ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Προσαρτημένους πίνακες, φασματικό θεώρημα, Αυτοπροσαρτημένες γραμμικές συναρτήσεις και ιδιοτιμές τους

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Ισχύει $A = A^T$ και έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Να βρεθεί ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσατα.

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Ισχύει $A = A^T$ και έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Να βρεθεί ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσατα.

Βρίσκουμε

$P_A(x) = det(A - xI) = x^2 - 2x + 24 = (x-6)(x+4)$.

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 6$ και ιδιοχώροι

$V_{-4} = \{t(-1,1) : t \in \mathbb{R}\}$.

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Ισχύει $A = A^T$ και έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Να βρεθεί ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσατα.

Βρίσκουμε

$P_A(x) = det(A - xI) = x^2 - 2x + 24 = (x - 6)(x + 4)$.

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 6$ και ιδιοχώροι

$V_{-4} = \{t(-1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$.

Γνωρίζουμε ότι $dimV_{-4} = 1$ και $dimV_{-4} + dimV_6 = 2$ άρα $dimV_6 = 1$ και γνωρίζουμε ότι $V_{-4} \perp V_6$

Συνεπώς $V_6 = S(\{(1, 1)\})$

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Ισχύει $A = A^T$ και έχει πραγματικές ιδιοτιμές. Να βρεθεί ορθογώνια βάση από ιδιοδιανύσατα.

Βρίσκουμε
$P_A(x) = det(A - xI) = x^2 - 2x + 24 = (x-6)(x+4)$.
Ιδιοτιμές $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 6$ και ιδιοχώροι
$V_{-4} = \{t(-1,1) : t \in \mathbb{R}\}$.
Γνωρίζουμε ότι $dimV_{-4} = 1$ και $dimV_{-4} + dimV_6 = 2$ άρα $dimV_6 = 1$ και γνωρίζουμε ότι $V_{-4} \perp V_6$
Συνεπώς $V_6 = S(\{(1,1)\})$

Να βρεθεί πίνακας P έτσι ώστε $P^T A P = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ Πότε είναι $P^{-1} = P^T$; Αν οι στήλες του πίνακα είναι ορθογώνια ιδιοδιανύσματα μήκους 1 τότε $P^{-1} = P^*$. Θεωρούμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Τότε ισχύει ότι $P^{-1} = P^* = \overline{P^T} = P^T$

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $B^T = B \neq B^*$.

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $B^T = B \neq B^*$.

Το φασματικό θεώρημα λέει ότι αν $B^T = B^*$ τότε ο B διαγονοποιείται ορθογώνια και έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Βρίσκουμε $P_B(x) = det(B - xI) = x^2 + 1$. Ιδιοτιμές ± 1 και ιδιοχώροι $V_i = S(\{(1,1)\}), V_{-i} = S(\{(1,-1)\})$

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $B^T = B \neq B^*$.

Το φασματικό θεώρημα λέει ότι αν $B^T = B^*$ τότε ο B διαγονοποιείται ορθογώνια και έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Βρίσκουμε $P_B(x) = det(B - xI) = x^2 + 1$. Ιδιοτιμές ± 1 και ιδιοχώροι $V_i = S(\{(1,1)\}), V_{-i} = S(\{(1,-1)\})$

Θεωρούμε τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, τότε έχουμε

$P^{-1} = P^* = P^T$ και άρα υπάρχει ορθομοναδιαίος P που να διαγωνοποιεί ορθογώνια τον B.

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $B^T = B \neq B^*$.

Το φασματικό θεώρημα λέει ότι αν $B^T = B^*$ τότε ο B διαγονοποιείται ορθογώνια και έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Βρίσκουμε $P_B(x) = det(B - xI) = x^2 + 1$. Ιδιοτιμές ± 1 και ιδιοχώροι $V_i = S(\{(1,1)\}), V_{-i} = S(\{(1,-1)\})$

Θεωρούμε τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, τότε έχουμε

$P^{-1} = P^* = P^T$ και άρα υπάρχει ορθομοναδιαίος P που να διαγωνοποιεί ορθογώνια τον B.

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Παρατηρούμε ότι $B^T = B \neq B^*$.
Το φασματικό θεώρημα λέει ότι αν $B^T = B^*$ τότε ο B διαγονοποιείται ορθογώνια και έχει πραγματικές ιδιοτιμές.
Βρίσκουμε $P_B(x) = det(B - xI) = x^2 + 1$. Ιδιοτιμές ± 1 και ιδιοχώροι $V_i = S(\{(1,1)\}), V_{-i} = S(\{(1,-1)\})$
Θεωρούμε τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, τότε έχουμε $P^{-1} = P^* = P^T$ και άρα υπάρχει ορθομοναδιαίος P που να διαγωνοποιεί ορθογώνια τον B.

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Παρατηρούμε ότι $B^T = B \neq B^*$.

Το φασματικό θεώρημα λέει ότι αν $B^T = B^*$ τότε ο B διαγονοποιείται ορθογώνια και έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

Βρίσκουμε $P_B(x) = det(B - xI) = x^2 + 1$. Ιδιοτιμές ± 1 και ιδιοχώροι $V_i = S(\{(1,1)\}), V_{-i} = S(\{(1,-1)\})$

Θεωρούμε τον πίνακα $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, τότε έχουμε

$P^{-1} = P^* = P^T$ και άρα υπάρχει ορθομοναδιαίος P που να διαγωνοποιεί ορθογώνια τον B.

Άσκηση

Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. Ισχύει $A = A^*$

Βρίσκουμε $P_A(x) = det(A - xI) = (1-x)(x-2)(x-7)$.

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 7$ και ιδιοχώροι

$V_1(A) = S(\{(1,0,0)\})$.

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης
Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης