ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 7. Εφαρμογές προβολών

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ορθογώνιο συμπλήρωμα χώρου γραμμών= μηδενοχώρος του συζυγή αναστρόφου, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο.

Ασκήσεις

Ερώτημα: Ισχύει ότι $\{O\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$;

Ασκήσεις

Ερώτημα: Ισχύει ότι $\{O\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$;

Απάντηση: Κατ αρχάς έχουμε προφανώς ότι $\{O\}^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$.

Ασκήσεις

Ερώτημα: Ισχύει ότι $\{O\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$;

Απάντηση: Κατ αρχάς έχουμε προφανώς ότι $\{O\}^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$. Έστω $v \in \mathbb{R}^n$. Αφού $\langle v, O \rangle = 0$ έχουμε ότι $v \in \{O\}^{\perp}$, άρα $\mathbb{R}^n \subset \{O\}^{\perp}$.

Ασκήσεις

Ερώτημα: Ισχύει ότι $\{O\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$;

Απάντηση: Κατ αρχάς έχουμε προφανώς ότι $\{O\}^{\perp} \subset \mathbb{R}^n$.
Έστω $v \in \mathbb{R}^n$. Αφού $\langle v, O \rangle = 0$ έχουμε ότι $v \in \{O\}^{\perp}$, άρα $\mathbb{R}^n \subset \{O\}^{\perp}$.
Άρα $\{O\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$

Ερώτημα: Ισχύει ότι $V \perp W \Rightarrow V^{\perp} \perp W^{\perp}$;

Ερώτημα: Ισχύει ότι $V \perp W \Rightarrow V^{\perp} \perp W^{\perp}$;

Απάντηση: Όχι!

Αντιπαράδειγμα: Αν $V = \{O\} \subset \mathbb{R}^2, W = S(\{(1,1)\})$

Ερώτημα: Ισχύει ότι $V \perp W \Rightarrow V^{\perp} \perp W^{\perp}$;

Απάντηση: Όχι!

Αντιπαράδειγμα: Αν $V = \{O\} \subset \mathbb{R}^2, W = S(\{(1,1)\})$ τότε $V^{\perp} = \mathbb{R}^2, W^{\perp} = S(\{(-1,1)\})$ και δεν ισχύει ότι $\mathbb{R}^2 \perp W^{\perp}$

Ερώτημα: Ισχύει ότι $V \perp U, U \perp W \Rightarrow V^{\perp} \perp W^{\perp}$;

Ερώτημα: Ισχύει ότι $V \perp U, U \perp W \Rightarrow V^{\perp} \perp W^{\perp}$;

Απάντηση: Όχι!

Αντιπαράδειγμα: Αν $V = W = \mathbb{R}^2$ τότε δεν ισχύει ότι $V \perp V$

Άσκηση: Να βρεθεί ορθογώνια βάση του
$U = S(\{u_1 = (1, i, 0), u_2 = (-i, 1, 1)\}) \subset \mathbb{C}^3$

Άσκηση: Να βρεθεί ορθογώνια βάση του
$U = S(\{u_1 = (1, i, 0), u_2 = (-i, 1, 1)\}) \subset \mathbb{C}^3$

Παρατηρούμε ότι $\langle u_1, u_2 \rangle = 2i, \langle u_2, u_1 \rangle = \overline{\langle u_1, u_2 \rangle} = -2i$

Άσκηση: Να βρεθεί ορθογώνια βάση του $U = S(\{u_1 = (1, i, 0), u_2 = (-i, 1, 1)\}) \subset \mathbb{C}^3$

Παρατηρούμε ότι $\langle u_1, u_2 \rangle = 2i, \langle u_2, u_1 \rangle = \overline{\langle u_1, u_2 \rangle} = -2i$
$u_2' = u_2 - proj_{u_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_2 = (0, 0, 1) = e_3$

Άσκηση: Να βρεθεί ορθογώνια βάση του
$U = S(\{u_1 = (1, i, 0), u_2 = (-i, 1, 1)\}) \subset \mathbb{C}^3$

Παρατηρούμε ότι $\langle u_1, u_2 \rangle = 2i, \langle u_2, u_1 \rangle = \overline{\langle u_1, u_2 \rangle} = -2i$
$u_2' = u_2 - proj_{u_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_2 = (0, 0, 1) = e_3$
Άρα $\{u_1, e_3\}$ μια ορθογώνια βάση του U.

Άσκηση(συνέχεια): Να γραφεί το διάνυσμα $w = (1, 1, 1)$ ως άθροισμα $w = u + u'$, όπου $u = proj_U w$

Άσκηση(συνέχεια): Να γραφεί το διάνυσμα $w = (1, 1, 1)$ ως άθροισμα $w = u + u'$, όπου $u = proj_U w$

Αφού η βάση Βρίσκουμε $\{u_1, e_3\}$ είναι ορθογώνια, τότε έχουμε $u = proj_U w = proj_{u_1} w + proj_{e_3} w =$
$\frac{\langle w, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle w, e_3 \rangle}{\langle e_3, e_3 \rangle} e_3 = \left(\frac{1-i}{2}, \frac{1+i}{2}, 1 \right), u' = w - u$

Άσκηση: Έστω $u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,2), w = (2,3,3) \in \mathbb{R}^3$, $U = S(\{u_1, u_2\})$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του w από το U.

Άσκηση: Έστω $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 2), w = (2, 3, 3) \in \mathbb{R}^3, U = S(\{u_1, u_2\})$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του w από το U.

Ελάχιστη απόσταση= μήκος του κάθετου προς το U διανύσματος με τελικό σημείο το $(2, 3, 3)$

Άσκηση: Έστω $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 2), w = (2, 3, 3) \in \mathbb{R}^3, U = S(\{u_1, u_2\})$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του w από το U.

Ελάχιστη απόσταση= μήκος του κάθετου προς το U διανύσματος με τελικό σημείο το $(2, 3, 3)$
Έχουμε $w = u + u'$, όπου $u = proj_U w, u' \in U^{\perp}$ και αναζητούμε το $\|u'\|$.

Άσκηση: Έστω $u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,2), w = (2,3,3) \in \mathbb{R}^3$, $U = S(\{u_1, u_2\})$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του w από το U.

Ελάχιστη απόσταση= μήκος του κάθετου προς το U διανύσματος με τελικό σημείο το $(2,3,3)$
Έχουμε $w = u + u'$, όπου $u = proj_U w, u' \in U^{\perp}$ και αναζητούμε το $\|u'\|$.
Ορθογώνια βάση του U:
$u_1 = (1,0,1), u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. Θεωρούμε την ορθογώνια βάση $\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (-1,2,1)\}$ του U.

Άσκηση: Έστω $u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,2), w = (2,3,3) \in \mathbb{R}^3, U = S(\{u_1, u_2\})$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του w από το U.

Ελάχιστη απόσταση= μήκος του κάθετου προς το U διανύσματος με τελικό σημείο το $(2,3,3)$
Έχουμε $w = u + u'$, όπου $u = proj_U w, u' \in U^{\perp}$ και αναζητούμε το $\|u'\|$.
Ορθογώνια βάση του U:
$u_1 = (1,0,1), u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. Θεωρούμε την ορθογώνια βάση $\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (-1,2,1)\}$ του U.
$u = proj_U w = proj_{v_1} w + proj_{v_2} w = \frac{\langle w, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle w, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \frac{5}{2}(1,0,1) + \frac{7}{6}(-1,2,1), u' = w - u$

Άσκηση: Έστω $u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,1,2), w = (2,3,3) \in \mathbb{R}^3$, $U = S(\{u_1, u_2\})$. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του w από το U.

Ελάχιστη απόσταση= μήκος του κάθετου προς το U διανύσματος με τελικό σημείο το $(2,3,3)$
Έχουμε $w = u + u'$, όπου $u = proj_U w, u' \in U^\perp$ και αναζητούμε το $\|u'\|$.
Ορθογώνια βάση του U:
$u_1 = (1,0,1), u_2' = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. Θεωρούμε την ορθογώνια βάση $\{v_1 = (1,0,1), v_2 = (-1,2,1)\}$ του U.
$u = proj_U w = proj_{v_1} w + proj_{v_2} w = \frac{\langle w, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle w, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \frac{5}{2}(1,0,1) + \frac{7}{6}(-1,2,1), u' = w - u$
$\|u'\| = \sqrt{\langle u', u' \rangle}$ η ζητούμενη απόσταση

Άσκηση: Να δειχθεί ότι το παρακάτω σύστημα δεν είναι συμβατό:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + 3y &= 2 \\ x + 5y &= 3 \end{aligned}$$

Έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & | & 2 \\ 1 & 5 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 5 & | & 0 \\ 0 & 6 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Άρα $rank(A) = 2$ ενώ $rank([A|B]) = 3$

Παρατήρηση: Αν $U = S(\{(1,2,1),(-1,3,5)\})$ τότε $(1,2,3) \notin U$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης