ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 2. Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Παράδειγμα

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή μελετάμε Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα, Αλγόριθμος εύρεσης, Γραφική απεικόνιση Ιδιοδιανυσμάτων, Ιδιοτιμές αντιστρόφου και αναστρόφου και δυνάμεων πίνακα, χαρακτηριστικό πολυώνυμο, όμοιοι πίνακες και ιδιοτιμές

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα τον $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα τον $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

Μια γραμμική f απεικονίζει τον μοναδιαίο κύβο σε ένα παραλληλεπίπεδο, του οποίου ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση.

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα τον $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$

Μια γραμμική f απεικονίζει τον μοναδιαίο κύβο σε ένα παραλληλεπίπεδο, του οποίου ο όγκος είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμική συνάρτηση.
Αφού η ορίζουσα του πίνακα της f είναι μηδέν, τότε f απεικονίζει τον μοναδιαίο κύβο σε ένα επίπεδο παραλληλόγραμμο.

$\lambda = 0, null(A)$

$\lambda = 0, null(A)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0, null(A)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

$\lambda = 0, null(A)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

$$V_0(A) = \{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{C}\}$$

$$\lambda = -\sqrt{5}i, null(A + \sqrt{5}i)$$

$\lambda = -\sqrt{5}i, null(A + \sqrt{5}i)$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5}i & 0 & -6 \\ 0 & \sqrt{5}i & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{5}i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{5}i \\ 0 & \sqrt{5}i & 1 \\ 0 & -\sqrt{5}i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6\sqrt{5}i}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{5}i}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -\sqrt{5}i, null(A + \sqrt{5}i)$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5}i & 0 & -6 \\ 0 & \sqrt{5}i & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{5}i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{5}i \\ 0 & \sqrt{5}i & 1 \\ 0 & -\sqrt{5}i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6\sqrt{5}i}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{5}i}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{6\sqrt{5}i}{5}z =& 0 \\ y - \frac{\sqrt{5}i}{5}z =& 0. \end{aligned}$$

$\lambda = -\sqrt{5}i, null(A + \sqrt{5}i)$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5}i & 0 & -6 \\ 0 & \sqrt{5}i & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{5}i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{5}i \\ 0 & \sqrt{5}i & 1 \\ 0 & -\sqrt{5}i & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{6\sqrt{5}i}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{5}i}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + \frac{6\sqrt{5}i}{5}z = 0$$

$$y - \frac{\sqrt{5}i}{5}z = 0.$$

$$V_{-\sqrt{5}i}(A) = \{(-\frac{6\sqrt{5}i}{5}z, \frac{\sqrt{5}i}{5}z, z) : z \in \mathbb{C}\}$$

Επαλήθευση

$$z = 5, (-6\sqrt{5}i, \sqrt{5}i, 5)$$

Επαλήθευση

$z = 5, (-6\sqrt{5}i, \sqrt{5}i, 5)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6\sqrt{5}i \\ \sqrt{5}i \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 5 \\ -5\sqrt{5}i \end{pmatrix}$$

$$= -\sqrt{5}i \begin{pmatrix} -6\sqrt{5}i \\ \sqrt{5}i \\ 5 \end{pmatrix}$$

Πίνακες

Αν C, D είναι $n \times n$ τότε $CD = n \times n$ πίνακας

Πίνακες

Αν C, D είναι $n \times n$ τότε $CD = n \times n$ πίνακας

$$D = [D_1, D_2, \ldots, D_n] \Rightarrow CD = [CD_1, CD_2, \ldots, CD_n]$$

Πίνακες

Αν C, D είναι $n \times n$ τότε $CD = n \times n$ πίνακας

$$D = [D_1, D_2, \dots, D_n] \Rightarrow CD = [CD_1, CD_2, \dots, CD_n]$$

Αν A είναι $n \times n$, και X_1 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή λ_1. Έστω $B = [X_1, \dots]$ πίνακας με πρώτη στήλη το X_1.

Πίνακες

Αν C, D είναι $n \times n$ τότε $CD = n \times n$ πίνακας

$$D = [D_1, D_2, \ldots, D_n] \Rightarrow CD = [CD_1, CD_2, \ldots, CD_n]$$

Αν A είναι $n \times n$, και X_1 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή λ_1. Έστω $B = [X_1, \ldots]$ πίνακας με πρώτη στήλη το X_1. Τότε $AB = [\lambda_1 X_{1,\ldots}]$

Πίνακες

Αν C, D είναι $n \times n$ τότε $CD = n \times n$ πίνακας

$$D = [D_1, D_2, \ldots, D_n] \Rightarrow CD = [CD_1, CD_2, \ldots, CD_n]$$

Αν A είναι $n \times n$, και X_1 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή λ_1. Έστω $B = [X_1, \ldots]$ πίνακας με πρώτη στήλη το X_1. Τότε
$AB = [\lambda_1 X_{1,\ldots}]$
Έστω επιπρόσθετα ότι ο B είναι αντιστρέψιμος.

Πίνακες

Αν C, D είναι $n \times n$ τότε $CD = n \times n$ πίνακας

$$D = [D_1, D_2, \ldots, D_n] \Rightarrow CD = [CD_1, CD_2, \ldots, CD_n]$$

Αν A είναι $n \times n$, και X_1 ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή λ_1. Έστω $B = [X_1, \ldots]$ πίνακας με πρώτη στήλη το X_1. Τότε $AB = [\lambda_1 X_{1,\ldots}]$
Έστω επιπρόσθετα ότι ο B είναι αντιστρέψιμος. Τότε

$$B^{-1}AB = [\lambda B^{-1}X_1, \ldots] = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & , \ldots \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Έστω $B = [\ldots, X_1]$ αντιστρέψιμος πίνακας με τελευταία στήλη το X_1.

Έστω $B = [\dots, X_1]$ αντιστρέψιμος πίνακας με τελευταία στήλη το X_1.

$$\text{Τότε } B^{-1}AB = [\lambda B^{-1}X_1, \dots] = \begin{pmatrix} \dots, & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Έστω $B = [\ldots, X_1]$ αντιστρέψιμος πίνακας με τελευταία στήλη το X_1.

$$\text{Τότε } B^{-1}AB = [\lambda B^{-1}X_1, \ldots] = \begin{pmatrix} & 0 \\ & \vdots \\ \ldots, & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

όμοια αν B αντιστρέψιμος πίνακας με οποιαδήποτε άλλη στήλη το X_1

Παράδειγμα

Έστω A ένας 3×3 πίνακας με ιδιοτιμές $1, 2, 3$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

Έστω A ένας 3×3 πίνακας με ιδιοτιμές $1, 2, 3$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Έστω $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

Έστω A ένας 3×3 πίνακας με ιδιοτιμές $1, 2, 3$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Έστω $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ τότε $B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ και

συνεπώς διαγωνιοποιήσαμε τον A.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης