# ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Χαραλάμπους Χαρά

### Άδειες Χρήσης



### Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

## Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν ορθογώνιο συμπλήρωμα χώρου γραμμών= μηδενοχώρος του συζυγή αναστρόφου, μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, γενικευμένο εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πχ έστω $V = \mathbb{R}^n$, και $f : V \to V$ γραμμική συνάρτηση. Τότε $f$ λέγεται ισομετρία αν $\forall v \in V, \|f(v)\| = \|v\|$.

Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πχ έστω $V = \mathbb{R}^n$, και $f : V \to V$ γραμμική συνάρτηση. Τότε $f$ λέγεται ισομετρία αν $\forall v \in V, \|f(v)\| = \|v\|$.

Παράδειγμα 1: $id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, id_{\mathbb{R}^2}(v) = v$ ισομετρία με πίνακα $A_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2: Αντικατοπρισμός $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως προς τον άξονα των $x$, είναι ισομετρία ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Χαραλάμπους Χαρά

Έστω $V$ ένας $\mathbb{R}$ διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο πχ έστω $V = \mathbb{R}^n$, και $f : V \to V$ γραμμική συνάρτηση. Τότε $f$ λέγεται ισομετρία αν $\forall v \in V, \|f(v)\| = \|v\|$.

Παράδειγμα 1: $id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, id_{\mathbb{R}^2}(v) = v$ ισομετρία με πίνακα $A_{id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2: Αντικατοπρισμός $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως προς τον άξονα των $x$, είναι ισομετρία ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Έχει πίνακα ως προς την κανονική βάση $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, άρα $f(a, b) = (a, -b)$ και $\|f(a, b)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|(a, b)\|$

Παράδειγμα 3: Αντικατοπρισμός $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ως προς ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων, είναι ισομετρία ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Παράδειγμα 4: Προβολή $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στην ευθεία $y = x$ δεν είναι ισομετρία ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.
Πράγματι, $e_2 = (0,1) \Rightarrow \|e_2\| = 1$ και
$f(e_2) = proj_{(1,1)}e_2 = \frac{1}{2}(1,1) \Rightarrow \|f(e_2)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Παράδειγμα 4: Προβολή $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στην ευθεία $y = x$ δεν είναι ισομετρία ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.
Πράγματι, $e_2 = (0, 1) \Rightarrow \|e_2\| = 1$ και
$f(e_2) = proj_{(1,1)} e_2 = \frac{1}{2}(1, 1) \Rightarrow \|f(e_2)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Εναλλακτικά, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f(-1, 1) = 0$.

Γενικότερα, αν $Ker(f) \neq O$ τότε η $f$ δεν είναι ισομετρία.
Δηλαδή, αν η $f$ είναι ισομετρία τότε $Ker(f) = O$

Γενικότερα, αν $Ker(f) \neq O$ τότε η $f$ δεν είναι ισομετρία.
Δηλαδή, αν η $f$ είναι ισομετρία τότε $Ker(f) = O$

Πράγματι, αν η $f$ είναι ισομετρία και έστω
$v \in Kerf(f) \Leftrightarrow f(v) = 0$ τότε αφού η $f$ είναι ισομετρία έχουε
$\|f(v)\| = \|v\| = 0 \Rightarrow v = O$

# Ερωτήματα



1. Τι ιδιότητες έχει ο πίνακας μιας ισομετρίας $f$;
2. Τι ισχύει για τις ιδοτιμές μιας ισομετρίας $f$;
3. Πως συνδέονται τα εσωτερικά γινόμενα $< f(v_1), f(v_2) >, < v_1, v_2 >$

# Θεώρημα



$f$ ισομετρία $\Leftrightarrow \ \forall v_1, v_2 \in V, < f(v_1), f(v_2) >=< v_1, v_2 >$

# Θεώρημα



$f$ ισομετρία $\Leftrightarrow\ \forall v_1, v_2 \in V, < f(v_1), f(v_2) >=< v_1, v_2 >$

Απόδειξη. $f$ ισομετρία $\Rightarrow \|f(v)\| = \|v\|$. Για $v = v_1 + v_2$ έχουμε

$$< f(v_1) + f(v_2), f(v_1) + f(v_2) > =< v_1 + v_2, v_1 + v_2 > \Leftrightarrow$$
$$\|f(v_1)\|^2 + \|f(v_2)\|^2 + 2 < f(v_1), f(v_2) > =$$
$$\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2 < v_1, v_2 > \Leftrightarrow$$
$$< f(v_1), f(v_2) > =< v_1, v_2 >$$

Προφανώς, αν $< f(v_1), f(v_2) >=< v_1, v_2 >$ τότε για $v_1 = v_2 = v$ βρίσκουμε $\|f(v)\| = \|v\|$.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

# Τέλος Ενότητας


Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης


Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14


Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης