ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 3. Διαγωνιοποίηση

Στην ενότητα αυτή μελετούνται Ιδιοχώροι, Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα, Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων για διαφορετικές ιδιοτιμές, Διαγωνιοποίηση, Εφαρμογές: πρόβλημα κυνηγού+λείας,

$$QAQ^{-1} = D,$$

όπου D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο της ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$$QAQ^{-1} = D,$$

όπου D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο της ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ιδιοτιμές του πίνακα D είναι οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

$$QAQ^{-1} = D,$$

όπου D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο της ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ιδιοτιμές του πίνακα D είναι οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
1ος Τρόπος: $det(D - \lambda_i I) = 0$ αφού στην i γραμμή και στήλη ο πίνακας $(D - \lambda_i I)$ έχει μηδενικά.

$$QAQ^{-1} = D,$$

όπου D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο της ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ιδιοτιμές του πίνακα D είναι οι $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
1ος Τρόπος: $det(D - \lambda_i I) = 0$ αφού στην i γραμμή και στήλη ο πίνακας $(D - \lambda_i I)$ έχει μηδενικά.
2ος Τρόπος: Θεωρούμε τον πίνακα στήλη e_i που έχει παντού μηδενικά εκτώς απο την i γραμμή. Τότε παρατηρούμε ότι $De_i = \lambda_i e_i$, άρα το e_i είναι ιδιοδιάνυσμα για τον πίνακα D με ιδιοτιμή λ_i.

Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(v) =$ η προβολή του διανύσματος v σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ϕ

Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(v) =$ η προβολή του διανύσματος v σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ϕ

Λύση: Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα του επιπέδου δε μετακινούνται, δηλαδή $\phi(v) = v$ άρα $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή και όλα τα μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου είναι ιδιοδιανύσματα

Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(v) =$ η προβολή του διανύσματος v σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ϕ

Λύση: Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα του επιπέδου δε μετακινούνται, δηλαδή $\phi(v) = v$ άρα $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή και όλα τα μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου είναι ιδιοδιανύσματα
Προφανώς δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα σε γωνία με το επίπεδο διαφορετική του $0, \frac{\pi}{2}$

Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, με $\phi(v) =$ η προβολή του διανύσματος v σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ϕ

Λύση: Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα του επιπέδου δε μετακινούνται, δηλαδή $\phi(v) = v$ άρα $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή και όλα τα μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου είναι ιδιοδιανύσματα

Προφανώς δεν υπάρχουν ιδιοδιανύσματα σε γωνία με το επίπεδο διαφορετική του $0, \frac{\pi}{2}$

Άν το διάνυσμα v είναι κάθετο στο επίπεδο τότε $\phi(v) = O$ άρα $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή και όλα τα μη μηδενικά διανύσματα κάθετα στο επίπεδο είναι ιδιοδιανύσματα

Αν e_1, e_2 διανύσματα του επιπέδου κάθετα μεταξύ τους και e_3 διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο τότε έχουμε

Αν e_1, e_2 διανύσματα του επιπέδου κάθετα μεταξύ τους και e_3 διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο τότε έχουμε
$\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή και e_1, e_2 ιδιοδιανύσματα

Αν e_1, e_2 διανύσματα του επιπέδου κάθετα μεταξύ τους και e_3 διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο τότε έχουμε
$\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή και e_1, e_2 ιδιοδιανύσματα
$\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή και e_3 ιδιοδιάνυσμα

Αν e_1, e_2 διανύσματα του επιπέδου κάθετα μεταξύ τους και e_3 διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο τότε έχουμε
$\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή και e_1, e_2 ιδιοδιανύσματα
$\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή και e_3 ιδιοδιάνυσμα
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτής της συνάρτησης είναι το $P_A(x) = -(x-1)^2 x$
Στη βάση των ιδιοδιανυσμάτων έχουμε Άρα
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ οι τιμές στη διαγώνιο είναι οι ιδιοτιμές.

Παρατήρηση 1: Αν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα για ενα πινακα A, με ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $P_A(x) = (-1)^n(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$

Παρατήρηση 1: Αν $v_1, v_2, \ldots, v_n$ είναι βάση που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα για ενα πινακα A, με ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το $P_A(x) = (-1)^n(x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n)$

Παρατήρηση 2: Ο πίνακας που αντιστοιχεί σε βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ιδιοδιανυσμάτων με ιδιοτιμες $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι διαγώνιος με διαγώνια στοιχεία τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Έστω $v = (3, 1)$ ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 και $u = (2, 1)$ ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 4. Να βρεθεί γραμμική $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τις παραπάνω ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Λύση: Θεωρούμε τον πίνακα P των ιδιοδιανυσμάτων, τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Είναι

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Έστω $v = (3,1)$ ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 και $u = (2,1)$ ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 4. Να βρεθεί γραμμική $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τις παραπάνω ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Λύση: Θεωρούμε τον πίνακα P των ιδιοδιανυσμάτων, τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Είναι

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

Έστω $v = (3,1)$ ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 1 και $u = (2,1)$ ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή 4. Να βρεθεί γραμμική $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τις παραπάνω ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Λύση: Θεωρούμε τον πίνακα P των ιδιοδιανυσμάτων, τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Είναι

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

και βρίσκουμε την απεικόνιση ϕ

Έστω A πίνακας και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ιδιοτιμές του. Αν $u_1, \dots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα και $w_1, \dots, w_t \in V_{\lambda_2}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε τα διανύσματα $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω A πίνακας και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ιδιοτιμές του. Αν $u_1, \ldots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα και $w_1, \ldots, w_t \in V_{\lambda_2}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση: Έστω ότι
$k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t.$

Έστω A πίνακας και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ιδιοτιμές του. Αν $u_1, \dots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα και $w_1, \dots, w_t \in V_{\lambda_2}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε τα διανύσματα $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση: Έστω ότι $k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t$.Θέτουμε $u = k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n \in V_{\lambda_1}(A), w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t \in V_{\lambda_2}(A)$. Άρα $u + w = 0$.

Έστω A πίνακας και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ιδιοτιμές του. Αν $u_1, \dots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα και $w_1, \dots, w_t \in V_{\lambda_2}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε τα διανύσματα $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση: Έστω ότι $k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t$.Θέτουμε $u = k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n \in V_{\lambda_1}(A), w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t \in V_{\lambda_2}(A)$. Άρα $u + w = 0$.Αν $u, w \neq O$ τότε δυο ιδιοδιανύσματα για διαφορετικές ιδιοτιμές που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα $u = w = O$.

Έστω A πίνακας και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ιδιοτιμές του. Αν $u_1, \ldots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα και $w_1, \ldots, w_t \in V_{\lambda_2}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση: Έστω ότι $k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t$.Θέτουμε $u = k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n \in V_{\lambda_1}(A), w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t \in V_{\lambda_2}(A)$.
Άρα $u + w = 0$.Αν $u, w \neq O$ τότε δυο ιδιοδιανύσματα για διαφορετικές ιδιοτιμές που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα $u = w = O$.
Άρα $u = k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n = 0 \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0$ αφού $u_1, \ldots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Έστω A πίνακας και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ιδιοτιμές του. Αν $u_1, \ldots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα και $w_1, \ldots, w_t \in V_{\lambda_2}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα τότε τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Λύση: Έστω ότι $k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t$.Θέτουμε $u = k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n \in V_{\lambda_1}(A), w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t \in V_{\lambda_2}(A)$.
Άρα $u + w = 0$.Αν $u, w \neq O$ τότε δυο ιδιοδιανύσματα για διαφορετικές ιδιοτιμές που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα $u = w = O$.
Άρα $u = k_1 u_1 + \cdots + k_n u_n = 0 \Rightarrow k_1 = \ldots = k_n = 0$ αφού $u_1, \ldots, u_n \in V_{\lambda_1}(A)$ γραμμικά ανεξάρτητα.
Αντίστοιχα μπορεί κανείς να δείξει ότι $\alpha_1 = \ldots = \alpha_t = 0$.
Συνεπώς τα διανύσματα $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_t$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης