ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

ανοικτάμαθήματα
opencourses

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή μελετάμε Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Αλγόριθμος εύρεσης, Γραφική απεικόνιση Ιδιοδιανυσμάτων, Ιδιοτιμές αντιστρόφου και αναστρόφου και δυνάμεων πίνακα, χαρακτηριστικό πολυώνυμο, όμοιοι πίνακες και ιδιοτιμές

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n)$. Ιδιοδιάνυσμα $v \neq O$ αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ έτσι ώστε $f(v) = \lambda v$

Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$. Ιδιοδιάνυσμα $v \neq O$ αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ έτσι ώστε $f(v) = \lambda v$

$A \in M_n(\mathbb{R})(M_n(\mathbb{C})), X \neq O$. Ιδιοδιάνυσμα $X \neq O$ αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ έτσι ώστε $AX = \lambda X$

Ιδιοτιμές + ιδιοδιανύσματα f

1. $A = A_f$

Ιδιοτιμές + ιδιοδιανύσματα f

1. $A = A_f$
2. $det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$ (χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A)

Ιδιοτιμές + ιδιοδιανύσματα f

1. $A = A_f$
2. $det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$ (χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A)
3. $det(A - \lambda I) = 0$, ρίζες ιδιοτιμές

Ιδιοτιμές + ιδιοδιανύσματα f

1. $A = A_f$
2. $det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$ (χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A)
3. $det(A - \lambda I) = 0$, ρίζες ιδιοτιμές
4. Για κάθε μια από τις ρίζες βρίσκουμε τον $null(A - \lambda I)$ (Ιδιοχώρος$\neq O$)

Παράδειγμα

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$$

Παράδειγμα

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

Παράδειγμα

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + 2y, 3x + 2y)$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$
3. $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \lambda = 4, \lambda = -1$ Ιδιοτιμές

Παράδειγμα

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x + 2y, 3x + 2y)$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
2. $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$
3. $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \lambda = 4, \lambda = -1$ Ιδιοτιμές
   Παρατήρηση: Το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A ανν $det(A) = 0$

Παράδειγμα

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

3. $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \lambda = 4, \lambda = -1$ Ιδιοτιμές
Παρατήρηση: Το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A ανν $det(A) = 0$

4. $null(A - 4I) = \{y(\frac{2}{3}, 1) : y \in \mathbb{R}\},$

Παράδειγμα

$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+2y, 3x+2y)$

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4$

3. $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \lambda = 4, \lambda = -1$ Ιδιοτιμές
Παρατήρηση: Το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα A ανν $det(A) = 0$

4. $null(A-4I) = \{y(\frac{2}{3}, 1) : y \in \mathbb{R}\}$,
$null(A+I) = \{y(-1,1) : y \in \mathbb{R}\}$

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \frac{\pi}{3}$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \frac{\pi}{3}$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.Προφανώς δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα και άρα ούτε ιδιοτιμές.

Παράδειγμα

Χαραλάμπους Χαρά

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \frac{\pi}{3}$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.Προφανώς δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα και άρα ούτε ιδιοτιμές.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \pi$.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \frac{\pi}{3}$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.Προφανώς δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα και άρα ούτε ιδιοτιμές.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \pi$. Προφανώς κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της f με ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \frac{\pi}{3}$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.Προφανώς δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα και άρα ούτε ιδιοτιμές.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \pi$. Προφανώς κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της f με ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντανάκλαση ως προς τον άξονα των x.

Παράδειγμα

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \frac{\pi}{3}$. Αναζητούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.Προφανώς δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα και άρα ούτε ιδιοτιμές.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ περιστροφή κατά $\theta = \pi$. Προφανώς κάθε μη μηδενικό διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της f με ιδιοτιμή $\lambda = -1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ αντανάκλαση ως προς τον άξονα των x. Τότε η f έχει ιδιοτιμή $\lambda = 1$ με ιδιοδιανύσματα όλα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του e_1 και έχει ιδιοτιμή $\lambda = -1$ με ιδιοδιανύσματα όλα τα μη μηδενικά πολλαπλάσια του e_2.

Παράδειγμα

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

Παράδειγμα

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

2. $P_A(x) = -x^3 - 5x$

Παράδειγμα

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$
2. $P_A(x) = -x^3 - 5x$
3. Ιδιοτιμές $x = 0, x = \sqrt{5}i, x = -\sqrt{5}i$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης