ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 5: Τεχνικές απόδειξης & Κλειστότητα

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής I

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

Έστω ένα σύνολο Α φυσικών αριθμών, τέτοιο ώστε

1. $0 \in A$ και
2. $\forall n \in \mathbb{N}$: $0, 1, \ldots, n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

Τότε αποδεικνύεται ότι Α=$\mathbb{N}$.

Απόδειξη.

- Ας υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή ότι $A \neq \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει αριθμός n που λείπει από το A.
- Λόγω της (1) το n δε μπορεί να είναι το 0 και
- από τη (2) εφόσον $\{0, 1, \ldots, n\text{-}1\} \subseteq A$ συνάγεται ότι $n \in A$.
- Άρα το $A \neq \mathbb{N}$ οδηγεί σε ΑΤΟΠΟ και επομένως ισχύει $A = \mathbb{N}$

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής II

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής:
Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

«Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η ιδιότητα P», δηλ.

$$A = \{n : P \text{ αληθής για } n\} \tag{1}$$

1. **Βασικό βήμα**: δείχνουμε ότι $0 \in$A: η P ισχύει για $n = 0$
2. **Επαγωγική υπόθεση**: για ένα φυσικό n$\geq$0, η P ισχύει για όλους τους αριθμούς στο [0,n]
3. **Επαγωγικό βήμα**: δείχνουμε με χρήση της επαγωγικής υπόθεσης ότι η P ισχύει και για τον n+1.

Τότε, σύμφωνα με την αρχή της επαγωγής, το A ισούται με το $\mathbb{N}$ και άρα η ιδιότητα P ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό.

Αρχή του «περιστερώνα»

Αρχή του «περιστερώνα»

Αν τα A και B είναι πεπερασμένα σύνολα και $|A| > |B|$, τότε δεν υπάρχει μία *ένα-προς -ένα* συνάρτηση από το A στο B.

Απόδειξη.

- Βασικό βήμα: Αν $|\mathrm{B}|=0$, τότε δε μπορεί να οριστεί f:A$\mapsto$B.
- Επαγ.Υποθ: Αν για κάποιο $n \geq 0$, $|\mathrm{B}| \leq$n και $|\mathrm{A}| > |\mathrm{B}|$, τότε όλες οι f:A$\mapsto$ B δεν είναι ένα-προς -ένα.
- Επαγωγικό βήμα: Έστω f:A$\mapsto$B, όπου $|\mathrm{A}| > |\mathrm{B}|=n+1$.
  - Αν για ένα $\alpha \in A$ υπάρχει $\alpha' \in$A με $f(\alpha)=f(\alpha')$, τότε η f δεν είναι ένα-προς -ένα.
  - Αν για ένα $\alpha \in A$ δεν υπάρχει $\alpha' \in$A ώστε $f(\alpha)=f(\alpha')$,
    - θέτουμε A′=A-$\{\alpha\}$, B′=B-$\{f(\alpha)\}$ και g:A′$\mapsto$B′, τέτοια ώστε για όλα τα $\gamma \in$A′, $f(\gamma)=g(\gamma)$
    - αφού $|\mathrm{B}'|=n$ και $|\mathrm{A}'| > |\mathrm{B}'|$, τότε ισχύει η Επαγ.Υποθ. και η f δε μπορεί να είναι ένα-προς - ένα.

Απόδειξη θεωρήματος με την αρχή του «περιστεριώνα»

Θεώρημα 1

Έστω R μία δυαδική σχέση ορισμένη σε ένα πεπερασμένο σύνολο A, και έστω α, $\beta \in A$. Αν τα α και β συνδέονται στην R με ένα ή περισσότερα μονοπάτια, τότε θα υπάρχει μονοπάτι με μήκος το πολύ $|A|$.

Απόδειξη.

- Έστω $\mu_1=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ το ελάχιστο μονοπάτι από το $\alpha_1=\alpha$ στο $\alpha_n=\beta$, όπου $n > |A|$.
- Από την αρχή του «περιστεριώνα», υπάρχει ένα στοιχείο που επαναλαμβάνεται στο μονοπάτι, έστω $\alpha_i=\alpha_j$, για $1 \leq i \leq j \leq n$.
- Τότε το $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots,\alpha_i,\alpha_{j+1},\ldots, \alpha_n)$ είναι ένα μικρότερο μονοπάτι από το α στο β. ΑΤΟΠΟ, γιατί υποθέσαμε το μ_1 ως ελάχιστο.

Αρχή της διαγωνοποίησης

Αρχή της διαγωνοποίησης

Έστω μία δυαδική σχέση R⊆A×A και Δ το *διαγώνιο σύνολο*

$$\{\alpha:\ \alpha \in A \text{ και } (\alpha,\alpha) \notin R\}$$

Αν για κάθε $\alpha \in A$, $R_\alpha = \{\beta:\ \beta \in A \text{ και } (\alpha,\ \beta) \in R\}$, τότε το Δ είναι διαφορετικό από όλα τα R_α.

τα στοιχεία του A

	a	b	c	d
a		x		x
b		x	x	
c			x	
d		x	x	

- Η διαγώνιος:

	x	x	

- Το συμπλήρωμα της διαγωνίου Δ={a,d}

x			x

- Όντως το Δ διαφέρει από κάθε γραμμή του πίνακα

Απόδειξη θεωρήματος με την αρχή της διαγωνιοποίησης

Θεώρημα 2

Το σύνολο $2^{\mathbb{N}}$ είναι μη μετρήσιμο.

Απόδειξη.

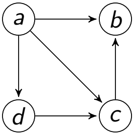
- Έστω ότι το $2^{\mathbb{N}}$ είναι μετρήσιμα άπειρο, δηλαδή $2^{\mathbb{N}}=\{R_0, R_1, ...\}$.
  Αυτά είναι τα σύνολα R_α που αναφέρονται στην αρχή της διαγωνιοποίησης, αφού $R=\{(i,j): j \in R_i\}$.
- Έστω $\Delta=\{n \in \mathbb{N}: n \notin R_n\}$, που είναι ένα σύνολο φυσικών και θα έπρεπε να εμφανίζεται κάπου στην απαρίθμηση $\{R_0, R_1, ...\}$.
- Αν $\Delta=R_k$ τότε,
  - αν $k \in R_k$ για $k \in \mathbb{N}$ συνάγεται ότι $k \notin \Delta$. Αυτό είναι ΑΤΟΠΟ γιατί $\Delta=R_k$.
  - αν $k \notin R_k$ τότε συνάγεται ότι $k \in \Delta$, που είναι ΑΤΟΠΟ επειδή $\Delta=R_k$.

Ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα

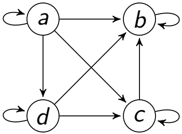
Ορισμός 3 (Ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα)

Έστω $R \subseteq A^2$ ο κατευθυνόμενος γράφος ορισμένος σε ένα σύνολο A. Η *ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα* του R είναι η σχέση

$$R^* = \{(a,b) : a, b \in A \text{ και υπάρχει μονοπάτι στο } R \text{ απ' το } a \text{ στο } b\}$$



Σχήμα : R



Σχήμα : R^*

- Το R^* είναι η *μικρότερη δυνατή* σχέση που
    - περιέχει την R και
    - είναι ανακλαστική και μεταβατική

Αλγόριθμος υπολογισμού κλειστότητας

$R^* := \emptyset$

for i=1 ...,n do

$\forall(\beta_1, \ldots, \beta_i) \in A^i$ do

if $(\beta_1, \ldots, \beta_i)$ *είναι ένα μονοπάτι στην* R

then *πρόσθεσε* (β_1, β_i) *στην* R^*

Ιδιότητα κλειστότητας

Ορισμός 4 (Ιδιότητα κλειστότητας)

Έστω D ένα σύνολο, $n \geq 0$ και $R \subseteq D^{n+1}$ μία $(n+1)$-αδική σχέση στο D.
Ένα υποσύνολο B του D ονομάζεται *κλειστό ως προς την* R, αν όταν $b_1, \ldots, b_n \in B$ και $b_{n+1} \in B$, τότε $(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}) \in R$.
Κάθε ιδιότητα του τύπου «το σύνολο B είναι κλειστό ως προς τις σχέσεις $R_1, R_2, \ldots, R_m$» ονομάζεται *ιδιότητα κλειστότητας* του B.

- Παράδειγμα 1: Το σύνολο των προγόνων ενός ανθρώπου είναι κλειστό ως προς τη σχέση

  {(α,β): α και β είναι άνθρωποι και β είναι ο πατέρας του α}
- Παράδειγμα 2: Οι φυσικοί αριθμοί είναι σύνολο κλειστό ως προς την πρόσθεση, καθώς για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχύει $m + n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη θεωρήματος

Θεώρημα 5

Έστω P μία ιδιότητα κλειστότητας ορισμένη από σχέσεις ενός συνόλου D και έστω $A \subseteq D$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό ελάχιστο σύνολο B το οποίο περιέχει το A και έχει την ιδιότητα P.

Απόδειξη.

- Έστω S το σύνολο των υποσυνόλων του D που είναι κλειστά ως προς τις $R_1, \ldots, R_m$ και το $A \subseteq S$.
  - Το S είναι μη κενό και κλειστό ως προς κάθε R_i.
- Πρέπει ν.δ.ό το S έχει ένα μοναδικό ελάχιστο στοιχείο B
  - Έστω ότι το $B = \bigcap S$ είναι καλά ορισμένο και περιέχει το A. Θα δείξουμε ότι είναι κλειστό ως προς τις R_i.
  - Έστω ότι $(a_1, \ldots, a_{n_i-1}) \in B$ και $(a_1, \ldots, a_{n_i-1}, a_{n_i}) \in R_i$

Απόδειξη θεωρήματος (συνέχεια)

- Αφού $B = \bigcap S$, τα σύνολα στο S περιέχουν τις $a_1, \ldots, a_{n_{i-1}}$. Επειδή είναι κλειστά ως προς την R_i, περιέχουν και τα a_{n_i}.
  - Το B περιέχει τα a_{n_i}, άρα είναι κλειστό ως προς R_i.
  - Το B είναι ελάχιστο: δεν υπάρχει υποσύνολο B' που να περιέχει το A και να είναι κλεισό ως προς τις R_i. Αν υπήρχε τέτοιο B', τότε θα ήταν και αυτό στοιχείο του S και επομένως θα περιείχε το B.

Ονομάζουμε το B κλειστότητα του A ως προς τις σχέσεις $R_1, \ldots, R_m$.

- Παράδειγμα: Το σύνολο όλων των προγόνων σας (ο κάθε ένας υποθέτουμε ότι είναι πρόγονος του εαυτού του) είναι η κλειστότητα του μονομελούς συνόλου το οποίο περιέχει μόνο τον εαυτό σας ως προς τη σχέση

  {(α,β): α και β είναι άνθρωποι και β είναι ο πατέρας του α}

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014