Χαραλάμπους Χαρά

Ενότητα 9. φασματικό θεώρημα

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 9. φασματικό θεώρημα

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Προσαρτημένους πίνακεσς, φασματικό θεώρημα, Αυτοπροσαρτημένες γραμμικές συναρτήσεις και ιδιοτιμές τους

Είδαμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αυτοπροσαρτημένος και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Είδαμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αυτοπροσαρτημένος και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.Βρίσκουμε ότι

$$A - \frac{3+\sqrt{5}}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Είδαμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αυτοπροσαρτημένος και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.Βρίσκουμε ότι $A - \frac{3+\sqrt{5}}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, άρα ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι $V_{\lambda_1} = \{y(1-\sqrt{5}, 2) : y \in \mathbb{R}\}$.

Είδαμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αυτοπροσαρτημένος και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.Βρίσκουμε ότι $A - \frac{3+\sqrt{5}}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, άρα ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι $V_{\lambda_1} = \{y(1-\sqrt{5}, 2) : y \in \mathbb{R}\}$.
Αντίστοιχα
$A - \frac{3-\sqrt{5}}{2} I = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Είδαμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι αυτοπροσαρτημένος και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.Βρίσκουμε ότι $A - \frac{3+\sqrt{5}}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, άρα ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι $V_{\lambda_1} = \{y(1-\sqrt{5}, 2) : y \in \mathbb{R}\}$.
Αντίστοιχα $A - \frac{3-\sqrt{5}}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, άρα ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι $V_{\lambda_2} = \{y(1+\sqrt{5}, 2) : y \in \mathbb{R}\}$.

Θέτουμε $v_1 = (1-\sqrt{5}, 2), v_2 = (1+\sqrt{5}, 2)$.

Αν $S = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Θέτουμε $v_1 = (1-\sqrt{5}, 2), v_2 = (1+\sqrt{5}, 2)$.
Αν $S = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ τότε γνωρίζουμε ότι

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $v_1 = (1-\sqrt{5}, 2)$, $v_2 = (1+\sqrt{5}, 2)$.
Αν $S = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ τότε γνωρίζουμε ότι

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $< v_1, v_2 >= 0$, δηλαδή τα ιδιοδιανύσματα όχι απλώς είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά είναι και ορθογώνια, δηλαδή $\{v_1, v_2\}$ είναι μια ορθογώνια βάση. Οπότε μια ορθοκανονική βάση είναι η $\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\}$.

Ο πίνακας που αντιστοιχεί σε αυτή τη βάση είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1-\sqrt(5)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{2} & \frac{\frac{1+\sqrt(5)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$ οπότε έχουμε ξανά

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας που αντιστοιχεί σε αυτή τη βάση είναι ο $P = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1-\sqrt(5)}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{2} & \frac{\frac{1+\sqrt(5)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$ οπότε έχουμε ξανά

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αφού οι στήλες του P αποτελούν ορθοκανονική βάση, προκύπτει ότι $P^{-1} = P^T$, οπότε

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Έστω $A^* = A$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ πραγματικές ιδιοτιμές του με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2. Τότε θα δείξουμε ότι $< v_1, v_2 >= 0$.

Έστω $A^* = A$ και $\lambda_1 \neq \lambda_2$ πραγματικές ιδιοτιμές του με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2. Τότε θα δείξουμε ότι $< v_1, v_2 >= 0$.
Έχουμε $Av_1 = \lambda_1 v_1$ και $Av_2 = \lambda_1 v_2$ και άρα

$$< Av_1, v_2 > =< v_1, A^* v_2 >=< v_1, Av_2 >\Rightarrow$$
$$\lambda_1 < v_1, v_2 > = \overline{\lambda_2} < v_1, v_2 >= \lambda_2 < v_1, v_2 >\Rightarrow$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2) < v_1, v_2 > = 0 \Rightarrow< v_1, v_2 >= 0,$$

αφού $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$.

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^*$

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^*$

Βρίσκουμε $P_A(x) = det(A - xI) = -(x-4)^2(x-2)$

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A^*$

Βρίσκουμε $P_A(x) = det(A - xI) = -(x-4)^2(x-2)$

άρα ο πίνακας έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 4$ αλγεβρικής πολλαπλότητας 2 και $\lambda_2 = 2$ αλγεβρικής πολλαπλότητας 1.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης