ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 3. Διαγωνιοποίηση

Εφαρμογή

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή μελετούνται Ιδιοχώροι, Αλγεβρική και Γεωμετρική Πολλαπλότητα, Ανεξαρτησία Ιδιοδιανυσμάτων για διαφορετικές ιδιοτιμές, Διαγωνιοποίηση, Εφαρμογές: πρόβλημα κυνηγού+λείας,

Εφαρμογή

Έστω x_k ο αριθμός των ποντικών σε χρόνο k
Έστω y_k ο αριθμός των γερακιών σε χρόνο k

Εφαρμογή

Έστω x_k ο αριθμός των ποντικών σε χρόνο k
Έστω y_k ο αριθμός των γερακιών σε χρόνο k
Ισχύει ότι

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{100}x_k$$
$$x_{k+1} = -\frac{50}{4}y_k + \frac{5}{4}x_k$$

Εφαρμογή

Έστω x_k ο αριθμός των ποντικών σε χρόνο k
Έστω y_k ο αριθμός των γερακιών σε χρόνο k
Ισχύει ότι

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{100}x_k$$
$$x_{k+1} = -\frac{50}{4}y_k + \frac{5}{4}x_k$$

Δεδομένα: $x_0 = 1600$ ποντικούς, $y_0 = 50$ γεράκια

Εφαρμογή

Έστω x_k ο αριθμός των ποντικών σε χρόνο k
Έστω y_k ο αριθμός των γερακιών σε χρόνο k
Ισχύει ότι

$$y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{100}x_k$$
$$x_{k+1} = -\frac{50}{4}y_k + \frac{5}{4}x_k$$

Δεδομένα: $x_0 = 1600$ ποντικούς, $y_0 = 50$ γεράκια
Ερώτημα: Τι θα γίνει στο μέλλον, θα υπάρξει ισορροπία ή θα εξαφανιστούν οι ποντικοί και/ή τα γεράκια;

Λύση

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{100} \\ -\frac{50}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Λύση

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{100} \\ -\frac{50}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$και θέτουμε $V_k = \begin{pmatrix} 50 \\ 1600 \end{pmatrix}$

Λύση

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{100} \\ -\frac{50}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ και θέτουμε $V_k = \begin{pmatrix} 50 \\ 1600 \end{pmatrix}$

Ισχύει ότι $V_{k+1} = AV_k, V_0 = \begin{pmatrix} y_k \\ x_k \end{pmatrix}$

Λύση

Θεωρούμε τον πίνακα των συντελεστών
$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{100} \\ -\frac{50}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ και θέτουμε $V_k = \begin{pmatrix} 50 \\ 1600 \end{pmatrix}$
Ισχύει ότι $V_{k+1} = AV_k, V_0 = \begin{pmatrix} y_k \\ x_k \end{pmatrix}$
Πχ έχουμε $V_1 = AV_0 = \begin{pmatrix} 41 \\ 1375 \end{pmatrix}$,
$V_2 = AV_1 = A^2 V_0, \ldots, V_{k+1} = A^{k+1} V_0, k \in \mathbb{N}$(επαγωγικά)
Τι γίνεται όταν $k >> 0$, ποιό το όριο όταν $k \to \infty$;
Για να μελετήσουμε τον A^{k+1} βρίσκουμε ιδιοτιμές του A

Έστω ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμες λ_1, λ_2 και P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων.

Έστω ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμες λ_1, λ_2 και P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων.

Τότε, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Έστω ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμες λ_1, λ_2 και P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων.

Τότε, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Άρα θα έχουμε $A^{k+1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1}$

Έστω ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμες λ_1, λ_2 και P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων.

Τότε, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Άρα θα έχουμε $A^{k+1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1}$

Προκύπτει ότι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{4}$

Έστω ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμες λ_1, λ_2 και P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων.

Τότε, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Άρα θα έχουμε $A^{k+1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1}$

Προκύπτει ότι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{4}$

Παρατηρούμε ότι $A^{k+1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{3}{4})^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1}$, άρα οριακά θα έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} A^{k+1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Έστω ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμες λ_1, λ_2 και P ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων.

Τότε, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Άρα θα έχουμε $A^{k+1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1}$

Προκύπτει ότι $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{3}{4}$

Παρατηρούμε ότι $A^{k+1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{3}{4})^{k+1} \end{pmatrix} P^{-1}$, άρα οριακά θα έχουμε

$$\lim_{k \to \infty} A^{k+1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Κατόπιν πράξεων, βρίσκουμε ότι $\lim_{k \to \infty} A^{k+1} = \begin{pmatrix} 14 \\ 700 \end{pmatrix}$, δηλαδή θα υπάρξει ισορροπία στο οικοσύστημα!

Θεώρημα *Cayley – Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Θεώρημα *Cayley – Hamilton*

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P_A(x) = (-1)^n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Τότε, $(-1)^n A^n + \ldots + a_1 A + a_0 I = O$, δηλαδή $P_A(A) = O$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης