



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ  
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΑ



# Θεωρία Υπολογισμού

Ενότητα 23: Μηχανές Turing Τυχαίας Προσπέλασης

Επ. Καθ. Π. Κατσαρός  
Τμήμα Πληροφορικής



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
Πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδεια χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

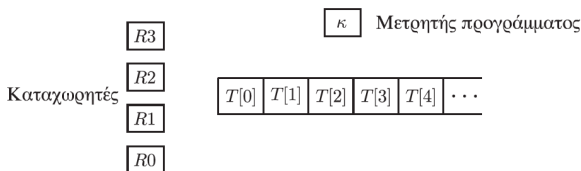
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



- 1 ΜΤ Τυχαίας Προσπέλασης
  - Αρχιτεκτονική ΜΤ Τυχαίας Προσπέλασης
  - Σημασία εντολών
  - Λειτουργία
  - Ορισμός
  - Παράδειγμα
  - Απόφαση - ημιαπόφαση
  - Υπολογισμός

# Αρχιτεκτονική

- Βασική διαφορά MT και H/Υ: σειριακή προσπέλαση, δηλ. για να προσπελαστεί μία θέση της ταινίας, προσπελούνται μία-μία όλες οι θέσεις από την τρέχουσα στην επιθυμητή.
- MT με ικανότητα τυχαίας προσπέλασης: προσπέλαση οποιουδήποτε τετραγώνου της ταινίας σε ένα μόνο βήμα



- Χρησιμοποιούμε καταχωρητές, που αποθηκεύουν και χειρίζονται τις διευθύνσεις των τετραγώνων της ταινίας.
- Η MT ενεργεί στην ταινία και τους καταχωρητές με μία ακολουθία εντολών - πρόγραμμα (αντίστοιχο της συνάρτησης μετάβασης)

# Σημασία εντολών MT Τυχαίας Προσπέλασης

Εντολή	Τελεστής	Σημασία
read	$j$	$R_0 := T[R_j]$
write	$j$	$T[R_j] := R_0$
store	$j$	$R_j := R_0$
load	$j$	$R_0 := R_j$
load	$=c$	$R_0 := c$
add	$j$	$R_0 := R_0 + R_j$
add	$=c$	$R_0 := R_0 + c$
sub	$j$	$R_0 := \max\{R_0 - R_j, 0\}$
sub	$=c$	$R_0 := \max\{R_0 - c, 0\}$
half		$R_0 := \lfloor \frac{R_0}{2} \rfloor$
jump	$s$	$\kappa := s$
jpos	$s$	if $R_0 > 0$ then $\kappa := s$
jzero	$s$	if $R_0 = 0$ then $\kappa := s$
halt		$\kappa := 0$

Το  $j$  είναι αρ. καταχωρητή, το  $T[i]$  η τιμή στη θέση  $i$  της ταινίας, το  $R_j$  η τιμή του καταχωρητή  $j$ , το  $s \leq p$  αρ. εντολής του προγράμματος και το  $c$  φυσικός αριθμός. Όλες οι εντολές μεταβάλλουν το  $\kappa$  σε  $\kappa + 1$ .

## Λειτουργία της ΜΤ Τυχαίας Προσπέλασης

- Αρχικά οι καταχωρητές έχουν την τιμή 0 και ο μετρητής προγράμματος την τιμή 1.
- Η ταινία περιέχει κωδικοποιημένη τη συμβολοσειρά εισόδου
- Εκτελείται η πρώτη εντολή και αλλάζουν τα περιεχόμενα των καταχωρητών ή της ταινίας σύμφωνα με τη σημασία της. Η τιμή του μετρητή προγράμματος αυξάνει κατά 1.
- Ο Καταχωρητής 0 λειτουργεί ως συσσωρευτής όλων των αριθμητικών & λογικών υπολογισμών που γίνονται.
- Εκτελείται η  $k$ -οστή εντολή του προγράμματος και ούτω καθεξής, μέχρι να εκτελεστεί μία εντολή halt οπότε τερματίζεται η λειτουργία της μηχανής.

# Ορισμός MT Τυχαίας Προσπέλασης (1/2)

## Ορισμός 1 (Μηχανή Turing Τυχαίας Προσπέλασης)

Είναι ένα ζεύγος  $M = (k, \Pi)$  με  $k > 0$  το πλήθος των καταχωρητών και  $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$  το πρόγραμμα (ακολουθία εντολών όπου κάθε  $\pi_i$  μία από τις εντολές του πίνακα) με  $\pi_p$  να είναι πάντα μία halt. Μία συνολική κατάσταση μιας MT Τυχαίας Προσπέλασης  $(k, \Pi)$  είναι μία  $k + 2$ -άδα  $(\kappa, R_0, \dots, R_{k-1}, T)$ , όπου:

$\kappa \in \mathbb{N}$ , ο μετρητής προγράμματος (ακέραιος μεταξύ του 0 και του  $p$ ). Η συνολική κατάσταση είναι τερματισμένη αν το  $\kappa$  είναι 0.

Για  $j, 0 \leq j < k, R_j \in \mathbb{N}$  είναι η τρέχουσα τιμή του Καταχωρητή  $j$ .

Το  $T$ , τα περιεχόμενα της ταινίας, είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του  $(\mathbb{N} - \{0\}) \times (\mathbb{N} - \{0\})$  τέτοιο ώστε για κάθε  $i \geq 1$  να υπάρχει το πολύ ένα ζεύγος της μορφής  $(i, m) \in T$

- Τα τετράγωνα της  $T$  που δεν εμφανίζονται ως πρώτα στοιχεία ενός ζεύγους υποθέτουμε ότι περιέχουν 0.



## Ορισμός MT Τυχαίας Προσπέλασης (2/2)

Ορισμός 2 (Σχέσεις  $\vdash$  και  $\vdash_M^*$  MT Τυχαίας Προσπέλασης)

Έστω  $M = (k, \Pi)$  μία MT Τυχαίας Προσπέλασης. Λέμε ότι η συνολική κατάσταση  $C = (k, R_0, \dots, R_{k-1}, T)$  της  $M$  **παράγει σε ένα βήμα** τη συνολική κατάσταση  $C' = (k', R'_0, \dots, R'_{k-1}, T')$ , αν οι τιμές του  $k'$ , των  $R'_j$  και του  $T'$  αντικατοπτρίζουν σωστά την εφαρμογή της σημασίας της τρέχουσας εντολής  $\pi_k$  στα  $k, R_j$  και  $T$ .

Η σχέση παράγει,  $\vdash_M^*$  είναι η ανακλαστική μεταβατική κλειστότητα της  $\vdash$ .

## Παράδειγμα: πρόγραμμα πολλαπλασιασμού (1/2)

1. store 2	8. sub 3	15. store 2
2. load 1	9. jzero 13	16. load 3
3. jzero 20	10. load 3	17. store 1
4. half	11. add 2	18. load 4
5. store 3	12. store 4	19. jump 2
6. load 1	13. load 2	20. load 4
7. sub 3	14. add 2	21. halt

Έστω  $x$  και  $y$  οι μη αρνητικοί ακέραιοι στους Καταχωρητές 0 και 1 αντίστοιχα, στην αρχή εκτέλεσης του προγράμματος. Η μηχανή τερματίζει με το γινόμενο  $x \cdot y$  αποθηκευμένο στον Καταχωρητή 0.

Παράδειγμα υπολογισμού:

$$\begin{aligned}
 &(1;5,3,0,0,0;\emptyset) \vdash (2;5,3,5,0,0;\emptyset) \vdash (3;3,3,5,0,0;\emptyset) \vdash (4;3,3,5,0,0;\emptyset) \\
 &(5;1,3,5,0,0;\emptyset) \vdash (6;1,3,5,1,0;\emptyset) \vdash (7;3,3,5,1,0;\emptyset) \vdash (8;2,3,5,1,0;\emptyset) \\
 &(9;1,3,5,1,0;\emptyset) \vdash (10;1,3,5,1,0;\emptyset) \vdash (11;0,3,5,1,0;\emptyset) \vdash \\
 &(12;5,3,5,1,0;\emptyset) \vdash (13;5,3,5,1,5;\emptyset) \vdash (14;5,3,5,1,5;\emptyset) \vdash \\
 &(15;10,3,5,1,5;\emptyset) \vdash (16;10,3,10,1,5;\emptyset) \vdash (17;1,3,10,1,5;\emptyset) \vdash \\
 &(18;1,1,10,1,5;\emptyset) \vdash (2;1,1,10,1,5;\emptyset) \vdash^* (18;0,0,20,0,15;\emptyset) \vdash \\
 &(2;0,0,20,0,15;\emptyset) \vdash (3;0,0,20,0,15;\emptyset) \vdash (19;0,0,20,0,15;\emptyset) \vdash \\
 &(20;15,0,20,0,15;\emptyset)
 \end{aligned}$$

## Παράδειγμα: πρόγραμμα πολλαπλασιασμού (2/2)

- Το πρόγραμμα εκτελεί πολλές επαναλήψεις των εντολών  $\pi_2$  έως  $\pi_{18}$ . Στην  $k$ -οστή επανάληψη,  $k \geq 1$  ισχύουν τα εξής:
  - 1 Ο Καταχωρητής 2 περιέχει την τιμή  $x2^k$
  - 2 Ο Καταχωρητής 3 περιέχει την τιμή  $\lfloor y/2^k \rfloor$ .
  - 3 Ο Καταχωρητής 1 περιέχει την τιμή  $\lfloor y/2^{k-1} \rfloor$ .
  - 4 Ο Κατ. 4 περιέχει το ενδ. αποτέλεσμα  $x \cdot (y \bmod 2^k)$ .
- Οι εντολές  $\pi_2$  έως  $\pi_5$  επιβάλλουν το (2) υποθέτοντας ότι θσχύει το (3) στην προηγούμενη επανάληψη.
- Οι  $\pi_6$  έως  $\pi_8$  υπολογίζουν το  $k$ -οστό λιγότερο σημαντικό ψηφίο του  $y$  και αν αυτό δεν είναι 0, οι  $\pi_9$  έως  $\pi_{12}$  προσθέτουν το  $x2^{k-1}$  στον Κατ. 4 - όπως επιβάλλεται από το (1) - και, τα περιεχόμενα του Κατ. 3 μεταφέρονται στον Κατ. 1 επιβάλλοντας έτσι το (3).
- Αν ισχύει το  $\lfloor y/2^{k-1} \rfloor = 0$  η διαδικασία τερματίζει και το αποτέλεσμα μεταφέρεται από τον Κατ. 4 στο συσσωρευτή.
- Ορίζουμε ως συντομογραφία του προγράμματος την εντολή «mply 1» με σημασία  $R_0 := R_0 \cdot R_1$

# Απόφαση - ημιαπόφαση ΜΤ Τυχαίας Προσπέλασης

## Ορισμός 3 (Απόφαση - ημιαπόφαση ΜΤ Τυχαίας Προσπέλασης)

Έστω  $\mathbf{E}$  μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το  $\Sigma$  στο  $\{0, 1, \dots, |\Sigma| - 1\}$ , που κωδικοποιεί την είσοδο/έξοδο της ΜΤ ( $\mathbf{E}(\sqcup) = 0$ ). Η **αρχική συνολική κατάσταση** της  $M = (k, \Pi)$  με είσοδο  $w = \alpha_1 \dots \alpha_n \in (\Sigma - \{\sqcup\})^*$  είναι  $(\kappa, R_0, \dots, R_{k-1}, T)$ , όπου  $\kappa = 1, R_j = 0$  για κάθε  $j$  και  $T = \{(1, \mathbf{E}(\alpha_1)), \dots, (n, \mathbf{E}(\alpha_n))\}$ .

Λέμε ότι η  $M$  **δέχεται** τη  $x \in \Sigma^*$  αν η αρχική συνολική κατάσταση με είσοδο  $x$  παράγει μια τερματισμένη συνολική κατάσταση με  $R_0 = 1$ .

Λέμε ότι **απορρίπτει** τη  $x$  αν η αρχική συνολική κατάσταση με είσοδο  $x$  παράγει μια τερματισμένη συνολική κατάσταση με  $R_0 = 0$ .

Έστω  $\Sigma_0 \subseteq \Sigma - \{\sqcup\}$  ένα αλφάβητο και έστω  $L \subseteq \Sigma_0^*$  μία γλώσσα.

Λέμε ότι η  $M$  **αποφασίζει** την  $L$  αν όποτε  $x \in L$ , η  $M$  δέχεται τη  $x$ , και όποτε  $x \notin L$  η  $M$  απορρίπτει τη  $x$ . Λέμε ότι η  $M$  **ημιαποφασίζει** την  $L$  αν το εξής αληθεύει:  $x \in L$  αν και μόνο αν η  $M$  με είσοδο  $x$  παράγει κάποια τερματισμένη συνολική κατάσταση.

# Υπολογισμός ΜΤ Τυχαίας Προσπέλασης

## Ορισμός 4 (Υπολογισμός ΜΤ Τυχαίας Προσπέλασης)

Έστω  $f : \Sigma_0^* \mapsto \Sigma_0^*$  μία συνάρτηση. Λέμε ότι η  $M$  **υπολογίζει** την  $f$  αν, για κάθε  $x \in \Sigma_0^*$ , η αρχική συνολική κατάσταση της μηχανής  $M$  με είσοδο  $x$  παράγει μια τερματισμένη συνολική κατάσταση με τα εξής περιεχόμενα στην ταινία:  $T = \{(1, \mathbf{E}(\alpha_1)), \dots, (n, \mathbf{E}(\alpha_n))\}$ , όπου  $f(x) = \alpha_1 \dots \alpha_n$ .

# Παράδειγμα MT Τυχαίας Προσπέλασης

Δίνεται σε συντομογραφία μια MT Τυχαίας Προσπέλασης, που αποφασίζει τη γλώσσα  $\{\alpha^n b^n c^n : n \geq 0\}$ .

Υποθέτουμε ότι  $\mathbf{E}(a) = 1$ ,  $\mathbf{E}(b) = 2$ ,  $\mathbf{E}(c) = 3$  και χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές  $\alpha count$ ,  $bcount$  και  $ccount$ , που αντιστοιχούν στον αριθμό των  $a$ ,  $b$ ,  $c$  αντίστοιχα, που έχουν βρεθεί μέχρι στιγμής.

Επίσης, χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία `accept` αντί για `load =1`, `halt`, και `reject` αντί για `load =0`, `halt`.

```

 $\alpha count := bcount := ccount := 0, n := 1$ 
while  $T[n] = 1$  do :  $n := n + 1, \alpha count := \alpha count + 1$ 
while  $T[n] = 2$  do :  $n := n + 1, bcount := bcount + 1$ 
while  $T[n] = 3$  do :  $n := n + 1, ccount := ccount + 1$ 
if  $\alpha count = bcount = ccount$  and  $T[n] = 0$  then accept else reject

```

## MT Τυχαίας Προσπέλασης και πρότυπες MT (1/4)

## Θεώρημα 5

Οποιαδήποτε αναδρομική ή αναδρομικά απαριθμήσιμη γλώσσα και οποιαδήποτε αναδρομική συνάρτηση, μπορεί να αποφασιστεί, ημιαποφασιστεί και υπολογιστεί, αντίστοιχα, από μία MT τυχαίας προσπέλασης.

Παράδειγμα:

Έστω  $M = (K, \Sigma, \delta, s, H)$  μία πρότυπη MT. Μπορούμε να σχεδιάσουμε μια MT Τυχαίας Προσπέλασης  $M'$  η οποία προσομοιώνει την  $M$ .

Η  $M'$  έχει έναν καταχωρητή, έστω  $n$ , που παρακολουθεί τη θέση της κεφαλής της  $M$ . Αρχικά ο  $n$  δείχνει στην αρχή της εισόδου.

Κάθε κατάσταση  $q \in K$  προσομοιώνεται από μια ακολουθία εντολών στο πρόγραμμα της  $M'$ .

# MT Τυχαίας Προσπέλασης και πρότυπες MT (2/4)

Παράδειγμα (συνέχεια):

Ας υποθέσουμε ότι  $\Sigma = \{\sqcup, \alpha, b\}$ ,  $\mathbf{E}(\alpha) = 1$ ,  $\mathbf{E}(b) = 2$ , και έστω  $q$  μια κατάσταση της  $M$  τέτοια ώστε

$\delta(q, \sqcup) = (p, \rightarrow)$ ,  $\delta(q, \alpha) = (p, \leftarrow)$ ,  $\delta(q, b) = (r, \sqcup)$  και  $\delta(q, \triangleright) = (s, \rightarrow)$

Η ακολουθία των εντολών που προσομοιώνουν την κατάσταση  $q$  είναι η εξής:

$q$  :

- if*  $T[n] = 0$  *then*  $n := n + 1$ , *goto*  $p$
- if*  $T[n] = 1$  *then if*  $n > 0$  *then*  $n := n - 1$ , *goto*  $p$
- else goto*  $s$
- if*  $T[n] = 2$  *then*  $T[n] := 0$ , *goto*  $r$



## MT Τυχαίας Προσπέλασης και πρότυπες MT (3/4)

## Θεώρημα 6

*Κάθε γλώσσα που αποφασίζεται ή ημιαποφασίζεται από μια MT Τυχαίας Προσπέλασης και κάθε συνάρτηση που υπολογίζεται από μια MT Τυχαίας Προσπέλασης, μπορεί να αποφασιστεί, ημιαποφασιστεί και υπολογιστεί, αντίστοιχα, από μια πρότυπη MT.*

*Επιπλέον, αν οι μηχανές τερματίζουν με κάποια είσοδο, τότε το πλήθος των βημάτων που πραγματοποιεί η πρότυπη MT φράσσεται από ένα πολυώνυμο ως προς το πλήθος των βημάτων μιας MT Τυχαίας Προσπέλασης με την ίδια είσοδο.*

**Προσομοίωση:**

Έστω  $M = (k, \Pi)$  μία MT Τυχαίας Προσπέλασης, που αποφασίζει ή ημιαποφασίζει μία γλώσσα  $L \subseteq \Sigma^*$  ή υπολογίζει μία συνάρτηση από το  $\Sigma^*$  στο  $\Sigma^*$ .

Η  $M$  προσομοιώνεται από μία MT  $M'$  ( $k + 3$ ) ταινιών, όπου  $k$  το πλήθος των καταχωρητών της  $M$ . Με βάση προηγούμενο θεώρημα μία MT πολλών ταινιών μπορεί να προσομοιωθεί από μία πρότυπη MT.

# MT Τυχαίας Προσπέλασης και πρότυπες MT (4/4)

## Προσομοίωση (συνέχεια):

Η MT  $M'$  παρακολουθεί την τρέχουσα συνολική κατάσταση της MT Τυχαίας Προσπέλασης  $M$  και υπολογίζει κάθε φορά την επόμενη συνολική κατάσταση.

- 1 Η 1η ταινία χρησιμοποιείται μόνο για την ανάγνωση της εισόδου της  $M$  και πιθανώς για την ανακοίνωση της εξόδου στο τέλος, στην περίπτωση που η  $M$  υπολογίζει μία συνάρτηση.
- 2 Η 2η ταινία παρακολουθεί το τμήμα  $T$  της συνολικής κατάστασης. Η σχέση  $T$  δίνεται ως ακολουθία συμβολοσειρών της μορφής  $(111, 10)$ , που σημαίνει ότι το 7ο τετράγωνο της ταινίας περιέχει τον ακέραιο 2. Τα ζεύγη των ακεραίων δεν είναι τοποθετημένα σε συγκεκριμένη διάταξη και μπορεί να παρεμβάλλονται κενά (χρησιμοποιούμε το σύμβολο τέλους \$).
- 3 Κάθε μία από τις επόμενες  $k$  ταινίες της  $M'$  διατηρεί τα περιεχόμενα ενός καταχωρητή της  $M$  σε δυαδική μορφή.
- 4 Η τιμή του μετρητή προγράμματος  $\kappa$  διατηρείται στην κατάσταση της  $M'$ .

# Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Εμμανουέλα Στάχτιαρη  
Θεσσαλονίκη, 24/07/2014