$$f(x, y, z)\; xy + yz + zx$$
επί του χωρίου του πρώτου ογδοημορίου που περικλείεται από το ελλειψοειδές
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$
- Να ολοκληρωθεί η συνάρτηση $f(x, y, z) = x$ επί της μοναδιαίας μπάλλας.
- Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z = y$, και από κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.
- Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από το επίπεδο $z = 3$ και το ημισφαίριο $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$.
- Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από την επιφάνεια $z = x^3 y$, και από κάτω από το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0), (2,0)$ και $(0,1)$.
- Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από την $z = x^2 + y^2$ και από κάτω από τον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$.
- Ας είναι D το στερεό με όγκο
$$V = \iiint_D \; dxdydz = \int_0^2 dx \int_0^{9-x^2} dy \int_0^{2-x} dz.$$
Να σχεδιαστεί το D και να βρεθούν τα όρια στα παραπάτω ολοκληρώματα
$$V = \int \; dy \int \; dx \int \; dz\,, \qquad V = \int \; dy \int \; dz \int \; dx,$$
$$V = \int \; dz \int \; dy \int \; dx\,, \qquad V = \int \; dz \int \; dx \int \; dy.$$

Ενότητα 8η και Ενότητα 9η

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\iint_{D(0,a)} e^{(x^2+y^2)} dxdy.$$

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\iint_{D(0,a)} (x^2+y^2)^{3/2} dxdy.$$

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\iint_T \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} dxdy,$$

όπου T είναι το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$, και $(1,1)$.

- Να ολοκληρωθεί η $g(x,y)$ επί του $D(0,1)$:
  1) $g(x,y) = \sigma\upsilon\nu(x^2+y^2)$,
  2) $g(x,y) = \eta\mu\sqrt{x^2+y^2}$.

- Με πολικές, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από κάτω από το επίπεδο $z = 0$, από πάνω από το ελλειψοειδές

$$b^2x^2 + b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2,$$

και στα πλευρά από τον κύλινδρο

$$x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Ενότητα 12η

- Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}, \int_0^1 dy \int_0^{e^y} logxdx, \iint_{x\geq 0, 0\leq y\leq 1} xy\, e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

και

$$\iint_D \frac{ydxdy}{x},$$

όπου το D ορίζεται από τις ευθείες $x = 1, x = y, \kappa\alpha\iota\ x = 2y$.

- Δείξτε ότι το

$$\iint_{D(0,1)} \frac{\eta\mu^2(x-y)}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} dxdy$$

υπάρχει.

- Δείξτε ότι το

$$\iint_{\substack{0\le x\le 1,\\ 0\le y\le x}} \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}\,dxdy$$

δεν υπάρχει.

- Με αλλαγή μεταβλητών, υπολογίστε τα μη γνήσια ολοκληρώματα

$$\iiint_{B(0,1)^c} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)}$$

και

$$\iiint_D \frac{(x^2+y^2+z^2)^{1/4}}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}}\,dxdydz,$$

όπου D είναι το πρώτο ογδοημόριο της μπάλας $x^2+y^2+z^2 \le a^2$.

- Για ποια α το μη γνήσιο ολοκλήρωμα

$$\iint_{[1,\infty)\times[0,1]} \frac{dxdy}{x^{a-1}(1+y^2)}$$

συγκλίνει;

Ενότητα 13η

- Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου F επί της καμπύλης γ, όταν:
  1) $F(x,y) = yi + xj \;\kappa\alpha\iota\; \gamma(t) = ti + t^2 j, t \in [0,1]$.
  2) $F(x,y) = y^2 xi + 2j \;\kappa\alpha\iota\; \gamma(t) = e^t i + e^{-t} j, t \in [0,1]$.
  3) $F(x,y) = (x-y)i + xyj \;\kappa\alpha\iota\; \gamma(t)$ το ευθύγραμμο τμήμα από το (1,2) στο (2,3).
  4) $F(x,y) = e^x i + \eta\mu(\pi x) j \;\kappa\alpha\iota\; \gamma(t)$ το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (1,0), (0,1), και (-1,0).

Ενότητα 14η

- Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green, υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:
  1) $\int_{S(0,r)} xy^2 dx + x^2 y dy$.
  2) $\int_T (1+10xy+y^2)dx + (6xy+5x^2)dy$, όπου T είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0), (r,0), (r,r), (0,r)$.

3) $\int_{S((-1,2),3)}(4xy+y^2)dx-(xy+3x^2)dy.$

- Αν γ είναι μια απλή, κλειστή και λεία καμπύλη, δείξτε ότι τα ολοκληρώματα

$$\int_\gamma xdy\,, \int_\gamma ydx$$

δίδουν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείει η γ.

- Να βρεθεί η κλειστή καμπύλη γ που μεγιστοποιεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma y^3dx+(3x-x^3)dy.$$

- Έστω $F=Pi+Qj$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο εκτός των σημείων A_1 και A_2 όπου δεν ορίζεται. Αν τα σημεία A_1 και A_2 ανήκουν στο εσωτερικό του κύκλου $S(0,R)$ και το πεδίο ικανοποιεί $\partial_x Q=\partial_y P$, να βρεθεί η σχέση μεταξύ των ολοκληρωμάτων

$$\int_{S(0,R)}Pdx+Qdy\,, \int_{S(A_1,\varepsilon)}Pdx+Qdy \ \ \kappa\alpha\iota \int_{S(A_2,\varepsilon)}Pdx+Qdy.$$

- Αν η f είναι αρμονική $\left(\partial_x^2 f+\partial_y^2 f=0\right)$στο χωρίο D, δείξτε ότι

$$\int_{\partial D}\partial_y f dx-\partial_x f dy=0.$$

- Αν η f είναι C^2 στο χωρίο D, δείξτε την ταυτότητα

$$\int_{\partial D}\langle f\nabla f,n\rangle=\iint_D (f\Delta f+\langle\nabla f,\nabla f\rangle)dxdy.$$

Ενότητα 16η

- Υπολογίστε το $\iint_S y^2$, όπου S είναι η μοναδιαία σφαίρα.
- Υπολογίστε το $\iint_S xy$, όπου S είναι η επιφάνεια του τετραέδρου με πλευρές $z=0, y=0, x+z=1$, και $x=y$.
- Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής S της σφαίρας $S_2(0,r)$ που βρίσκεται μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων που απέχουν μεταξύ τους απόσταση α. (Υπόδειξη: θεωρείστε την S ως επιφάνεια εκ περιστροφής).
- Έστω $D\xrightarrow{\Phi}\mathbb{R}^3$,

$$\Phi(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big),$$

μία παραμετρικοποίηση της επιφάνειας S. Θέτουμε

$$E = \|T_u\|^2, F = \langle T_u, T_v \rangle, G = \|T_v\|^2.$$

Δείξτε ότι

$$|S| = \int_D \sqrt{EG - F^2}.$$

- Έστω $D \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^3$ μια παραμετρικοποίηση της επιφάνειας S. Το συναρτησοειδές του Dirichlet της S είναι το ολοκλήρωμα:

$$J(\Phi) = \frac{1}{2}\int_D (\|T_u\|^2 + \|T_v\|^2) du dv.$$

Δείξτε ότι

$$|S| \leq J(\Phi).$$

Ενότητα 17η

- Αν $T(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2$ είναι η θερμοκρασία ενός σημείου στον $\mathbb{R}^3$, να υπολογιστεί η ροή της θερμότητας δια μέσου του κυλίνδρου S:

$$x^2 + y^2 = 2, 0 \leq y \leq 2.$$

(Να υπολογιστεί δηλαδή το ολοκλήρωμα $\iint_S \nabla T$.)

- Έστω S η επιφάνεια που ορίζεται από το ημισφαίριο

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z.$$

και την βάση του

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Αν $F = 2xi + 2yj + 3zk$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_S F$.

- Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_S F$, όπου

$$F = (x + 3y^5)i + (y + 10xz)j + (z - xy)k$$

και S η μισή σφάιρα

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0.$$

Ενότητα 18η

- Επαληθεύστε το θεώρημα του Stokes για το άνω ημισφαίριο $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ και για το πεδίο

$$F = 2xi + yj + zk.$$

- Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_S \ rotF$, όπου S είναι το τμήμα της μοναδιαίας σφαίρας που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $x + y + z = 1$ και $F = xi + yj + zk$.
- Με την βοήθεια του Stokes, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_S \ F$, όπου $F = xi + yj + zk$ και S το άνω ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$.
- Έστω S μια λεία επιφάνεια και F ένα διανυσματικό πεδίο κάθετο στην καμπύλη ∂S. Δείξτε ότι

$$\int_S \ rotF = 0.$$

- Αν S_1 και S_2 είναι δύο επιφάνειες με το ίδιο σύνορο (ας πούμε την κλειστή καμπύλη γ), περιγράψτε με ένα πρόχειρο σχήμα τον προσανατολισμό που πρέπει να έχουν οι S_1 και S_2, ώστε να ισχύει

$$\int_{S_1} rotF = \int_{S_2} rotF$$

- Με την βοήθεια της παραπάνω άσκησης, δείξτε ότι αν η S είναι κλειστή επιφάνεια, τότε

$$\int_S \ rotF = 0.$$

Ενότητα 19η

- Αν $S_2(0,1)$ είναι η μοναδιαία σφαίρα και

$$F = x^2 i + 2yj + z^2 k,$$

μέσω Gauss, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_{S_2(0,1)} F.$$

- Με το θεώρημα του Gauss, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_{S_2(0,1)} (x + y^2 + z).$$

- Αν A είναι ο μοναδιαίος κύβος, να υπολογιστεί με απ' ευθείας υπολογισμό το επι-επιφάνειο ολοκλήρωμα

$$\iint_A \ F,$$

όπου F είναι το διανυσματικό πεδίο

1) $F = i + j + k$,
2) $F = x^2 i + y^2 j + z^2 k$,
3) $F = x^3 i + y^3 j + z^3 k$.

Να γίνει επαλήθευση των αποτελεσμάτων με την βοήθεια του θεωρήματος του Gauss.

- Αν η S είναι κλειστή και λεία επιφάνεια, και F ένα C^2 διανυσματικό πεδίο, δείξτε ότι

$$\iint_S rotF = 0.$$

- Αν S είναι κλειστή επιφάνεια, $r = xi + yj + zk$, και n η εξωτερική κάθετος, δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\iint_S \langle r, n \rangle$$

ισούται με το τριπλάσιο του όγκου του στερεού που περικλείει η S.

- Αν $F = z^3 i + 3x^2 y j + 3xy^2 k$, υπολογίστε το

$$\iint_{S_2(0,1)} F.$$

- Αποδείξτε τις ταυτότητες του Green:

$$\iint_{\partial\Omega} \langle f\nabla g, n \rangle = \iiint_{\Omega} \{f\Delta g - \langle \nabla f, \nabla g \rangle\},$$

και

$$\iint_{\partial\Omega} \langle f\nabla g - g\nabla f, n \rangle = \iint_{\Omega} \{f\Delta g - g\Delta f\}.$$

- Αν το διανυσματικό πεδίο F εφάπτεται του συνόρου $\partial\Omega$ του Ω, δείξτε ότι

$$\iiint_{\Omega} divF = 0.$$