Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 7. Εφαρμογές προβολών

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 7. Εφαρμογές προβολών

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 7. Εφαρμογές προβολών

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ορθογώνιο συμπλήρωμα χώρου γραμμών= μηδενοχώρος του συζυγή αναστρόφου, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο.

Ασκήσεις

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 4a_1 b_1 - 2a_1 b_2 - 2a_2 b_1 + 3a_2 b_2$$

Παρατηρούμε ότι
$\langle (0, 1), (1, 1) \rangle = 1, \|(0, 1)\| = \sqrt{3}, \|(1, 1)\| = \sqrt{3}$

Ασκήσεις

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 4a_1 b_1 - 2a_1 b_2 - 2a_2 b_1 + 3a_2 b_2$

Παρατηρούμε ότι
$\langle (0,1), (1,1) \rangle = 1, \|(0,1)\| = \sqrt{3}, \|(1,1)\| = \sqrt{3}$

Θα υπολογίσουμε τις προβολές
$proj_{(1,1)}(0,1) = \frac{\langle (0,1),(1,1) \rangle}{\langle (1,1),(1,1) \rangle}(1,1) = \frac{1}{3}(1,1)$

Ασκήσεις

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \langle(a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle = 4a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 3a_2b_2$$

Παρατηρούμε ότι
$\langle(0,1),(1,1)\rangle = 1, \|(0,1)\| = \sqrt{3}, \|(1,1)\| = \sqrt{3}$

Θα υπολογίσουμε τις προβολές
$proj_{(1,1)}(0,1) = \frac{\langle(0,1),(1,1)\rangle}{\langle(1,1),(1,1)\rangle}(1,1) = \frac{1}{3}(1,1)$
$proj_{(0,1)}(1,1) = \frac{\langle(0,1),(1,1)\rangle}{\langle(0,1),(0,1)\rangle}(0,1) = \frac{1}{3}(1,1) = \frac{1}{3}(0,1)$

Ασκήσεις

Θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \langle (a_1,a_2),(b_1,b_2)\rangle = 4a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 3a_2b_2$$

Παρατηρούμε ότι
$\langle (0,1),(1,1)\rangle = 1, \|(0,1)\| = \sqrt{3}, \|(1,1)\| = \sqrt{3}$

Θα υπολογίσουμε τις προβολές
$proj_{(1,1)}(0,1) = \frac{\langle (0,1),(1,1)\rangle}{\langle (1,1),(1,1)\rangle}(1,1) = \frac{1}{3}(1,1)$
$proj_{(0,1)}(1,1) = \frac{\langle (0,1),(1,1)\rangle}{\langle (0,1),(0,1)\rangle}(0,1) = \frac{1}{3}(1,1) = \frac{1}{3}(0,1)$

Και θα βρούμε μια ορθογώνια βάση
$\{(0,1),(1,1) - proj_{(0,1)}(1,1)\}$

Ασκήσεις

Δίνεται εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ τέτοιο ώστε
$< 1, 1 > = 1, \quad < x, 1 > = < 1, x > = 0, \quad < x^2, 1 > = < 1, x^2 > = 1,$
$< x, x > = 2, \quad < x^2, x > = < x, x^2 > = 2, \quad < x^2, x^2 > = 1.$

Ασκήσεις

Δίνεται εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ τέτοιο ώστε $< 1, 1 > = 1, \quad < x, 1 >=< 1, x >= 0, \quad < x^2, 1 >=< 1, x^2 > = 1,$
$< x, x > = 2, \quad < x^2, x >=< x, x^2 > = 2, \quad < x^2, x^2 > = 1.$
Να ορίσετε το $< a_0 + a_1x + a_2x^2,\ b_0 + b_1x + b_2x^2 >$, για $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq 2$.

Ασκήσεις

Δίνεται εσωτερικό γινόμενο στο χώρο $\mathbb{R}_2[x]$ τέτοιο ώστε
$< 1, 1 > = 1, \quad < x, 1 >=< 1, x >= 0, \quad < x^2, 1 >=< 1, x^2 > = 1,$
$< x, x > = 2, \quad < x^2, x >=< x, x^2 > = 2, \quad < x^2, x^2 > = 1.$
Να ορίσετε το $< a_0 + a_1x + a_2x^2,\ b_0 + b_1x + b_2x^2 >$, για $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq 2$.
Αφού έχουμε εσωτερικό γινόμενο συμπεραίνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&< a_0 + a_1x + a_2x^2,\ b_0 + b_1x + b_2x^2 >= \\
&a_0b_0 < 1, 1 > + a_0b_1 < 1, x > + a_0b_2 < 1, x^2 > \\
&+ a_1b_0 < x, 1 > + a_1b_1 < x, x > + a_1b_2 < x, x^2 > \\
&+ a_2b_0 < x^2, 1 > + a_2b_1 < x^2, x > + a_2b_2 < x^2, x^2 >= \\
&a_0b_0 + a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_1b_2 + a_2b_0 + 2a_2b_1 + a_2b_2
\end{aligned}
$$

Να βρεθεί ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ που να έχει το 1.

Να βρεθεί ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ που να έχει το 1.
Παρατηρούμε ότι $\{1, x\}$ γραμμικά ανεξάρτητα, ορθογώνια και $x^2 \notin S(\{1, x\}) = V$. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο $Gram - Schmidt$.

Να βρεθεί ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ που να έχει το 1.
Παρατηρούμε ότι $\{1, x\}$ γραμμικά ανεξάρτητα, ορθογώνια και $x^2 \notin S(\{1, x\}) = V$. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο $Gram - Schmidt$.
Έχουμε

$$proj_V x^2 = proj_1 x^2 + proj_x x^2 = 1 + x$$

και άρα μια ορθογώνια βάση είναι $\{1, x, x^2 - 1 + x\}$.

Να βρεθεί ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ που να έχει το 1.
Παρατηρούμε ότι $\{1, x\}$ γραμμικά ανεξάρτητα, ορθογώνια και $x^2 \notin S(\{1, x\}) = V$. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο $Gram - Schmidt$.
Έχουμε

$$proj_V x^2 = proj_1 x^2 + proj_x x^2 = 1 + x$$

και άρα μια ορθογώνια βάση είναι $\{1, x, x^2 - 1 + x\}$. Μια ορθοκανονική βάση είναι $\{\frac{1}{\|1\|}, \frac{x}{\|x\|}, \frac{x^2-1+x}{\|x^2-1+x\|}\}$.

$\{v_1 = (1,1), v_2 = (1,-1)\}$ βάση του $\mathbb{R}^2$. Δίνεται εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τις σχέσεις

$$< v_1, v_1 > = < v_2, v_2 > = 1, \qquad < v_1, v_2 > = 0.$$

Να ορίσετε το $< (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) >$, για $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$.

Παρατηρούμε ότι αφού $< v_1, v_2 > = 0$ έχουμε ότι $v = \frac{<v,v>}{<v,v_1>} v_1 + \frac{<v,v>}{<v,v_2>} v_2$.
Έχουμε ότι $e_1 = (1,0) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$, $e_2 = (0,1) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$, άρα

$$< e_1, e_1 > =< \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2, \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 >= \frac{1}{2}$$
$$< e_1, e_2 > =< \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2, \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 >= 0$$
$$< e_2, e_2 > =< \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2, \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 >= \frac{1}{2}$$

και συνεπώς $< (x_1, y_1), \ (x_2, y_2) >= \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}y_1y_2$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης