ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Αριθμητική Ανάλυση

Ενότητα 6: Διαφορικές Εξισώσεις

Κ. Κόκκοτας - Ν. Στεργιούλας
Τμήμα Φυσικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

6. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

6.1 ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΝΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ

6.1.1 Μέθοδος Σειρών Taylor

Έστω, λοιπόν, μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\boxed{y' = f(x, y)} \quad \text{με} \quad y(x_0) = y_0$$

για να υπολογίσουμε την τιμή της $y(x)$ σε μια θέση $x = x_0 + h$

$$\boxed{y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \cdots}$$

όπου $y'' = f'(x, y)\,, \quad y''' = f''(x, y)\,,$ κοκ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω
$$y' = x + y$$

με αρχικές τιμές $y\left(0\right) = 1$. *Να βρεθεί η τιμή της* $y(1)$

Για την επίλυση της βρίσκω τις παραγώγους εώς και 4ης τάξης:

$$\begin{aligned}
y'\left(x_0\right) &= y'\left(0\right) = 0 + 1 = 1 \\
y'' &= 1 + y' = 1 + x + y = 1 + y' \\
y''\left(x_0\right) &= 1 + y'\left(0\right) = 2 \\
y''' &= 1 + y' \\
y'''\left(x_0\right) &= 1 + y'\left(0\right) = 2 \\
y^{(4)} &= 1 + y' \\
y^{(4)}\left(x_0\right) &= 1 + y'\left(0\right) = 2
\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\boxed{y\left(0+h\right)=1+h+h^2+\frac{h^3}{3}+\frac{h^4}{12}+\cdots}$$

Το σφάλμα είναι προφανώς αυτό που προβλέπεται από το ανάπτυγμα Taylor, δηλαδή:

$$E=\frac{y^{(5)}\left(\xi\right)}{5!}h^5 \quad \text{για} \quad 0<\xi<h$$

x	y	y(ακριβές)	Σφάλμα	Σφάλμα*
0	1	1		
0.1	1.110342	1.110342	1.7×10^{-7}	
0.2	1.24280	1.24281	5.5×10^{-6}	3.7×10^{-7}
0.3	1.39968	1.39972	4.3×10^{-5}	6.2×10^{-7}
0.4	1.383467	1.383649	1.8×10^{-4}	9.1×10^{-7}
:				
1.0	3.416667	3.436564	2×10^{-2}	4.2×10^{-6}

Πίνακας 6.1. Στον παραπάνω πίνακα, οι τιμές της δεύτερης στήλης βρίσκονται, αν χρησιμοποιήσουμε βήμα $h = 0.1$ την πρώτη φορά, $h = 0.2$ τη δεύτερη φορά, κοκ. Παρατηρούμε επομένως ότι το σφάλμα αυξάνεται, καθώς αυξάνεται το h (4η στήλη). Αντίθετα, αν χρησιμοποιήσουμε σε κάθε βήμα τις τιμές που έχουμε υπολογίσει στο προηγούμενο βήμα, τότε η ακρίβεια παραμένει αρκετά καλή (5η στήλη).

6.1.2 Μέθοδοι Euler & Euler - Heun

Η **μέθοδος Euler** αποτελεί ουσιαστικά περιορισμένη εφαρμογή της μεθόδου Taylor. Διατηρούμε όρους μόνο μέχρι 1ης τάξης ως προς h. Είναι:

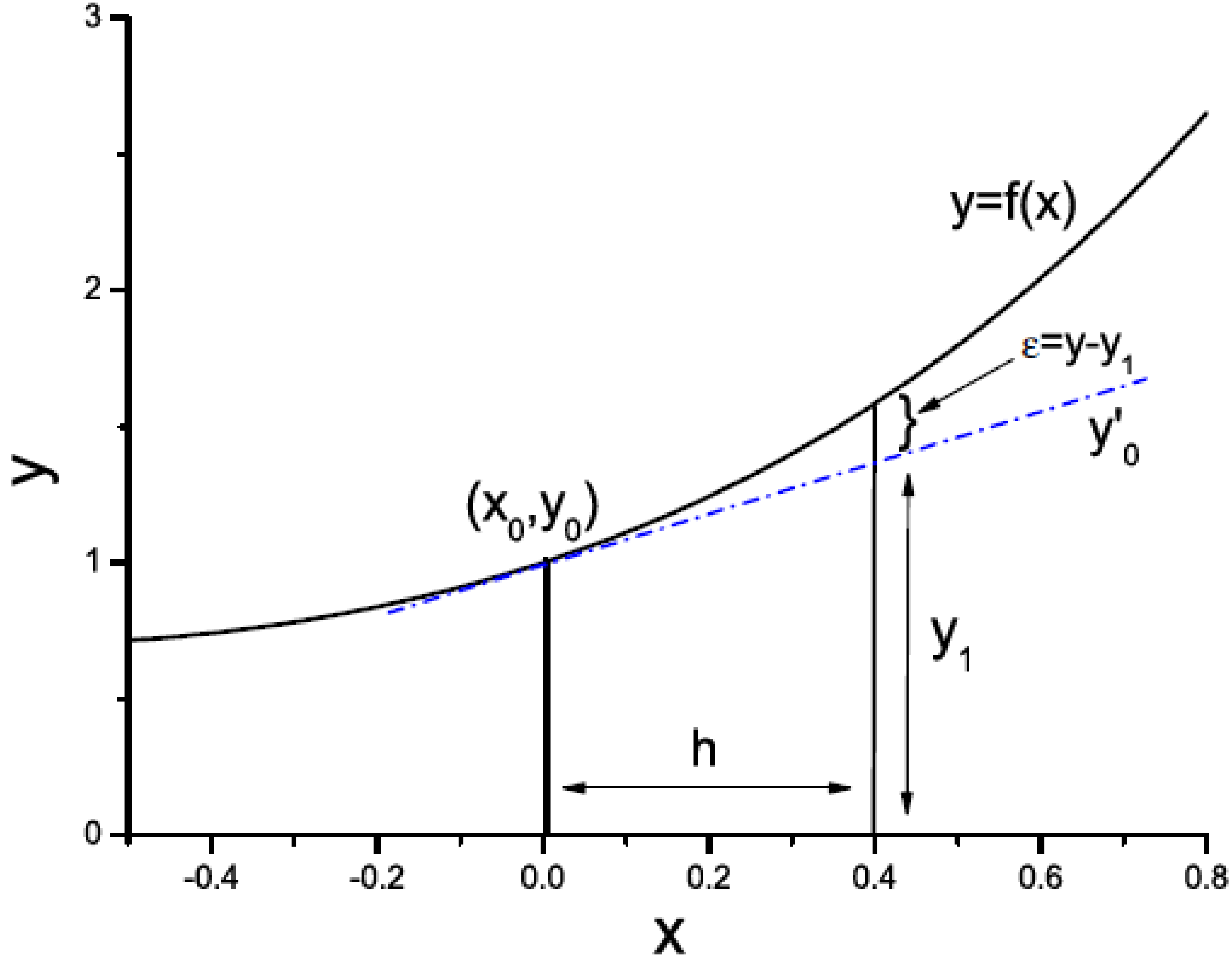
$$\boxed{y\left(x_0+h\right)=y\left(x_0\right)+hy'\left(x_0\right)}$$

με προφανές σφάλμα:

$$E=\frac{y''\left(\xi\right)}{2}h^2 \quad \text{για} \quad 0<\xi<h$$

Σε μορφή αναδρομικής σχέσης (για το παράδειγμα):

$$\boxed{y_{n+1}=y_n+h\left(x_n+y_n\right)}$$



y
x
3
2
1
0
-0.4
-0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
y=f(x)
ε=y-y1
y'0
(x0,y0)
y1
h

Η **μέθοδος Euler-Heun** αποτελεί μια απλή περίπτωση μεθόδου **πρόβλεψης - διόρθωσης**

Πρόβλεψη: Euler

Διόρθωση: Euler με y' $\longrightarrow$ μέσος όρος στα σημεία n και n+1

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h y'_n + O(h^2) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left(y'_n + y'_{n+1}\right) + O(h^3) \end{aligned}}$$

6.1.3 Σφάλματα και Ευστάθεια

1. **Αρχικά σφάλματα δεδομένων**
   Εάν οι αρχικές τιμές δεν είναι ακριβώς γνωστές, π.χ. τις γνωρίζουμε με συγκεκριμένη ακρίβεια, τότε το αρχικό σφαλμα διαδίδεται σε όλα τα βήματα της ολοκλήρωσης. Έτσι, για παράδειγμα, είναι δυνατό να παρατηρήσουμε το χάος σε διάφορα δυναμικά συστήματα.
2. **Σφάλματα Στρογγυλοποίησης**
   - Από τη συγκράτηση μόνο συγκεκριμένου αριθμού δεκαδικών ψηφίων
   - Βεβαιώνεται με την αύξηση των δεκαδικών
   - Είναι εξαιρετικά σημαντικό, όταν αφαιρούνται δυο λύσεις της ίδιας περίπου τάξης
3. **Σφάλμα αποκοπής**
   - Από τη χρήση σειρών συγκεκριμένης τάξης
   - Διορθώνεται μικραίνοντας το h.

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ & ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Τα προαναφερθέντα σφάλματα διαδίδονται από βήμα σε βήμα. Έστω για παράδειγμα μια τιμή y_n που είναι η αληθής και Y_n αυτή που υπολογίζουμε με κάποια από τις μεθόδους μας. Δηλαδή, το σφάλμα είναι:

$$\varepsilon_n = y_n - Y_n$$

οπότε, για παράδειγμα, ας εξετάσουμε τη διάδοση του σφάλματος στη μέθοδο Euler. Θα είναι:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= y_{n+1} - Y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right) - Y_n - hf\left(x_n, Y_n\right) \\
&= \varepsilon_n + h\frac{\left(f\left(x_n, y_n\right) - f\left(x_n, Y_n\right)\right)}{y_n - Y_n}\varepsilon_n = \varepsilon_n\left(1 + hf_y\left(x_n, y_n\right)\right) \\
&= \left(1 + hk\right)\varepsilon_n \quad \text{όπου} \quad k = \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned}$$

δηλαδή *η διάδοση του σφάλματος είναι γραμμική.*

αν $|1 + hk| \geq 1$ η μέθοδος του Euler είναι **ασταθής**.

για $|1 + hk| < 1$ => $-2 < hk < 0$ => $\partial f / \partial y < 0$

η μέθοδος είναι **απολύτως ευσταθής**.

6.1.4 Μέθοδος Runge-Kutta

Με τη μέθοδο Runge - Kutta προσπαθούμε να αντικαταστήσουμε τις παραγώγους ανώτερης τάξης που εμφανίζονται στη μέθοδο Taylor με κατάλληλους συνδυασμούς των x_i, y_i, y_i', τα οποία είναι γνωστά. Έτσι, αποφεύγουμε τον υπολογισμό των παραγώγων ανώτερης τάξης.

Runge-Kutta δεύτερης τάξης

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

όπου

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right), \quad k_2 = hf\left(x_n + h, y_n + k_1\right)$$

Η σχέση που καταλήξαμε είναι ουσιαστικά η μέθοδος Euler-Heun.

Runge - Kutta τέταρτης τάξης

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

όπου

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_n, y_n\right) \\
k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 &= hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right)
\end{aligned}$$

. γενικό σφάλμα μετά από n βήματα $E \approx 0(h^4)$

Η μέθοδος Runge-Kutta-Fehlberg δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

και

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right)$$

με τοπικό σφάλμα $\approx h^6$ και γενικό $\approx h^5$.

Τέλος, για τη μέθοδο Runge-Kutta-Fehlberg υπάρχει και *προσεγγιστική σχέση για το σφάλμα*. Το σφάλμα δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{360}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{7524}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$

Επειδή τα $k_1, k_2, ..., k_6$ είναι γνωστά σε κάθε βήμα, είναι δυνατό να εκτιμήσουμε άμεσα το σφάλμα και, αν είναι μεγαλύτερο από τη ζητούμενη ακρίβεια, υποδιπλασιάζουμε το h, ωσότου να την πετύχουμε.

6.2 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΒΗΜΑΤΩΝ

Οι μέθοδοι ενός βήματος, που αναλύσαμε λίγο πριν, είναι αρκετά καλές και αξιόπιστες αλλά έχουν ένα βασικό μειονέκτημα: Όταν υπολογίζουμε την τιμή της y_{n+1}, αυτό γίνεται μόνο με χρήση της πληροφορίας που έχουμε στο βήμα n για το σημείο (x_n, y_n). Με αυτό τον τρόπο, χάνεται όλη η γνώση που αποκτήσαμε στα προηγούμενα $n-1$ βήματα για τη συμπεριφορά της λύσης της διαφορικής εξίσωσης.

Οι **μέθοδοι πολλαπλού βήματος** έχουν το πλεονέκτημα ότι χρησιμοποιούν κατάλληλα την πληροφορία για την $y(x)$ από τα προηγούμενα 3-5 βήματα. Ένα προφανές μειονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι η ανάγκη της γνώσης των αρχικών βημάτων, π.χ. των y_1, y_2, y_3 για τον υπολογισμό του y_4, οπότε είναι αναγκαία η χρήση μιας από τις προηγούμενες μεθόδους ενός βήματος στην αρχή της διαδικασίας.

6.2.1 Μέθοδος Adams

Αν δοθεί η διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \quad \text{τότε} \quad dy = f\left(x, y\right) dx$$

ολοκληρώνοντας και τα δυο μέρη της παραπάνω ισότητας παίρνω:

$$\begin{aligned}
\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_n &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\left(x, y\right) dx \\
&= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{\left(s+1\right)s}{2}\Delta^2 f_{n-2} + \text{σφάλμα}\right) dx \\
&= h\int_{s=0}^{s=1} \left(f_n + s\Delta f_{n-1} + \frac{(s+1)s}{2}\Delta^2 f_{n-2}\right) ds \\
&\quad + h\int_{s=0}^{s=1} \frac{s(s+1)(s+2)}{6} h^3 f'''(\xi) ds
\end{aligned}$$

και τελικά

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\right] + O\left(h^4\right)}$$

Αν χρησιμοποιούσαμε συμπτωτικό πολυώνυμο <u>τρίτου βαθμού</u>, θα οδηγούμαστε στη σχέση :

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right] + O\left(h^5\right)}$$

6.2.2 Μέθοδος Milne

Αν υποθέσουμε ότι η λύση είναι γνωστή στα σημεία x_n, x_{n-1}, x_{n-2} και x_{n-3}, τότε η διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

μπορεί να γραφεί κατά τα προηγούμενα ως

$$\int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_{n-3} = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f(x, y)\, dx$$

Αν τώρα αντικαταστήσουμε την $f(x, y)$ με ένα δευτεροβάθμιο συμπτωτικό πολυώνυμο και ολοκληρώσουμε, καταλήγουμε στη σχέση

$$\boxed{y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}\right)}$$

με σφάλμα

$$E \approx \frac{28}{90} h^5 y^{(5)}(\xi), \qquad x_{n-3} \le \xi \le x_{n+1}$$

6.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ - ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ

Τύπος Πρόβλεψης

$$\boxed{\overline{y}_{k+1} = \Pi\left(y_{k-m}, y_{k-m+1}, \ldots, y_k\right)}$$

Τύπος Διόρθωσης

$$\boxed{y_{k+1} = \Delta\left(y_{k-m}, y_{k-m+1}, \ldots, y_k, \overline{y}_{k+1}\right)}$$

Αυτή η διαδικασία γίνεται επαναληπτικά, ωσότου οι δυο διαδοχικές τιμές της y_{k+1} να είναι αρκετά κοντά: $\left|y_{k+1}^{(\lambda)} - y_{k+1}^{(\lambda+1)}\right| < E$, όπου λ είναι ο αριθμός επαναλήψεων της διαδικασίας και E η ζητούμενη ακρίβεια.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ένα τύπο διόρθωσης για τη μέθοδο Milne. Για τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_{n-1} = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} f\left(x, y\right) dx$$

αντικαθιστώντας το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέρους με τον κανόνα του Simpson

$$\boxed{y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right)}$$

Συνοπτικά έχουμε τους παρακάτω συνδυασμούς τύπων πρόβλεψης-διόρθωσης για διαφορικές εξισώσεις της μορφής $y = f(x, y)$:

- **ΜΕΘΟΔΟΣ Milne**

  ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ $(x_{k-3} < \xi_1 < x_{k+1})$

$$\boxed{\mathrm{y}_{\mathrm{k+1}} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k)} + \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}(\xi_1)$$

  ΤΥΠΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ $(x_{k-1} < \xi_2 < x_{k+1})$

$$\boxed{y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1})} - \frac{1}{90}h^5 y^{(5)}(\xi_2)$$

Για τον υπολογισμό των αρχικών σημείων χρησιμοποιείται συνήθως Runge-Kutta τέταρτης τάξης ή καλύτερα Runge-Kutta-Fehlberg.

- **ΜΕΘΟΔΟΣ Adams-Multon**

  ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ $(x_{k-3} < \xi_1 < x_{k+1})$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right)} + \frac{251}{720}h^5 y^{(5)}(\xi_1)$$

ΤΥΠΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ $(x_{k-2} < \xi_2 < x_{k+1})$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}\right)} - \frac{19}{720}h^5 y^{(5)}(\xi)$$

- **ΜΕΘΟΔΟΣ Hamming**

  Μια επίσης συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος πρόβλεψης - διόρθωσης είναι η μέθοδος Hamming. Η απόδειξη των σχέσεων επαφίεται στον αναγνώστη.

  ΤΥΠΟΣ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ $(x_{k-3} < \xi_1 < x_{k+1})$

$$\boxed{y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}\left(2f_{k-2} - f_{k-1} + 2f_k\right)}$$

  ΤΥΠΟΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗΣ $(x_{k-2} < \xi_2 < x_{k+1})$

$$\boxed{y_{k+1} = \frac{1}{8}\left(9y_k - y_{k-2}\right) + \frac{3h}{8}\left(-f_{k-1} + 2f_k + f_{k+1}\right)}$$

6.4 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Οι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης είναι αυτές που συναντώνται ευρύτερα, δηλαδή της μορφής :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, y'\right)}$$

οπότε απαιτείται η γνώση αρχικών συνθηκών, όχι μόνο για την $y(x)$ αλλά και για την παράγωγό της στην αρχική θέση x_0. Το σύνηθες είναι να ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $z\left(x\right)$ τέτοια, ώστε $z\left(x\right) = y'$. Οπότε η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση ανάγεται σε δυο πρωτοβάθμιες με τις ανάλογες αρχικές συνθήκες. Δηλαδή

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z \\ \frac{dz}{dx} &= f\left(x, y, z\right) \end{aligned}}$$

και

$$y(x_0) = y_0 \qquad z(x_0) = y'_0$$

Έστω λοιπόν ότι έχουμε το παρακάτω σύστημα

$$\frac{dy}{dx} = zy + x \quad \text{με} \quad y\left(0\right) = 1$$
$$\frac{dz}{dx} = xz + y \quad \text{με} \quad z\left(0\right) = 1$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο Euler**, το σύστημα θα δίνεται από αναδρομικές σχέσεις της μορφής

$$\boxed{\begin{aligned} y'_{n+1} &= y_n + hy'_n = y_n + h\left(z_n y_n + x_n\right) \\ z'_{n+1} &= z_n + hz'_n = z_n + h\left(x_n z_n + y_n\right) \end{aligned}}$$

μέθοδο Runge - Kutta

$$\boxed{\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}\left(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4\right) \end{aligned}}$$

όπου

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n, z_n) \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1\right) \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2\right) \\ k_4 &= hf\left(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3\right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} l_1 &= hg(x_n, y_n, z_n) \\ l_2 &= hg(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1) \\ l_3 &= hg\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2\right) \\ l_4 &= hg\left(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3\right) \end{aligned}$$

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

- Μέχρι στιγμής αναφερθήκαμε μόνο στην ανάλυση των **τοπικών σφαλμάτων** των διαφόρων μεθόδων.
- Η άθροιση όμως των τοπικών σφαλμάτων οδηγεί σε ένα **συνολικό σφάλμα** το οποίο είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην αριθμητκή επίλυση ΔΕ.
- Τα **αρχικά δεδομένα** έχουν πολλές φορές σφάλματα τα οποία διαδίδονται κατά την επαναληπτική διαδικασία που ακολουθούμε ενώ συγκεκριμένα είδη ΔΕ είναι εξαιρετικά ευαίσθητα ακόμη και σε πολύ μικρά αρχικά σφάλματα.
- Τέλος, υπάρχουν και τα **σφάλματα στρογγύλεψης** διότι οι ΗΥ εκτελούν αριθμητικές πράξεις με δεδομένο αριθμό δεκαδικών ψηφίων.

Αν θεωρήσουμε την 1ης τάξης ΔΕ $y' = f(x, y)$, με $y(x_0) = y_0$ τότε αν Y_n η αριθμητική τιμή στο σημείοx_n και y_n η ακριβής τιμή, το σφάλμα στο x_n θα είναι:

$$\varepsilon_n = y_n - Y_n$$

Ας προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τη διάδοση του σφάλματος στη μέθοδο του Euler

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= y_{n+1} - Y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n, y_n\right) - Y_n - hf\left(x_n, Y_n\right) \\
&= \varepsilon_n + h\frac{\left(f\left(x_n, y_n\right) - f\left(x_n, Y_n\right)\right)}{y_n - Y_n}\varepsilon_n = \varepsilon_n\left(1 + hf_y\left(x_n, y_n\right)\right) \\
&= \left(1 + hk\right)\varepsilon_n + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n) \quad \text{όπου} \quad k = \frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή η διάδοση του σφάλματος είναι γραμμική. Αν $|1 + hk| \geq 1$ το σφάλμα αυξάνεται ενώ αν $|1 + hk| \leq 1$ το σφάλμα ελλατώνεται. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στην παρακάτω συνθήκη για απόλυτη σύγκλιση:

$$-2 < hk < 0 \quad \text{ή} \quad \partial f / \partial y < 0$$

$$\varepsilon_{n+1} = (1 + hk)\,\varepsilon_n + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_n)$$

$$\begin{aligned}
e_0 &= 0 \\
e_1 &\leq (1 + hk)e_0 + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0) = \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0) \\
e_2 &\leq (1 + hk)\left[\frac{1}{2}h^2 y''(\xi_0)\right] + \frac{1}{2}h^2 y''(\xi_1) = \frac{1}{2}h^2\left[(1 + hk)y''(\xi_0) + y''(\xi_1)\right] \\
e_3 &\leq \frac{1}{2}h^2\left[(1 + hk)^2 y''(\xi_0) + (1 + hk)y''(\xi_1) + y''(\xi_2)\right] \\
e_n &\leq \frac{1}{2}h^2\left[(1 + hk)^{n-1} y''(\xi_0) + (1 + hk)^{n-2} y''(\xi_1) + \ldots + y''(\xi_{n-1})\right]
\end{aligned}$$

- Αν $k \geq 0$ το σφάλμα διαδίδεται σε κάθε βήμα ‘ ενισχυμένο ’ κατά ένα όρο $(1 + hk)$ και τελικά για $h \to 0$ το σφάλμα σε κάθε σημείο είναι το άθροισμα των προηγουμένων.
- Αν $kh \leq 2$ το σφάλμα διαδίδεται με ανεπαίσθητο αποτέλεσμα

Θα δείξουμε ότι το **αθροιστικό σφάλμα** της μεθόδου Euler μετά απο n βήματα είναι $O(h)$.
Αν υποθέσουμε ότι το $|y''(x)| < M$ με $M > 0$ η προηγούμενη εξίσωση θα γραφεί

$$|e_{n+1}| \leq (1 + hk)|e_n| + \frac{1}{2}h^2 M$$

που είναι μια εξίσωση διαφορρών της μορφής

$$Z_{n+1} = (1 + hk)Z_n + \frac{1}{2}h^2 M \quad \text{με} \quad Z_0 = 0$$

με προφανή λύση

$$Z_n = \frac{hM}{2k}(1 + hk)^n - \frac{hM}{2k}$$

επειδή δε $1 + hk < e^{hk}$ για $k > 0$ θα είναι

$$Z_n < \frac{hM}{2k}\left(e^{hk}\right)^n - \frac{hM}{2k} = \frac{hM}{2k}\left(e^{nhk} - 1\right) = \frac{hM}{2k}\left(e^{(x_n - x_0)k} - 1\right) = O(h)$$

Δηλαδή το συνολικό σφάλμα e_n θα είναι $O(h)$

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: <Νικόλαος Τρυφωνίδης>

Θεσσαλονίκη, <Εαρινό εξάμηνο 2013-2014>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης