ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ

Χαραλάμπους Χαρά

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σύνοψη

1 Ενότητα 11. Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος
- Ασκήσεις

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε: Κανονικοί πίνακες, παραδείγματα, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος, Αν $< v, f(w) >=< v, g(w) >$ για κάθε v, w τότε $f = g$, αντίστροφο φασματικού θεωρήματος.

Ασκήσεις

1. Αν $a \in V$ (Ερμητιανός) είναι τέτοιο ώστε $< a, b >= 0, \forall b \in V$ τότε $a = 0$, αφού αν θέσουμε $b = a$ τότε $< a, a >= 0 \Rightarrow a = 0$

Ασκήσεις

1. Αν $a \in V$ (Ερμητιανός) είναι τέτοιο ώστε $< a, b >= 0, \forall b \in V$ τότε $a = 0$, αφού αν θέσουμε $b = a$ τότε $< a, a >= 0 \Rightarrow a = 0$

2. Όμοια, αν $v_1, v_2 \in V$ είναι τέτοια ώστε $< v_1, v >=< v_2, v >, \forall v \in V$ τότε $v_1 = v_2$, αφού $< v_1, v >=< v_2, v >\Rightarrow< v_1 - v_2, v >= 0, \forall v \in V \Rightarrow$ $v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

3. Έστω $\Phi : V \to V$ γραμμική συνάρτηση. Τότε $< a, \Phi(b) >= 0, \forall a, b \in V$ αν και μόνο αν Φ η μηδενική συνάρτηση ($\Phi(v) = 0, \forall v \in V$)

3. Έστω $\Phi : V \to V$ γραμμική συνάρτηση. Τότε $< a, \Phi(b) >= 0, \forall a, b \in V$ αν και μόνο αν Φ η μηδενική συνάρτηση ($\Phi(v) = 0, \forall v \in V$)

Απόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε ότι $Ker(\Phi) = V$. Έστω ότι $\exists b \notin Ker(\Phi) \Leftrightarrow \Phi(b) \neq 0$. Θέτουμε $a = \Phi(b)$, τότε $< \Phi(b), \Phi(b) >= 0 \Rightarrow \Phi(b) = 0$, άτοπο.
Αντιστρόφως, αν Φ η μηδενική συνάρτηση τότε προφανώς $< a, \Phi(b) >= 0, \forall a, b \in V$

4. $\Phi : V \to V, \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$ (δηλαδή Φ κανόνική γραμμική συνάρτηση) αν και μόνο αν
$< \Phi(u), \Phi(w) > = < \Phi^*(u), \Phi^*(w) >, \forall u, w \in V$

4. $\Phi : V \to V, \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$ (δηλαδή Φ κανόνική γραμμική συνάρτηση) αν και μόνο αν
$<\Phi(u), \Phi(w)> = <\Phi^*(u), \Phi^*(w)>, \forall u, w \in V$
Υπενθυμίζουμε ότι
$<\Phi(a), b> = <a, \Phi^*(b)>, <\Phi^*(a), b> = <a, \Phi(b)>$.
Άρα έχουμε $<\Phi(u), \Phi(w)> = <u, \Phi^*(\Phi(w))>, \forall u, w \in V$
και $<\Phi^*(u), \Phi^*(w)> = <u, \Phi(\Phi^*(w))>$

4. $\Phi : V \to V, \Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$ (δηλαδή Φ κανόνική γραμμική συνάρτηση) αν και μόνο αν
$< \Phi(u), \Phi(w) >=< \Phi^*(u), \Phi^*(w) >, \forall u, w \in V$
Υπενθυμίζουμε ότι
$< \Phi(a), b >=< a, \Phi^*(b) >, < \Phi^*(a), b >=< a, \Phi(b) >$.
Άρα έχουμε $< \Phi(u), \Phi(w) >=< u, \Phi^*(\Phi(w)) >, \forall u, w \in V$
και $< \Phi^*(u), \Phi^*(w) >=< u, \Phi(\Phi^*(w)) >$
Έστω λοιπόν ότι

$$< \Phi(u), \Phi(w) >=< \Phi^*(u), \Phi^*(w) > \Leftrightarrow$$
$$< u, \Phi^*(\Phi(w)) >=< u, \Phi(\Phi^*(w)) > \Leftrightarrow$$
$$< u, (\Phi^* \circ \Phi - \Phi \circ \Phi^*)(w) >= 0, \forall u, w \in V \Leftrightarrow$$

$\Phi^* \circ \Phi - \Phi \circ \Phi^*$ είναι η μηδενική συνάρτηση,
άρα $\Phi^* \circ \Phi = \Phi \circ \Phi^*$

5. Έστω $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, να λυθεί το σύστημα $AX = 0$ και να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $Null(A)$

5. Έστω $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, να λυθεί το σύστημα $AX = 0$ και να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $Null(A)$

$$A \xrightarrow[\Gamma_1'=\frac{\Gamma_1}{2},\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{3}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Έστω $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, να λυθεί το σύστημα $AX = 0$ και να βρεθεί μια βάση του μηδενοχώρου $Null(A)$

$$A \xrightarrow[\Gamma_1'=\frac{\Gamma_1}{2},\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{3}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε $rank(A) = 2, dim(Null(A)) = 1, det(A) = 0, \lambda = 0$ ιδιοτιμή του A.

Έχουμε $rank(A) = 2, dim(Null(A)) = 1, det(A) = 0, \lambda = 0$ ίδιοτιμή του A.

Βρίσκουμε τελικά ότι $null(A) = \{(0, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = S(\{(0, -2, 1)\})$ και ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ έχει για ιδιοδιάνυσμα το $(0, -2, 1)$

Έχουμε $rank(A) = 2, dim(Null(A)) = 1, det(A) = 0, \lambda = 0$ ίδιοτιμή του A.
Βρίσκουμε τελικά ότι $null(A) = \{(0, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = S(\{(0, -2, 1)\})$ και ο ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = 0$ έχει για ιδιοδιάνυσμα το $(0, -2, 1)$

Να βρεθούν συνθήκες ώστε το σύστημα $AX = C$ να έχει ακριβώς μία λύση, να έχει άπειρες λύσεις ή να μην έχει καθόλου λύσεις.

Να βρεθούν συνθήκες ώστε το σύστημα $AX = C$ να έχει ακριβώς μία λύση, να έχει άπειρες λύσεις ή να μην έχει καθόλου λύσεις.

$$[A|C] \xrightarrow[\Gamma_3'=\frac{\Gamma_3}{3}]{\Gamma_2'=\Gamma_2-\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & c_1 \\ 0 & -1 & -2 & c_2 - c_1 \\ 1 & 1 & 2 & \frac{c_3}{3} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & c_1 \\ 0 & -1 & -2 & c_2 - c_1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{c_3}{3} + c_2 - c_1 \end{array}\right)$$

Ακριβώς μια λύση:
Αν $AX = C$ είναι συμβατό τότε $2 = rank(A) = rank([A|C])$ και θα υπάρξει παράμετρος άρα ποτέ δε θα έχουμε ακριβώς μόνο μία λύση.
Το σύστημα δε θα είναι συμβατό αν $rank(A) \neq rank([A|C])$

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Dr. Φωτιάδης Ανέστης

Θεσσαλονίκη, Εαρινό Εξάμηνο 2013-14

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης