



# Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και την Πρώτη Σχολική Ηλικία

Ενότητα 5: Έννοιες χώρου και Γεωμετρίες

Διδάσκουσα: Μαριάννα Τζεκάκη

Τμήμα Επιστημών Προσχολικής Αγωγής & Εκπαίδευσης



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

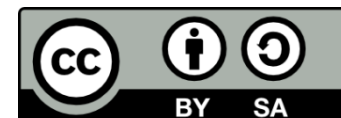


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Μαριάννα Τζεκάκη, Καθηγήτρια ΤΕΠΑΕ, Α.Π.Θ.



**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**

---

# **Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία**



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Έννοιες χώρου και Γεωμετρίες

# Περιεχόμενα ενότητας (1)

- Παρουσίαση θεματικών ενοτήτων.
- Παρουσίαση δραστηριότητας.
- Διδακτικό περιεχόμενο.

## Προσανατολισμός στο χώρο.

1. Έννοιες χώρου.
2. Σημασία ανάπτυξης.
3. Διαφορετικές προσεγγίσεις.
4. Ιστορική εξέλιξη των εννοιών.
5. Ιστορική εξέλιξη Γεωμετριών.
6. Επίπεδο Riemann.



# Περιεχόμενα ενότητας (2)

7. Επιφάνεια Togliatti.
8. Αντικείμενα και σχέσεις.
9. Άλλες γεωμετρίες.
10. Προβολική Γεωμετρία.
11. Αλγεβρική κι Αναλυτική Γεωμετρία.
12. Τοπολογική Γεωμετρία.

## **Χωρικός συλλογισμός.**

1. Χωρικός συλλογισμός.
2. Διδακτικό περιεχόμενο.
3. Τοπολογική Προσέγγιση.





# Περιεχόμενα ενότητας (3)

4. Τοπολογική Γεωμετρία.
5. Τοπολογικές εφαρμογές.
6. Διδακτικές συνέπειες.
7. Διδακτικές προτάσεις.
8. Δραστηριότητες.

## **Προβολική Γεωμετρία, οπτικοποίηση.**

1. Οπτικοποίηση.
2. Διδακτικό περιεχόμενο.
3. Ιστορική εξέλιξη Προβολικής Γεωμετρίας.
4. Προβολική Γεωμετρία.



# Περιεχόμενα ενότητας (4)

5. Διάφορες Προβολές.
6. Διδακτικές κατευθύνσεις.
7. Δραστηριότητες.

## Γεωμετρικά Σχήματα και συλλογισμός.

1. Γεωμετρικός συλλογισμός.
2. Σημασία ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού.
3. Ευκλείδεια Γεωμετρία – αποσαφηνίσεις.
4. Ευκλείδεια Γεωμετρία.
5. Ευκλείδεια Σχήματα.
6. Διδακτικές κατευθύνσεις.



# Περιεχόμενα ενότητας (5)

7. Δραστηριότητες.

## Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

1. Ισομετρίες.

2. Ομοιότητα – ομοιοθεσία.

3. Μετασχηματισμοί.

4. Ένα ιδιαίτερο ζήτημα: Χρυσός λόγος.

5. Εφαρμογές Χρυσού Λόγου.

6. Διδακτικές κατευθύνσεις.

7. Δραστηριότητες.

8. Ερωτήσεις.

9. Υλικό μελέτης - Βιβλιογραφία.



# Σκοποί ενότητας

- Να γίνουν σαφή:
  1. Οι βασικές μορφές συλλογισμού στην ενότητα «χώρου και γεωμετρίας».
  2. Η σημασία ανάπτυξης των συλλογισμών αυτών.
  3. Η ιστορική εξέλιξη και τα είδη των γεωμετριών.
  4. Διδακτικές προτάσεις και δραστηριότητες για την ανάπτυξη του χωρικού συλλογισμού.
  5. Διδακτικές προτάσεις και δραστηριότητες για την ανάπτυξη της οπτικοποίησης.
  6. Διδακτικές προτάσεις και δραστηριότητες για την ανάπτυξη της γεωμετρικού συλλογισμού.
  7. Διδακτικές προτάσεις και δραστηριότητες για την ανάπτυξη μετασχηματισμών.





1. Προσανατολισμός στο χώρο
2. Γεωμετρικά Σχήματα
3. Μετασχηματισμοί
4. Οπτικοποίηση

# Παρουσίαση Θεματικών ενοτήτων

Για κάθε μία από τις ενότητες που παρουσιάστηκαν θα δίνονται:

- Αρχικοί ορισμοί και η σημασία ανάπτυξης των εννοιών.
- Στοιχεία που προέρχονται από τα Μαθηματικά (έννοιες και ιστορική εξέλιξη).
- Διδακτικές κατευθύνσεις.
- Δραστηριότητες.



# Παρουσίαση δραστηριότητας

<b>Τίτλος της δραστηριότητας</b>	<i>Είδος της δράσης (δηλαδή παιχνίδι, κατασκευή, κατάσταση πρόβλημα κλπ.).</i>
<i>Κεντρική δράση:</i>	Περιγραφή αυτόνομης δράσης – τι καλείται να κάνει το παιδί.
<i>Κανόνες:</i>	Κανόνες δράσης που περιγράφονται από τον εκπαιδευτικό.
<i>Υλικό.</i>	Προτεινόμενο υλικό (συγκεκριμένο ή αναπαραστατικό).
<i>Μαθηματική δράση:</i>	Αποσαφήνιση μαθηματικών χαρακτηριστικών της δράσης.
<i>Οργάνωση της τάξης:</i>	Εξηγείται μια πιθανή οργάνωση της τάξης.
<i>Διατύπωση ιδεών – συζήτηση:</i>	Φάσεις όπου τα παιδιά παρουσιάζουν τις ιδέες τους και αναπτύσσεται διάλογος.
<i>Διαδικασίες ελέγχου:</i>	Πιθανές διαδικασίες ελέγχου των έργων ή των αποτελεσμάτων ή των ιδεών των παιδιών.
<i>Μαθηματική ιδέα.</i>	Η πορεία ανάπτυξης της οποίας συνδέεται με τη δραστηριότητα.
<i>Εναλλακτικές μορφές – επεκτάσεις.</i>	Εναλλακτικές δραστηριότητες και επεκτάσεις ή κλιμάκωση δυσκολιών.
<i>Ψηφιακά.</i>	Δίνονται πληροφορίες για ψηφιακό υλικό.
<i>Εξέλιξη στην τάξη.</i>	Στοιχεία ή φωτογραφίες εφαρμογής στην τάξη.



# Διδακτικό περιεχόμενο (1)

- Στη θέση των απλοϊκών χωρικών εννοιών (πάνω - κάτω, μπρος – πίσω κλπ.) η μαθηματική εκπαίδευση βοηθάει τα παιδιά να αναπτύξουν τρεις μορφές συλλογισμού:
  - χωρικό συλλογισμό.
  - γεωμετρικό συλλογισμό.
  - οπτικοποιημένο συλλογισμό.



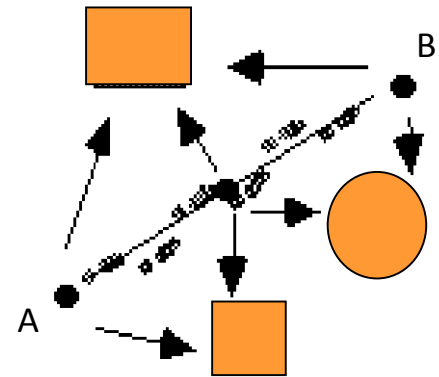


# Έννοιες χώρου (1)

- Ο χώρος και ο χρόνος είναι το πρώτο περιβάλλον ανάπτυξης εννοιών.
- Οι πιο θεμελιώδεις λειτουργίες, όπως είναι οι μετακινήσεις και οι προσανατολισμοί μέσα στο χώρο προϋποθέτουν την **μελέτη σχέσεων και μετασχηματισμών** των αντικειμένων ή των ανθρώπων μέσα σε αυτόν.

Παράδειγμα:

Η μετακίνηση από ένα σημείο A σε ένα σημείο B.



Εικόνα 1. Μετακίνηση από το σημείο A στο σημείο B.



# Έννοιες χώρου (2)

- Το μικρό παιδί, όπως και ο άνθρωπος γενικότερα, αντιλαμβάνεται το χώρο καθώς λειτουργεί μέσα σε αυτόν.
- Η προσέγγιση που κάνει αν και περιλαμβάνει αντικείμενα και σχέσεις, μετακινήσεις, οριοθετήσεις είναι **κιναισθητική** (δηλαδή στηρίζεται στην αντίληψη της κίνησης του σώματος).
- Η αυθόρμητη ανάπτυξη χωρικού συλλογισμού δεν επαρκεί για την καλλιέργεια **σημαντικών χωρικών δεξιοτήτων** για την οποία απαιτούνται συστηματικές και κατάλληλες δράσεις μέσα στο χώρο.



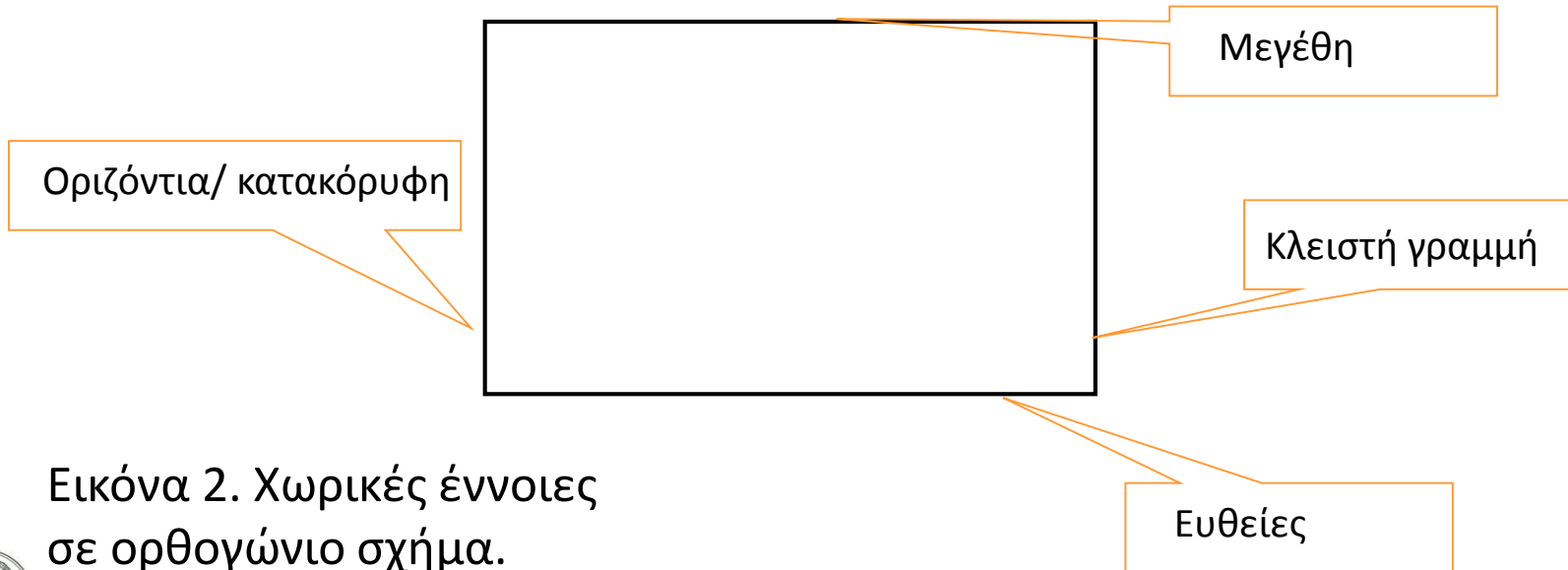
# Σημασία ανάπτυξης

- Οι χωρικές και γεωμετρικές έννοιες εμφανίζονται:
  - σε **καθημερινές δράσεις** αλλά και η τέχνη, επιστήμη, τεχνολογία ή μορφές μοντελοποίησης (υπολογιστές, ρομποτική, εγκέφαλος, κ.ά).
  - στην υποστήριξη **επίλυση προβλήματος** αλλά και πολλές πτυχές των ίδιων των Μαθηματικών: διαγράμματα, σχέσεις, σύμβολα, απόδοση αριθμητικών σχέσεων, της αριθμητικής γραμμής, γραφικών παραστάσεων ή άλλων μαθηματικών διαδικασιών (πράξεις, πίνακες κ.ά.).
  - στη **χωρική «οπτικοποίηση»**, η επεξεργασία νοερών εικόνων, η ευλυγισία στην αλλαγή οπτικών γωνιών και η χωρική μνήμη.



# Διαφορετικές προσεγγίσεις

- Από μία κατάσταση που παρατηρεί ο άνθρωπος «βλέπει» μόνο όσα είναι σε θέση να αντιληφθεί.
- Ποιες χωρικές έννοιες αντιλαμβάνεται το παιδί;
- Τι «βλέπει» σε αυτό το σχήμα;



Εικόνα 2. Χωρικές έννοιες σε ορθογώνιο σχήμα.



# Ιστορική εξέλιξη των εννοιών

Η ανθρωπότητα, στην προσπάθεια μαθηματικοποίησης της πραγματικότητας:

- Αρχικά, αναπαριστά **το χώρο**.
- Μετράει **τα μεγέθη**, κυρίως σε προβλήματα χωρομετρίας (πριν το 300 π.Χ.) από όπου και το όνομα "**Γεωμετρία**".
- Οργανώνει όλα τα αποτελέσματα στη αξιωματική **Ευκλείδεια Γεωμετρία**.

Εικόνα 3. Ζωγραφιές της σπηλιάς Chauvet, μουσείο Replica.



Εικόνα 4. Αποτυπώματα χεριών στη σπηλιά Gargas της Γαλλίας.

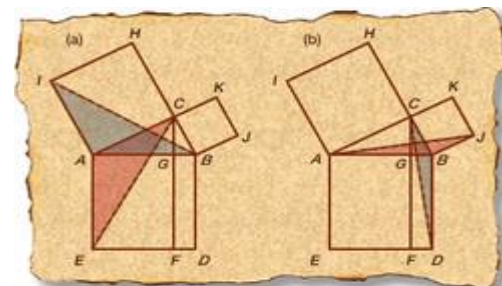


Εικόνα 5. Βαβυλωνιακά Μαθηματικά.



MS 3020  
Properties of chords of circles, in the Babylonian sexagesimal system.  
Babylonia ca. 370-350 BC.

Εικόνα 6. Πυθαγόρειο θεώρημα.



© 2000 Encyclopædia Britannica, Inc.

# Ιστορική εξέλιξη Γεωμετριών (1)

## Διάρκεια της Ευκλείδειας

- Περίπου 20 αιώνες οι μαθηματικοί προσπαθούν να θεμελιώσουν ή βελτιώσουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία.
- Μόλις το 18<sup>ο</sup> αιώνα προτείνεται η κατασκευή **μη Ευκλείδειων γεωμετριών**.
- Και τον 19<sup>ο</sup> αιώνα **ολοκληρώνεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία** από νοητικά και μαθηματικά κενά.



# Ιστορική εξέλιξη Γεωμετριών (2)

## Ολοκλήρωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

- Το 1899 ο David Hilbert συμπλήρωσε το αξιωματικό σύστημα του Ευκλείδη με 6 βασικά στοιχεία και αξιώματα 20 αξιώματα.
- Με τον τρόπο αυτό κάλυψε τοπολογικά ζητήματα όπως η έννοια του «ανάμεσα», του «περιέχει» και της «ισότητας» όπως κι τις σχέσεις που προκύπτουν από αυτές.



Εικόνα 7. David Hilbert.



# Ιστορική εξέλιξη Γεωμετριών (3)

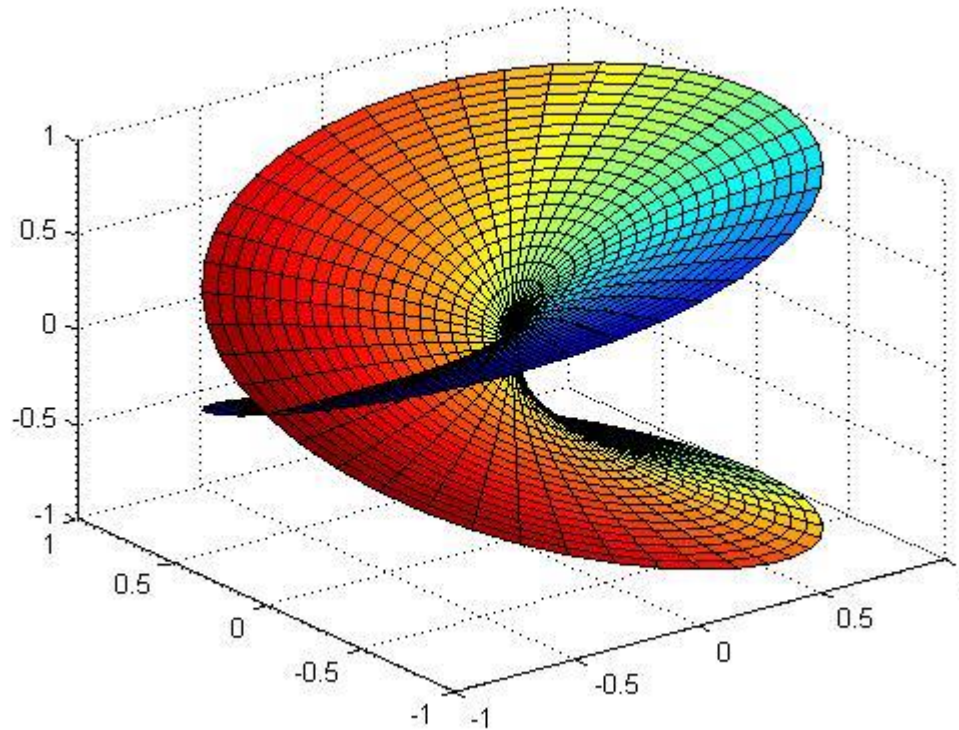
## Μη ευκλείδειες γεωμετρίες

- Την αλλαγή του 5<sup>ου</sup> αξιώματος έκαναν τρεις μαθηματικοί, από διαφορετικά μέρη: ο Γερμανός F. Gauss, ο Ούγγρος J. Bolyai και ο Ρώσος N. Lobachevsky.
  - από μία παράλληλη,
  - σε καμία παράλληλη,
  - σε άπειρες παράλληλες.
- Οι καινούργιες προσεγγίσεις δίνουν μια γενίκευση των εννοιών χώρου και βγάζουν την ανθρωπότητα έξω από τα στενά πλαίσια του ευκλείδειου χώρου.





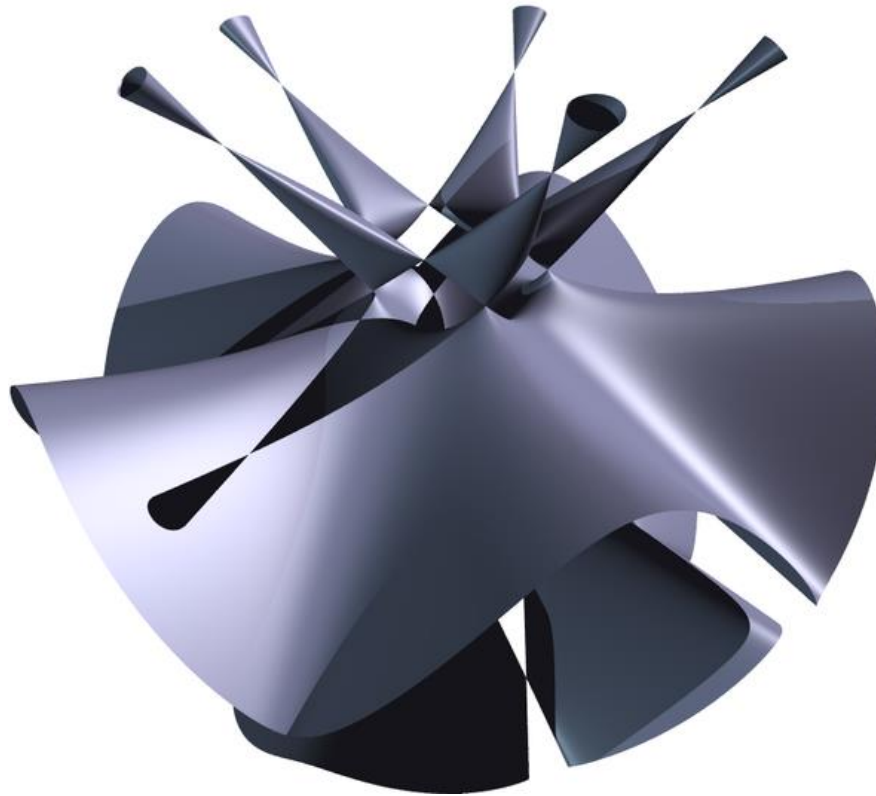
# Επίπεδο Riemann



Εικόνα 8. Riemann.

# Επιφάνεια Togliatti

- Αλγεβρική επιφάνεια 5<sup>ου</sup> βαθμού.



Εικόνα 9. Togliatti.



# Ιστορική εξέλιξη Γεωμετριών (4)

Γενικότερα, στην πορεία των αιώνων, ο άνθρωπος κατασκευάζει **ποικίλα μοντέλα** για να προσεγγίσει τον χώρο, όπως και γεωμετρίες για να αντιμετωπίσει προβλήματα αναπαράστασής του.

- Κατά τον Αϊνστάιν, όμως, *είναι προσεγγίσεις που καμία δεν αποδίδει πλήρως όλες τις ιδιότητες του χώρου που μας περιβάλλει, αν και η κάθε μία βοηθά στην μελέτη και τη διαχείρισή του.*



# Αντικείμενα και σχέσεις

- Η ενασχόληση με αυτές εμπλέκει **αντικείμενα** (σημεία, ευθείες, σχήματα κλπ) και **ιδιότητες** - ξεκίνησαν να περιγράφονται από την ευκλείδεια γεωμετρία - και υπάρχουν και στις άλλες γεωμετρίες:
  - Εντός κι εκτός.
  - Συγγραμικότητα και σύγκλιση.
  - Παραλληλία και καθετότητα.
  - Ισότητα και αναλογία, κ.ά.
- Εμπλέκει επίσης και διάφορους **μετασχηματισμούς** που μπορούν να εφαρμοσθούν στα γεωμετρικά αντικείμενα:
  - Έκταση και κάμψη.
  - Μετατόπιση και στροφή.
  - Συμμετρία.
  - Προβολή – ομοιοθεσία.



# Άλλες γεωμετρίες

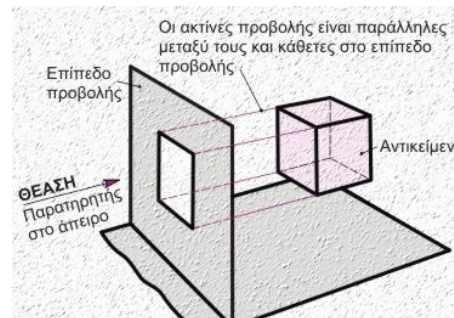
- Οι διαφορετικές προσεγγίσεις του χώρου οδηγούν στην ανάπτυξη μιας ποικιλίας γεωμετριών:
  - Οι Άραβες οργάνωσαν μια **Αλγεβρική Γεωμετρία** (10/ 11<sup>ο</sup> αιώνα).
  - Οι ευρωπαίοι μετά το μεσαίωνα ανέπτυξαν την **Αναλυτική Γεωμετρία** και την **Προβολική Γεωμετρία** (15/ 16<sup>ο</sup> αιώνα).
  - Το 18<sup>ο</sup> αιώνα αναπτύσσονται οι **μη – Ευκλείδειες Γεωμετρίες**.
  - Και τον 20<sup>ο</sup> νεώτερες όπως η **Διαφορική Γεωμετρία**, η **Τοπολογική Γεωμετρία**, κ.ά.



# Προβολική Γεωμετρία (1)

## Η γεωμετρία της οπτικοποίησης

- Η **Προβολική Γεωμετρία** γεννήθηκε από τις προσπάθειες των ζωγράφων της αναγέννησης να απεικονίσουν με πειστικότερο και πιο πραγματικό τρόπο τα διάφορα αντικείμενα ή πρόσωπα πάνω στον καμβά.
- Η προβολή που αποτελεί απεικόνιση των 3D αντικειμένων στις 2D στηρίζεται στην ομοιότητα, που αποτελεί ένας μετασχηματισμό ο οποίος διατηρεί το σχήμα αλλά **αλλάζει τα μεγέθη**.



Εικόνα 10.  
Προβολή κύβου.

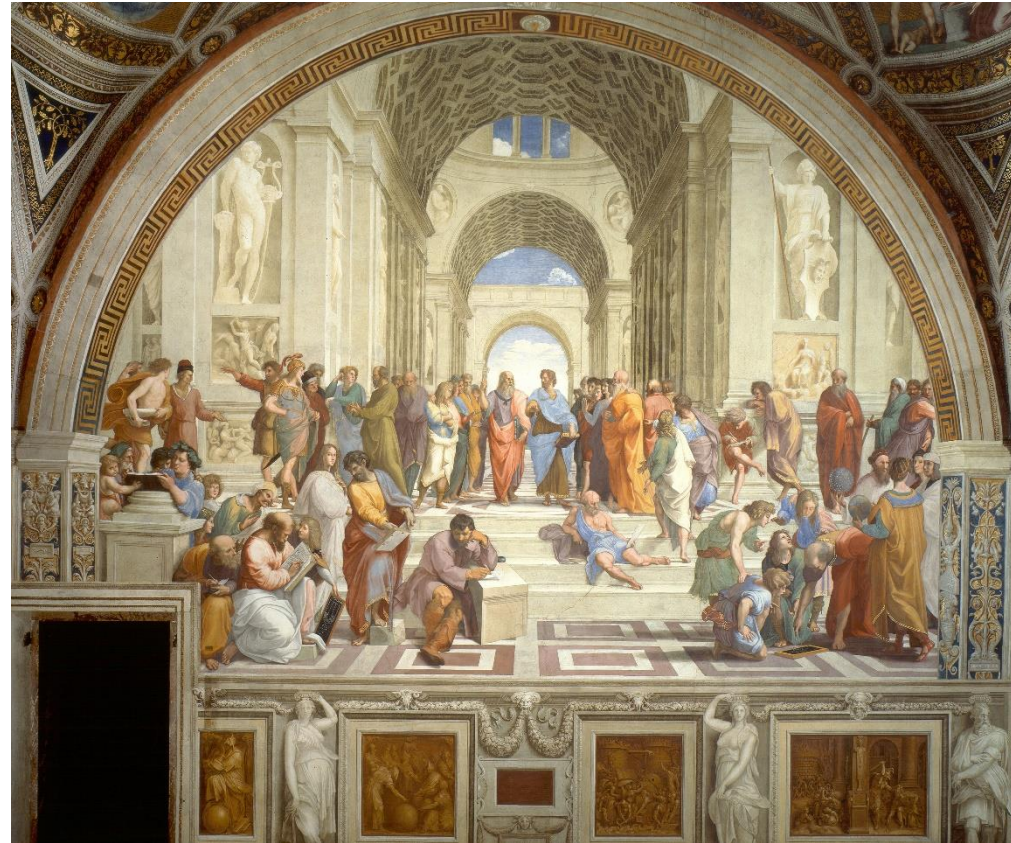




# Προβολική Γεωμετρία (2)



Εικόνα 11. Εικόνα χωρίς προοπτική και βάθος.

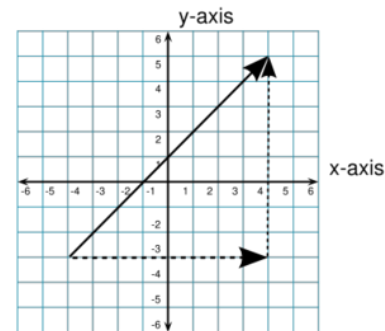


Εικόνα 12. Τοιχογραφία «Η σχολή των Αθηνών» του Ραφαέλ, 1510.



# Αλγεβρική κι Αναλυτική Γεωμετρία

- Με την ανάπτυξη της άλγεβρας, τον 17ο αιώνα, αναπτύσσεται ένα αλγεβρικό μοντέλο της γεωμετρίας, η Αναλυτική Γεωμετρία, η οποία αντιμετωπίζει τα γεωμετρικά προβλήματα με αλγεβρικούς τρόπους.
- Την πρώτη προσέγγιση στη μέθοδο αυτή κάνει ο Γάλλος μαθηματικός R. Descartes (Καρτέσιος), από τον οποίο μένει η ονομασία καρτεσιανό σύστημα, που αποδίδει το σημείο ως ζεύγος αριθμών.



Εικόνα 13.  
Καρτεσιανό  
σύστημα.



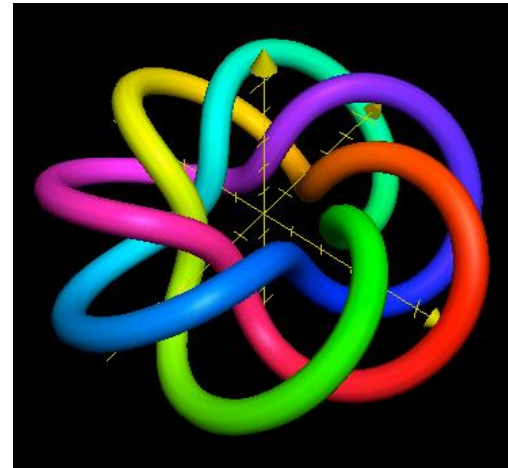


# Τοπολογική Γεωμετρία (1)

Η Τοπολογία είναι ένα είδος γεωμετρίας που σχετίζεται με τους τρόπους με τους οποίους οι επιφάνειες ή οι γραμμές μπορούν επιμηκυνθούν, να λυγίσουν, να στρίψουν ή γενικότερα να μετασχηματισθούν από τη μια μορφή στην άλλη, διατηρώντας διάφορες ιδιότητες, χωρίς να κοπούν, να διπλωθούν ή να σπάσουν.



Εικόνα 14. Möbius strip.



Εικόνα 15. Ευκλείδειος αλγόριθμος.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Χωρικός συλλογισμός

# Χωρικός συλλογισμός

- Ο **χωρικός συλλογισμός** είναι η διαδικασία με τη βοήθεια της οποίας σχηματίζουμε ιδέες για τις ιδιότητες και σχέσεις στο χώρο, τις αποδίδουμε με πραγματικές και νοερές εικόνες, τις διαχειριζόμαστε για την αντιμετώπιση καταστάσεων. Πιο συγκεκριμένα ο χωρικός συλλογισμός περιλαμβάνει:
  - την αντίληψη, κατανόηση και παράσταση θέσεων, αμοιβαίων σχέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών μέσα στο χώρο όπως και γενικότερα τη διαχείριση κάθε χωρικής πληροφορίας και των μετασχηματισμών της.



# Διδακτικό περιεχόμενο (2)

## Προσανατολισμός στο χώρο

- κατανοεί, επεξεργάζεται και αναπαριστά θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε οργανωμένα και μη περιβάλλοντα,
- κατανοεί, επεξεργάζεται και αναπαριστά θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με χρήση συντεταγμένων.



# Τοπολογική Προσέγγιση (1)

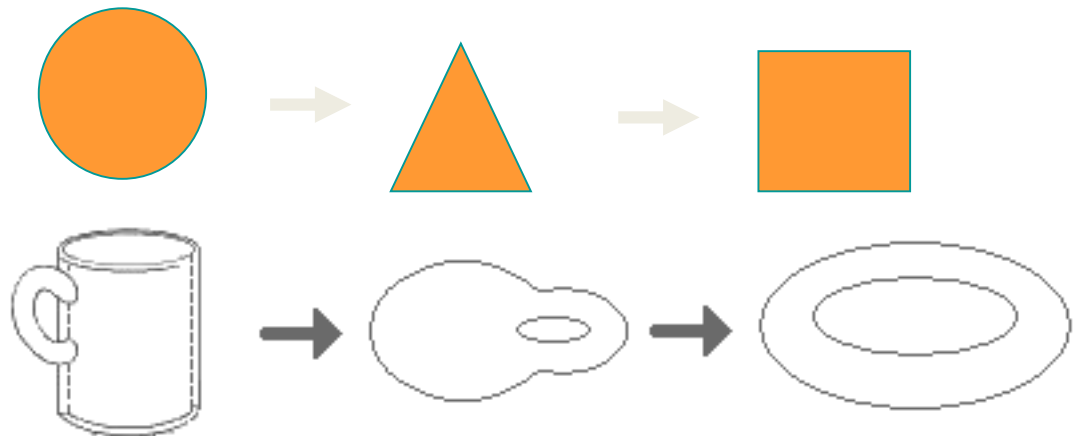
- Η πρώτη κατανόηση των χωρικών εννοιών που κάνει ο άνθρωπος είναι η τοπολογική προσέγγιση:
  - το **ανοικτό** ή **κλειστό** μιας γραμμής,
  - το **ανήκει** στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό,
  - το έχει **κοινά σημεία** με,
  - το βρίσκεται στο **σύνορο**,
  - το βρίσκεται **ανάμεσα**,
  - το βρίσκεται **δίπλα** ή βρίσκεται στην περιοχή.
- Αυτές οι ιδιότητες θεωρήθηκαν αρχικά αυτονόητες αλλά έδωσαν ενδιαφέρουσες εφαρμογές ανάμεσα στις οποίες ήταν και η ανάπτυξη της τοπολογικής γεωμετρίας τον 20<sup>ο</sup> αι.



# Τοπολογική Γεωμετρία (2)

- Στην **Τοπολογική Γεωμετρία**, κάθε συνεχής αλλαγή – που μπορεί να αναιρεθεί δεν αλλάζει το αντικείμενο.
- Έτσι ένας κύκλος είναι ίδιος με ένα τρίγωνο, γιατί «τραβώντας» μέρη του κύκλου μπορούμε να δημιουργήσουμε γωνίες και μετά να τις ισιώσουμε πάλι, σαν να δουλεύουμε με ένα λάστιχο - χωρίς να το σπάνουμε.
- Στα στερεά:

Ποια χρήση;



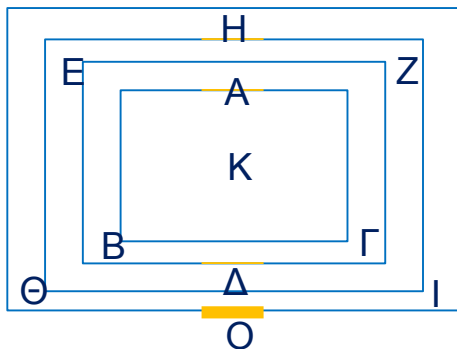
Εικόνα 16. Απεικόνιση μετασχηματισμών.



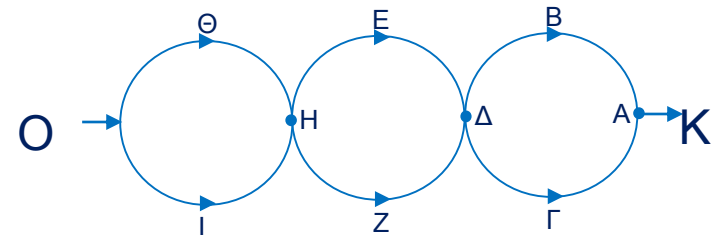
# Τοπολογική Προσέγγιση (2)

- **Παράδειγμα: ένας λαβύρινθος.**

Ας εξετάσουμε πώς από την είσοδο Ο φτάνουμε στο κέντρο Κ. Σχήμα, μέγεθος και άλλες ιδιότητες δεν μας ενδιαφέρουν. Κάθε φορά βρίσκουμε ένα πέρασμα και πηγαίνουμε προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση.



Εικόνα 17.  
Λαβύρινθος.

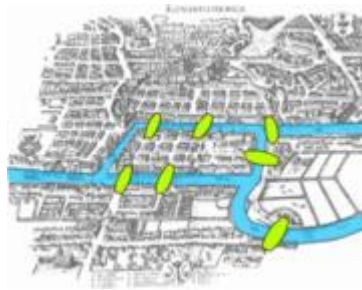


Εικόνα 18.  
Διαδρομές και περάσματα λαβυρίνθου.

- Στη θέση αυτού του σχήματος βάζουμε το ακόλουθο, το οποίο δίνει σαφέστερη εικόνα του προβλήματος που μελετάμε:

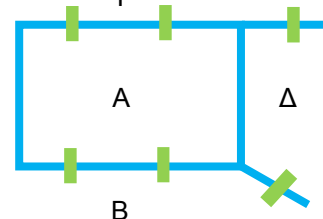
# Τοπολογική Προσέγγιση (3)

- Η μελέτη αυτή άρχισε με τον Euler L. (1735) και το πρόβλημα με τις γέφυρες του Königsberg. Η πόλη αυτή διασχίζονταν από ένα ποταμό που τη χώριζε σε μέρη και ενώνονταν με επτά γέφυρες.



Εικόνα 19. Οι επτά γέφυρες του Königsberg.

- Ο Euler ισχυρίσθηκε πως δεν μπορεί κανείς να βαδίσει γύρω από την πόλη χωρίς να περάσει δύο φορές από κάποια γέφυρα. Ένα διάγραμμα με τη μορφή δικτύου μπορεί να αντιμετωπίσει το πρόβλημα.



Εικόνα 20. Διάγραμμα δικτύου.





# Τοπολογική Γεωμετρία (3)

- Τα γραφήματα και τα δίκτυα προκύπτουν από την τοπολογική θεώρηση του χώρου, δηλαδή τα χαρακτηριστικά που δεν σχετίζονται ούτε με το σχήμα ούτε με το μέγεθος.
- Τα χαρακτηριστικά αυτά, όπως τα σύνορα, οι κόμβοι αποτελούν τα στοιχεία που μας ενδιαφέρουν σε καταστάσεις όπως:
  - οι δρόμοι ή οι διαδρομές.
  - τα κυκλώματα.
  - τα δίκτυα.
- Ένα **δίκτυο** αποτελείται από σημεία και τόξα και είναι μεγάλης χρησιμότητας όταν ενδιαφερόμαστε για συνδέσεις ανάμεσα στα σημεία.



Εικόνα 21. Δίκτυο.



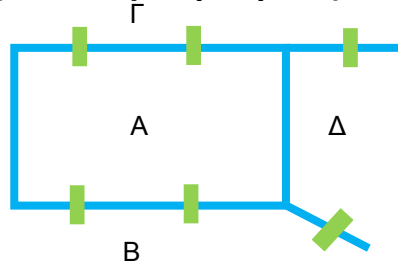
# Τοπολογικές εφαρμογές (1)

- Σε ένα δίκτυο, ένα σημείο ονομάζεται **άρτιο** όταν σε αυτό καταλήγει **άρτιος αριθμός** από τόξα και **περιττό** όταν σε αυτό καταλήγει περιττός αριθμός.
- Στο πρόβλημα με τις γέφυρες όλα τα σημεία είναι **περιττά**. Το γεγονός ότι δεν θα περάσει κανείς δύο φορές από το ίδιο σημείο σημαίνει ότι όσα τόξα έρχονται τόσα τόξα φεύγουν άρα το σημείο είναι άρτιο.
- Σε ένα δίκτυο που το διασχίζει κανείς χωρίς να περάσει δύο φορές από το ίδιο σημείο είτε πρέπει να είναι όλα τα σημεία άρτια, είτε να υπάρχουν μόνο δύο περιττά σημεία, το σημείο εκκίνησης και το σημείο κατάληξης της διαδρομής.

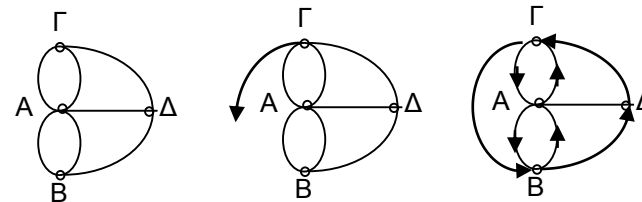


# Τοπολογικές εφαρμογές (2)

- Στο διάγραμμα που δημιουργούμε για το πρόβλημα του Euler όλα τα σημεία είναι περιττά και άρα από κάποια θα περάσουμε αναγκαστικά δύο φορές.
- Όταν το 1875 κτίστηκε στο Königsberg μία ακόμα γέφυρα ο Euler απέδειξε ότι τώρα το πρόβλημα λύνονταν γιατί έτσι από μενταν μόνο δύο σημεία περιττά. Στο σχήμα που ακολουθεί με σημεία παρουσιάζονται οι περιοχές και με τόξα οι γέφυρες.



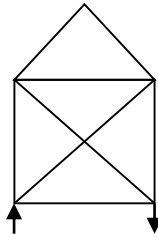
Εικόνα 22. Διάγραμμα Euler.



Εικόνα 23. Απεικόνιση προβλήματος με σημεία και τόξα.



# Τοπολογικές εφαρμογές (3)



Εικόνα 24.  
Μονοκονδυλιά.

- Αντίστοιχες εφαρμογές μπορούμε να συναντήσουμε στις μονοκονδυλιές. Μπορούμε να σχεδιάσουμε το σχήμα που ακολουθεί χωρίς να περάσουμε δύο φορές από το ίδιο σημείο και χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι;
- Η λύση μιας μονοκονδυλιάς στηρίζεται στα άρτια ή περιττά σημεία. Στο πιο πάνω σχήμα όλα τα σημεία είναι άρτια, εκτός από δύο περιττά που είναι το σημείο εκκίνησης και το σημείο άφιξης.



# Τοπολογική Γεωμετρία (4)

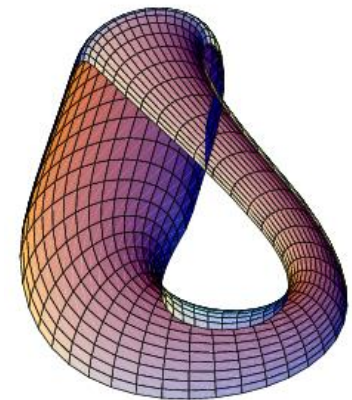
- Η μελέτη του χώρου με βάση τα τοπολογικά χαρακτηριστικά έδωσε ιδιαίτερες προσεγγίσεις συνεχών γραμμών ή επιφανειών όπως είναι η μορφή αυτή **δεσμού Trefoil** ή η **κορδέλα του Mobius** ή το **δοχείο Klein**, σχήματα χωρίς αρχή τέλος, πάνω – κάτω ή μέσα έξω.



Εικόνα 25. Δεσμός Trefoil.



Εικόνα 26. Κορδέλα του Mobius.



Εικόνα 27. Δοχείο Klein.



# Τοπολογικές εφαρμογές (4)

- Ένας λαβύρινθος είναι μια συνεχής κλειστή γραμμή. Για να μπει και να βγει είναι απαραίτητο να είσαι πάντα στο εξωτερικό αυτής της γραμμής.

**Πώς το εξετάζουμε;**

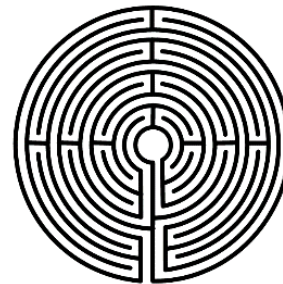
- άρτιος: ίδιο μέρος,
- περιττός διαφορετικά.



Εικόνα 28.  
Λαβύρινθος.



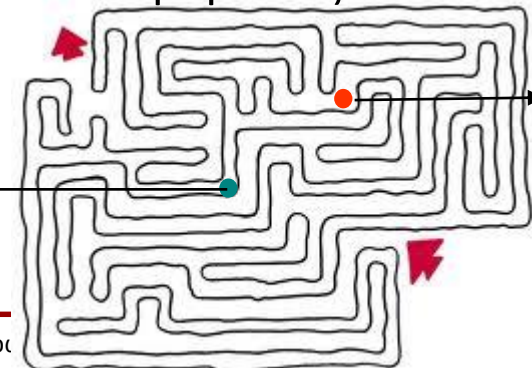
Εικόνα 29. Λαβύρινθος σε εσωτερικό χώρο.



Εικόνα 30.  
Λαβύρινθος.



Εικόνα 31. Εξωτερικός λαβύρινθος στο Λονδίνο.



Εικόνα 32.  
Λαβύρινθος.

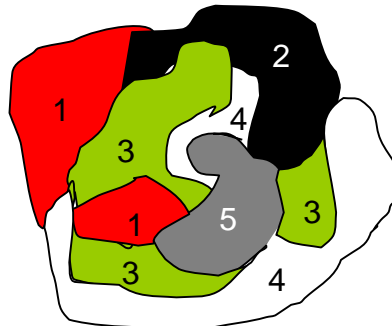


# Τοπολογικές εφαρμογές (5)

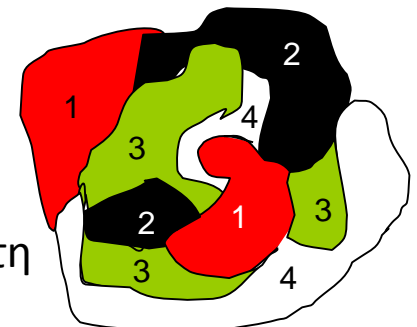
*«Με πόσα χρώματα μπορούμε να χρωματίσουμε το χάρτη του διπλανού σχήματος ώστε δύο γειτονικές περιοχές να μην έχουν το ίδιο χρώμα;»*

- Ο πάνω χάρτης είναι ζωγραφισμένος με 5 χρώματα, μπορεί όμως να χρωματιστεί και με τέσσερα μόνο (κάτω).
- Το πρόβλημα του **χρωματισμού των χαρτών** ήταν ένα σημαντικό ιστορικό πρόβλημα (Εικασία των 4 χρωμάτων) που στηρίζει τη λύση του στα σημεία και κόμβους. Από την πρώτη εποχή του σχεδιασμού των χαρτών οι κατασκευαστές πίστευαν ότι αρκούσαν 4 χρώματα για κάθε χάρτη.
- Αυτό αποτέλεσε ένα μαθηματικό πρόβλημα από το 1840. Η μαθηματική απόδειξη της άποψης αυτής έγινε το 1978 από δύο αμερικανούς με τη βοήθεια υπολογιστών.

Εικόνα 33.  
Χρωματισμός χάρτη  
με 5 χρώματα.



Εικόνα 34.  
Χρωματισμός χάρτη  
με 4 χρώματα.



# Διδακτικές συνέπειες

- Έχει παρατηρηθεί ότι το παιδί από την πιο μικρή ηλικία αντιλαμβάνεται τοπολογικές σχέσεις όπως το μέσα - έξω, τα σύνορα, τη συνέχεια των σημείων, την διαδοχή κ.ά.
- Τις σχέσεις αυτές τις αντιλαμβάνεται στο πλαίσιο της καθημερινότητας και τις εκφράζει με τη καθημερινή γλώσσα και άρα μια τέτοια προσέγγιση **δεν αντιστοιχεί** σε μια μαθηματική αναφορά στην τοπολογία.
- Από τον κλάδο αυτό αντλούμε τις έννοιες και επεξεργαζόμαστε δραστηριότητες που αντιστοιχούν στα μικρά παιδιά: μικροί λαβύρινθοι, κουτσό, παιχνίδια με ανοικτές και κλειστές γραμμές, χρωματισμούς σχεδίων, κόμπους.





# Διδακτικές προτάσεις (1)

- Ο χωρικός συλλογισμός αναπτύσσεται, αρχικά σε **μη οργανωμένα περιβάλλοντα** όπου επιδιώκεται να ασκηθεί το παιδί να κωδικοποιεί τις θέσεις διάφορων αντικειμένων, να εντοπίζει τις μεταξύ τους σχέσεις και να κρατάει νοερά ίχνη από τις θέσεις και σχέσεις τόσο στον μικρό- όσο και στον μέσο - και μακρο - χώρο.
- Στους **οπτικά οργανωμένους χώρους** όπως τετραγωνισμένα πλαίσια και γενικότερα τα πλέγματα, επιδιώκεται το παιδί να δημιουργεί μια καθοδηγημένη κατεύθυνση από τις δεδομένες γραμμές και να επισημαίνει όπου συναντιούνται.



# Διδακτικές προτάσεις (2)

- Τα στοιχεία αυτά αναπτύσσει το παιδί βαθμιαία καθώς είναι σε θέση - σύμφωνα με τα ερευνητικά αποτελέσματα – να πετύχει μέσα από την κατάλληλη διαδρομή ανάπτυξης (από 5-7 χρόνων) στα εξής αποτελέσματα:
  - Δημιουργεί αλλοκεντρικά συστήματα αναφοράς που βαθμιαία βελτιώνει ώστε να είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται τη γενική εικόνα μιας χωρικής διευθέτησης.
  - Βελτιώνει σταδιακά τις πραγματικές και νοερές παραστάσεις για τις χωρικές διευθετήσεις.
  - Δομεί βαθμιαία το χώρο πρακτικά και νοερά και χρησιμοποιεί κάποιες μορφές συντεταγμένων.



# Δραστηριότητες (1)

- **Ξέρω που είμαι:** Κάθε ομάδα παιδιών που παίζει ορίζει μια διευθέτηση των μελών της στο χώρο. Τα υπόλοιπα παιδιά επιλέγουν κρυφά ένα παιδί από τη διάταξη και περιγράφουν τη θέση του. Η ομάδα από την οποία επιλέγουν το παιδί πρέπει να εντοπίσει ποιο παιδί είναι.

Η περιγραφή της θέσης γίνεται μόνο με εκφράσεις του τύπου «μπρος – πίσω», «δεξιά – αριστερά». Υπάρχει περιορισμένος αριθμός εξηγήσεων (μπορούν αν δώσουν, για παράδειγμα μόνο τρεις εξηγήσεις).

- **Ψάχνω να βρω:** Ένα παιδί βγαίνει από την τάξη. Τα υπόλοιπα παιδιά της ομάδας θα κρύψουν ένα αντικείμενο σε μία θέση και στη συνέχεια καθοδηγούν το παιδί που γυρνάει να το βρει. Δίνεται σημείο εκκίνησης. Η περιγραφή της θέσης γίνεται αποκλειστικά με εκφράσεις του τύπου «μπρος –πίσω», «πάνω- κάτω», «δεξιά – αριστερά».

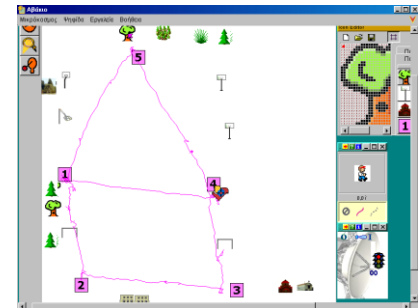
Εικόνα 35.

Δραστηριότητα  
τοποθέτησης και  
προσανατολισμού.



# Δραστηριότητες (2)

- **Θυμάμαι που ήταν:** Μια ομάδα παιδιών σε μια διευθέτηση αλλάζουν θέσεις και οι υπόλοιπες ομάδες καλούνται να βρουν που ήταν αρχικά.
- **Κάνω μια διαδρομή:** Μια ομάδα στο εσωτερικό του σχολείου καθοδηγεί την ομάδα στην αυλή να κινηθεί από τον έναν κώνο στον άλλο που βρίσκονται εκεί δένοντας με κορδέλα τους διαδοχικούς κώνους για να σχηματιστεί στο τέλος ένα σχέδιο (π.χ. σπίτι). Στο τέλος της δραστηριότητας, το σχήμα του ψηφιακού χώρου θα σχηματιστεί και στον πραγματικό χώρο.
- **Κάνω ένα σχέδιο:** Μια ομάδα παιδιών κινείται ελεύθερα σε ένα ορισμένο χώρο και με το σύνθημα σταματά. Ομάδες των υπόλοιπων παιδιών κάνουν ένα σχέδιο για να καταγράψουν που ήταν το κάθε παιδί. Τα παιδιά διαλύουν το σχηματισμό και με βάση το σχέδιο που έκανε η κάθε ομάδα επανατοποθετεί τα παιδιά.

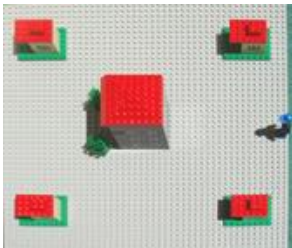


Εικόνα 36. Ψηφιακή δραστηριότητα.

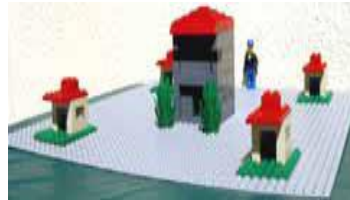


# Δραστηριότητες (3)

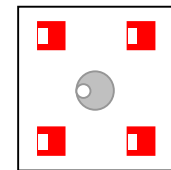
- **Ταχυδρόμοι:** Μια ομάδα παιδιών σε μια διευθέτηση αλλάζουν θέσεις και οι υπόλοιπες ομάδες καλούνται να βρουν που ήταν αρχικά.



Εικόνα 37.  
Ταχυδρόμοι.



Εικόνα 38.  
Ταχυδρόμοι



Εικόνα 39.  
Ταχυδρόμοι.

- **Λαβύρινθοι:** Μία ομάδα παιδιών που έχει το σχέδιο ενός λαβυρίνθου στα χέρια και καθοδηγεί μια άλλη ομάδα παιδιών για την πιο σύντομη διαδρομή.
- **Πιόνια και ναυμαχίες.**
- **Κατασκευές με τουβλάκια.**



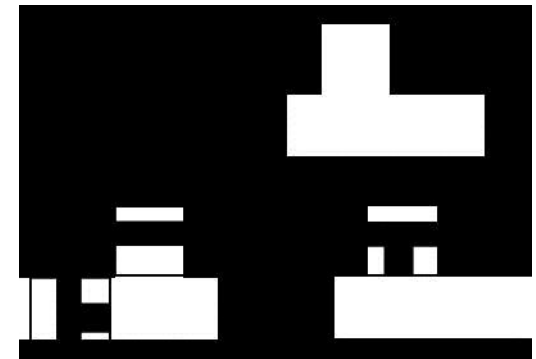
Εικόνα 40.  
Κατασκευή Lego.



# Δραστηριότητες (4)



Εικόνα 41.  
Δραστηριότητα  
με μετακινήσεις  
στο χώρο.



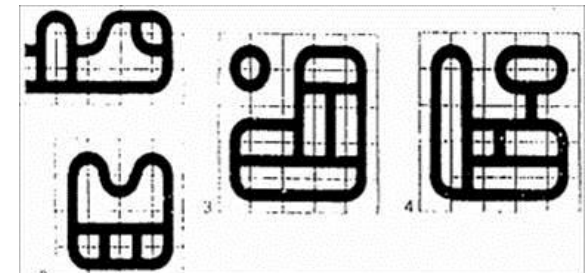
Εικόνα 42. Τοπολογική  
δραστηριότητα.



Εικόνα 43. Ψηφιακή δραστηριότητα Η/Υ.



Εικόνα 44. Δραστηριότητα.



Εικόνα 45. Τοπολογική  
δραστηριότητα.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Προβολική Γεωμετρία, οπτικοποίηση

# Οπτικοποίηση (1)

- Ο χωρικός και γεωμετρικός συλλογισμός συνδέεται στενά με την **οπτικοποίηση ή οπτικοποιημένη σκέψη**.
- Η οπτική πληροφορία απεικονίζεται σε νοερές εικόνες, αρχικά απλές και στατικές και στη συνέχεια πιο σύνθετες και δυναμικές.
- Η **οπτικοποιημένη σκέψη** (μια σκέψη δηλαδή μέσω οπτικών εικόνων) αποτελεί την παραγωγή και το χειρισμό εικονοποιημένων καταστάσεων, είτε
  - για την καταγραφή μιας πληροφορίας,
  - για την αντιμετώπιση της κατάστασης,
  - για την ολοκλήρωση μιας άλλης νοητικής επεξεργασίας.





# Οπτικοποίηση (2)

**Δύο μεγάλες κατηγορίες δράσεων για το παιδί:**

- να ερμηνεύει και να κατανοεί τις **διαφορετικές παραστάσεις** αντικειμένων ή καταστάσεων (που οδηγούν στην δημιουργία νοερών εικόνων) και να είναι σε θέση να τις αντιληφθεί από διαφορετικές οπτικές γωνίες.
- να δημιουργεί **νοερές εικόνες** για αντικείμενα ή καταστάσεις που βρίσκονται έξω από το οπτικό του πεδίο (για γεωμετρικές ή άλλες χωρικές πληροφορίες) ή να επεξεργάζεται νοερά μια κατάσταση που παρατηρεί (όπως πχ. να περιστρέφει νοερά ένα αντικείμενο).



# Διδακτικό περιεχόμενο (3)

Ενθαρρύνεται το παιδί να:

- αναγνωρίζει και αναπαριστά σχήματα ή καταστάσεις από διαφορετικές **οπτικές γωνίες**.
- **κατασκευάζει ή σχεδιάζει τρισδιάστατα σχήματα** και καταστάσεις από δισδιάστατες αναπαραστάσεις (φωτογραφίες, εικόνες ή σχέδια) και το αντίστροφο,
- **κατασκευάζει ή σχεδιάζει** σχήματα και καταστάσεις από μνήμης ή λεκτικές περιγραφές, εφαρμογή σε χάρτες.



# Ιστορική εξέλιξη Προβολικής Γεωμετρίας (1)

- Πριν από τον 15<sup>ο</sup> αιώνα λίγα πράγματα είναι γνωστά για την προοπτική, δηλαδή την τέχνη να κάνουν μια δισδιάστατη εικόνα να φαίνεται τρισδιάστατη.
- Ζωγράφοι όπως ο A. Durer το 1525 μελέτησαν ζητήματα προβολής για τα χρησιμοποιήσουν στη ζωγραφική τους.

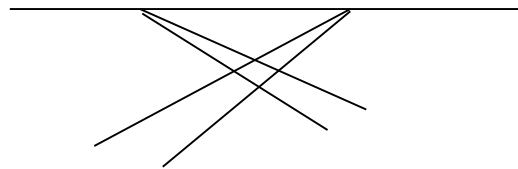


Εικόνα 46.  
Έργο Melencolia.



# Ιστορική εξέλιξη Προβολικής Γεωμετρίας (2)

- Μια πρώτη προσπάθεια για την απόδοση «βάθους» σε ένα σχέδιο είναι αυτό που πραγματοποιείται με την **ευθεία φυγής**.
- Αν κοιτούσαμε με ένα μάτι ένα αντικείμενο από ένα σημείο, τότε όλες οι διαφορετικές κατευθύνσεις θα συναντιόταν σε διαφορετικά σημεία της ευθείας φυγής. Ο τρόπος αυτός αποδίδει ένα δισδιάστατο και όχι ένα τρισδιάστατο αντικείμενο.



Εικόνα 47. Ευθεία φυγής.



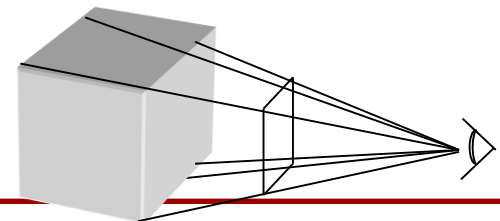
# Προβολική Γεωμετρία (1)

## Γιατί;

- Γιατί το βάθος που εμφανίζεται στο σχήμα οφείλεται στην τομή των ευθειών που στις τρεις διαστάσεις είναι παράλληλες. Οι παράλληλες ευθείες ορίζονται (όπως άλλωστε και ορίζουν) ένα επίπεδο και κατά συνέπεια ο τρόπος αυτός αποδίδει το βάθος σε ένα επίπεδο.
- Η προσέγγιση αυτή δεν καλύπτει όλα τα προβλήματα της προβολής, καθώς οι άνθρωποι βλέπουν με δύο μάτια.
- Όλα τα σημεία ενός αντικειμένου εκπέμπουν ακτίνες φωτός που συγκεντρώνονται στο μάτι. Αν ανάμεσα στις ακτίνες και το μάτι παρεμβάλουμε μια οθόνη, θα σχηματίσουμε πάνω στην οθόνη την προβολή του αντικειμένου.

Εικόνα 48.

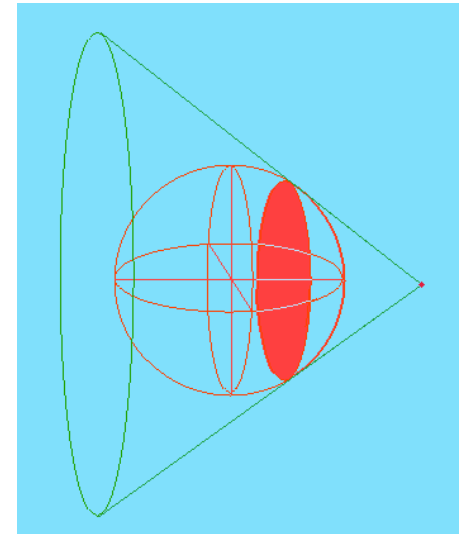
Προβολή αντικειμένου.



# Προβολική Γεωμετρία (2)

Το πρόβλημα επομένως τίθεται αντίστροφα.

- Οι ακτίνες που ξεκινούν από το αντικείμενο, οι προβάλλουσες, θα τμήσουν την οθόνη σε ένα σύνολο σημείων που αποτελούν την **προβολή** ή την **εικόνα** του αντικειμένου πάνω στην οθόνη. Η προβολή αυτή αποτελεί το τρισδιάστατο αντικείμενο απεικονισμένο στις δύο διαστάσεις.

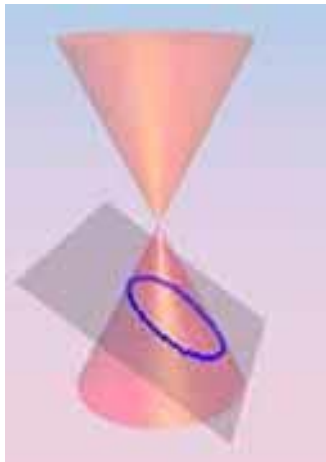


Εικόνα 49. Προβολή τρισδιάστατου αντικειμένου.

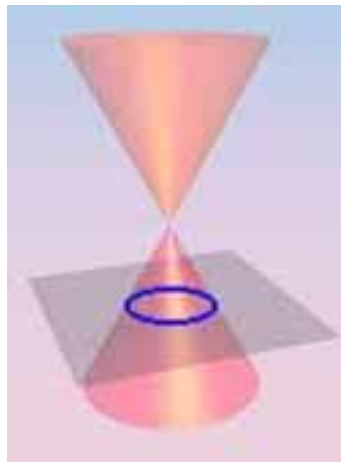


# Προβολική Γεωμετρία (3)

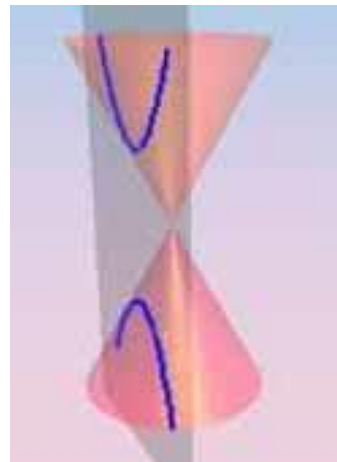
- Για να βρουν κατάλληλους τρόπους απεικόνισης των αντικειμένων, οι ζωγράφοι της Αναγέννησης μελέτησαν τους κανόνες και τις ιδιότητες αυτής της προβολής, οι οποίες σε μεγάλο βαθμό στηρίζονται στις κωνικές τομές. Τις **κωνικές τομές** μελέτησε πρώτος ο Απολλώνιος τον 3ο αιώνα π.Χ.



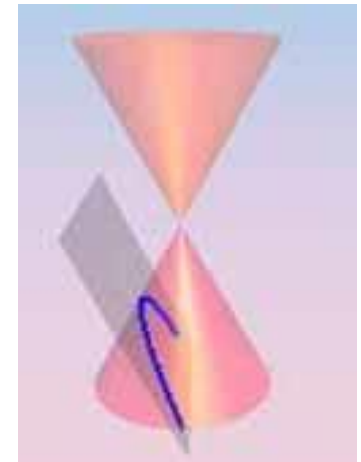
Εικόνα 50. Έλλειψη.



Εικόνα 51. Κύκλοι.



Εικόνα 52. Υπερβολές.

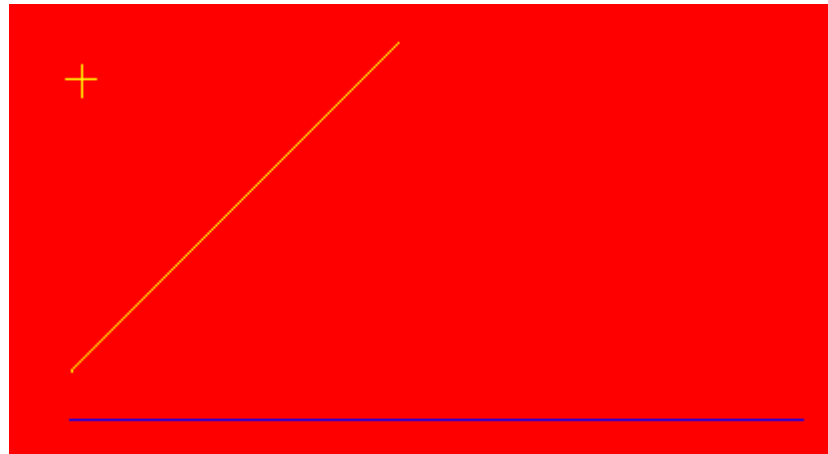


Εικόνα 53. Παραβολή.



# Προβολική Γεωμετρία (4)

- Τις μελέτες του Απολλώνιου στις κωνικές τομές συνέχισε ο γάλλος μαθηματικός G. Desargues, μηχανικός και αρχιτέκτονας του 16ου αιώνα.
- Οι μελέτες δεν αξιοποιήθηκαν παρά μόνο τον 19ο αιώνα, ο γάλλος γεωμέτρης G. Monge ολοκλήρωσε τις προβολές των τρισδιάστατων αντικειμένων. Το έργο του αξιοποιήθηκε στους σχεδιασμούς κατασκευών.

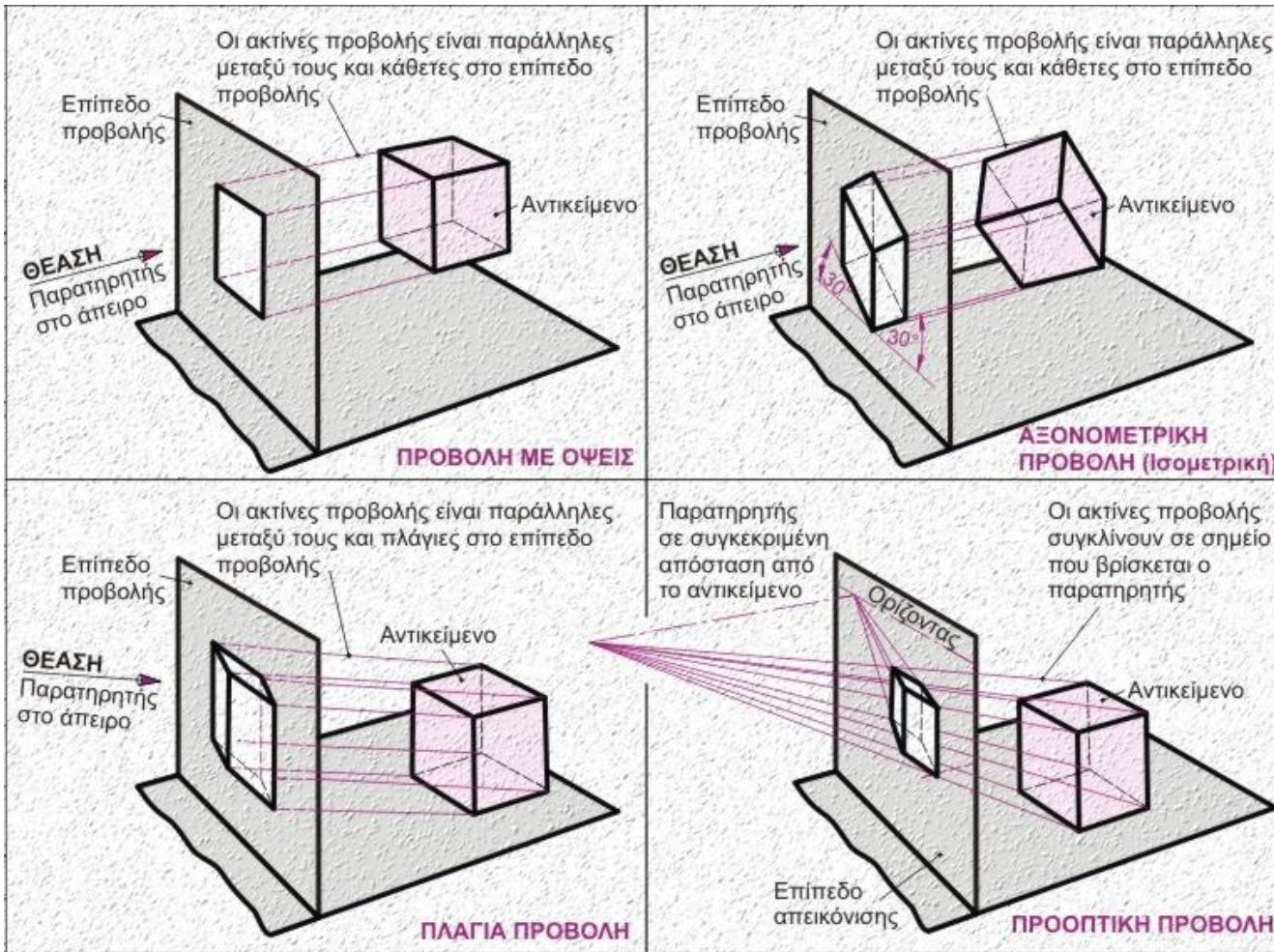


Εικόνα 54. Προβολές τρισδιάστατων αντικειμένων.





# Διάφορες Προβολές

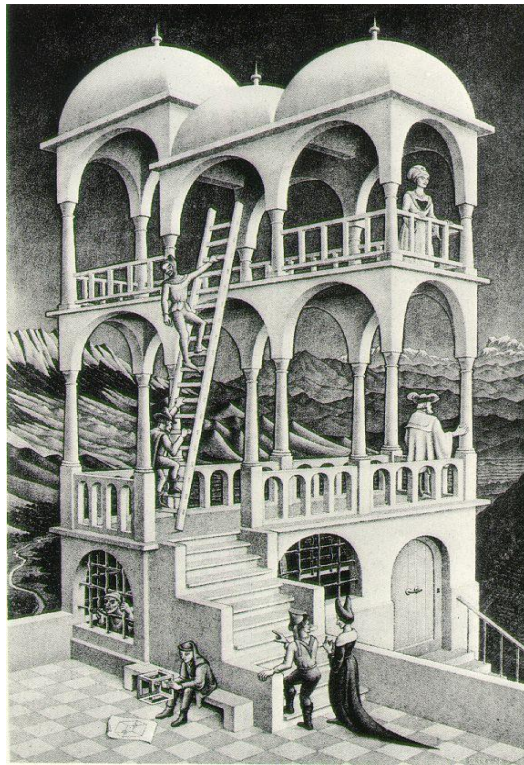


Εικόνα 55.  
Διαφορετικές  
μορφές προβολών.



# Προβολική Γεωμετρία (5)

- Escher: Παιχνίδι με τις διαστάσεις και τις προβολές.



Εικόνα 56. Belvedere.



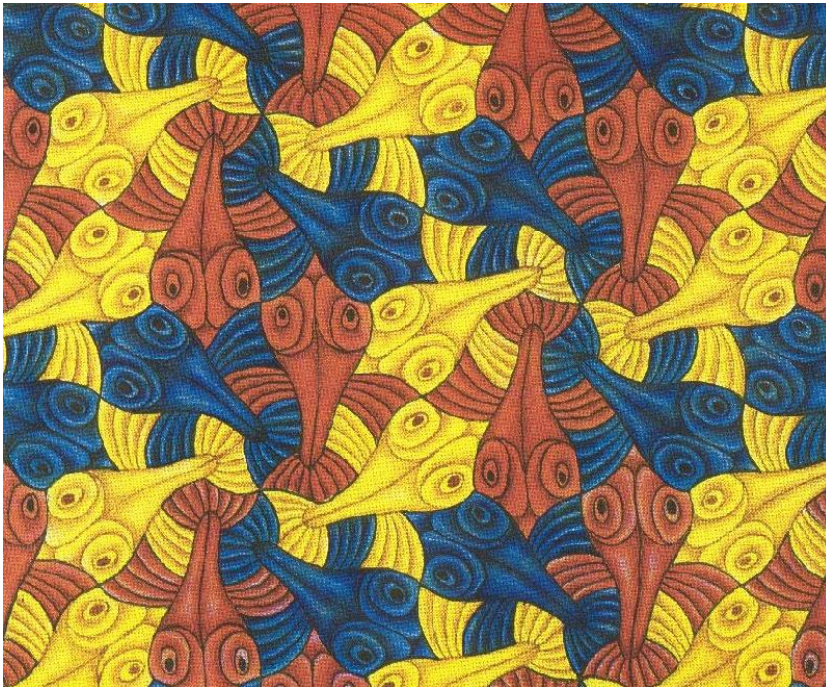
Εικόνα 57. Escher' s Relativity.



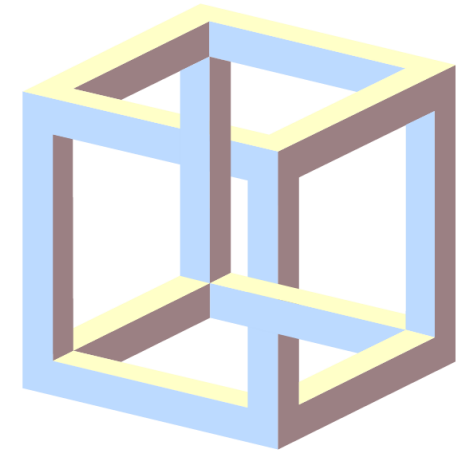


# Προβολική Γεωμετρία (6)

- Escher: Παιχνίδι με τις διαστάσεις και τις προβολές.



Εικόνα 58. Fish.



Εικόνα 59. Impossible cube illusion.



# Διδακτικές κατευθύνσεις (1)

- **Ανάγνωση των χωρικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων:** μετάβαση από το τρισδιάστατο αντικείμενο στην δισδιάστατη αναπαράσταση.
- Ο τρόπος με τον οποίο απεικονίζεται η πραγματικότητα ποικίλει και κάθε μία από τις μορφές απεικόνισης (από την πιο ρεαλιστική φωτογραφία ως το πιο αφηρημένο σχέδιο) έχει τις ιδιαιτερότητες και τους κανόνες της με αποτέλεσμα η ανάγνωση τους να έχει περισσότερες ή λιγότερες δυσκολίες.
- Κάθε μορφής αναπαράσταση αποδίδει την πραγματικότητα από **διαφορετική οπτική γωνία** την οποία και ενθαρρύνουμε το παιδί να αναγνωρίζει.



# Δραστηριότητες (5)

- **Μέσα από την τρύπα:** Κάθε ομάδα κοιτάζει το εσωτερικό ενός κιβωτίου όπου βρίσκεται μία κατασκευή από μία από τις 4 τρύπες που βρίσκονται γύρω. Πρέπει να εξηγήσουν στη συνέχεια ποια όψη της κατασκευής βλέπουν (να τη δείξουν σε μία άλλη κατασκευή που είναι έξω ή να την αναγνωρίζουν σε μια φωτογραφία).
- **Από πού τραβήχτηκε η φωτογραφία;** Κάποιες ομάδες-φωτογράφοι τραβούν φωτογραφίες στην τάξη, την αυλή ή σε άλλο υλικό. Οι άλλες ομάδες πρέπει να βρουν από πού τραβήχτηκε η φωτογραφία και να τραβήξουν και οι ίδιοι για να συγκρίνουν.
- **Που να κρυφτεί να μην το βλέπουν:** Σε διατάξεις ή φωτογραφίες δύο ζωάκια ή αντικείμενα είναι σε κάποιες θέσεις μπορούν να δω το ένα το άλλο και σε κάποιες όχι. Τα παιδιά βρίσκουν τις θέσεις.



Εικόνα 60.  
Δραστηριότητα.



# Δραστηριότητες (6)

- **Κάνω ότι βλέπω:** Τα παιδιά ανακατασκευάζουν καταστάσεις από φωτογραφίες, εικόνες ή σχέδια.

Εικόνα 62. Ανακατασκευές.



Εικόνα 61.  
Ανακατασκευές.



- **Κάνουμε τα πορτρέτα μας:**

Τα παιδιά σχεδιάζουν σε λευκό χαρτί το περίγραμμα από τη σκιά που κάνουν τα πρόσωπά τους όταν φωτίζονται από ένα επικεντρωμένο φως.

- **Puzzle όψεων:** Τα παιδιά ανασυνθέτουν ένα puzzle που παριστά μία- μία τις όψεις μιας τρισδιάστατης κατάστασης.
- **Ζωγραφίζω ότι βλέπω:** Τα παιδιά παρατηρούν μια κατασκευή και μετά τη ζωγραφίζουν.
- **Θυμάμαι πως ήταν:** Ζωγραφίζουν και από μνήμης.



Εικόνα 63. Puzzle όψεων.

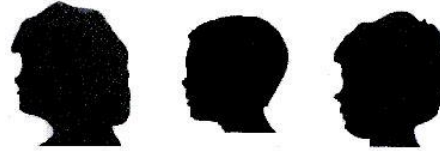




# Δραστηριότητες (7)



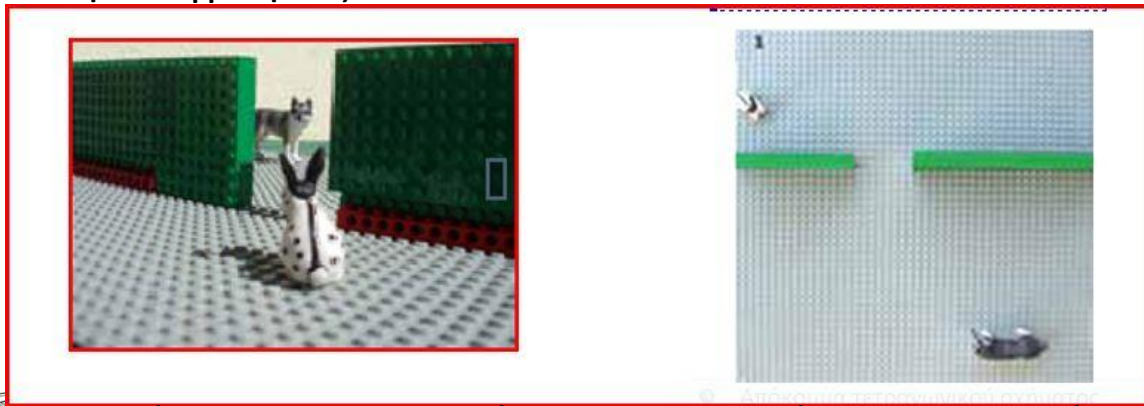
Εικόνα 64. Δραστηριότητα φωτογραφίας.



Εικόνα 65. Δραστηριότητα με σκιές.



Εικόνα 66. Δραστηριότητα οπτικοποίησης.



Εικόνα 67. Δραστηριότητα οπτικοποίησης - κρυφτό.



Εικόνα 68. Δραστηριότητα συναγερμός.



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Γεωμετρικά Σχήματα και συλλογισμός



# Γεωμετρικός συλλογισμός

- Ο γεωμετρικός συλλογισμός αφορά την οργάνωση και επεξεργασία του βιωμένου χώρου στη βάση του γεωμετρικού μοντέλου.
- Η ανάπτυξη γεωμετρικής σκέψης συνδέεται με ένα πέρασμα από μια γενικότερη οπτική αντίληψη μορφών σε μια αναλυτικό - συνθετική αντίληψη γεωμετρικών σχημάτων και την αλληλοσύνδεση οπτικού, λεκτικού και αφηρημένου.



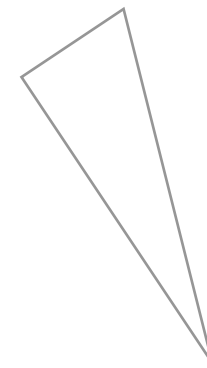
# Σημασία ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού (1)

- Το παιδί δεν περιορίζεται στην ονομασία των σχημάτων αλλά αναπτύσσει σημαντική **γεωμετρική δράση**:
  - με κατασκευές και άτυπη περιγραφή ιδιοτήτων και σχέσεων κατασκευάζει.
  - συγκρίνει και κατηγοριοποιεί τα σχήματα,
  - μετασχηματίζει, αναλύει και συνθέτει τα σχήματα.
- Αντίστοιχα και με τα τρισδιάστατα σχήματα.



# Σημασία ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού (2)

- Ανάγκη δημιουργίας και εφαρμογής δραστηριοτήτων με μια ποικιλία σχημάτων σε διαφορετικές θέσεις, μεγέθη και προσανατολισμούς που βοηθούν τα παιδιά να αναζητήσουν χαρακτηριστικά και να μην μείνουν σε ολιστικά πρωτοτυπικά σχήματα.
  - Εκπαιδευτικός (δείχνοντας ένα αντεστραμμένο τρίγωνο): *Και τι είπες ότι πρέπει να έχει ένα τρίγωνο;*
  - Παιδί: *Τρεις γωνίες και αυτό έχει τρεις γωνίες.*
  - Εκπαιδευτικός: *Λοιπόν...*
  - Παιδί: *Δεν είναι τρίγωνο. Είναι ανάποδο!*

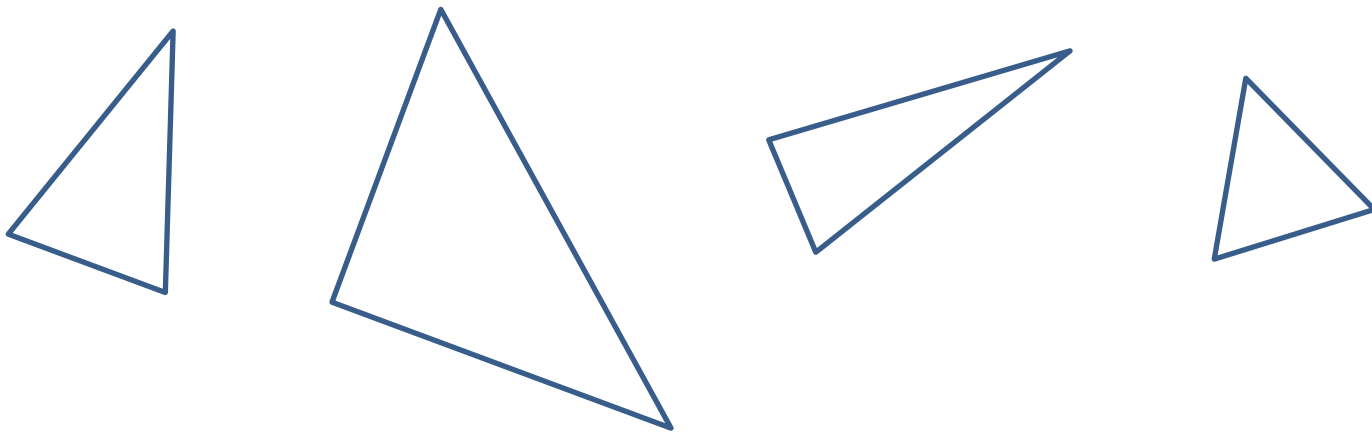


Εικόνα 69. Αντεστραμμένο τρίγωνο.



# Σημασία ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού (3)

- Ανάγκη δημιουργίας και εφαρμογής δραστηριοτήτων που εμπλέκει τα παιδιά σε κατηγοριοποιήσεις σχημάτων της ίδιας μορφής (τρίγωνα και τετράπλευρα) ώστε εμβαθύνουν περισσότερο από τη γενική αντίληψη (τρεις πλευρές, τρεις κορυφές) χαρακτηριστικά.



Εικόνα 70. Κατηγοριοποίηση σχημάτων.

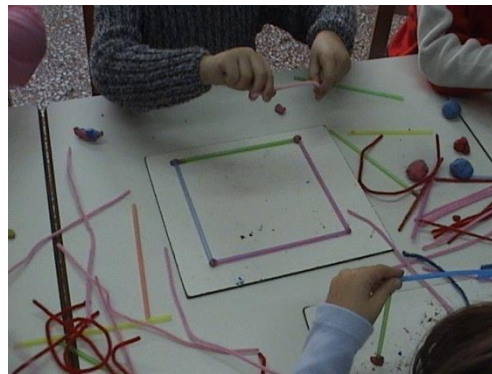


# Σημασία ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού (4)

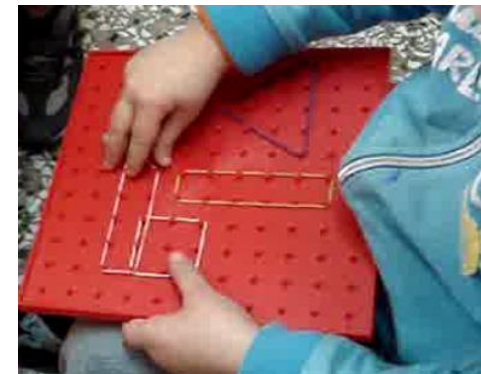
- Ανάγκη ενασχόλησης των παιδιών με κατασκευές με τη βοήθεια διάφορων μέσων που τους επιτρέπουν να προσεγγίσουν διαφορετικές όψεις των αντικειμένων αλλά και αναλυτικής συζήτησης πάνω σε αυτές τις κατασκευές που θα τους επιτρέπουν να συστηματοποιήσουν αυτή τη δράση.



Εικόνα 71. Κατασκευή με πινέζες.



Εικόνα 72. Κατασκευή με καλαμάκια.



Εικόνα 73. Κατασκευή στο γεωπλάνο.

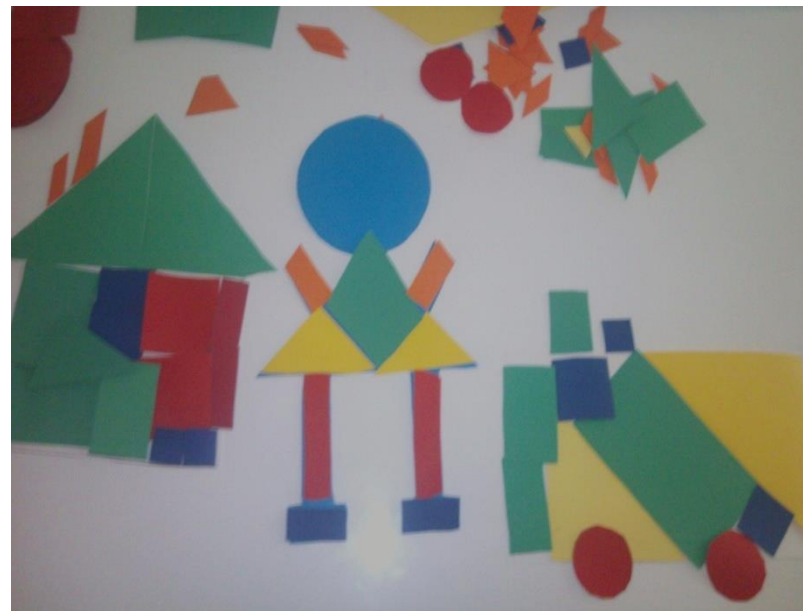


# Σημασία ανάπτυξης γεωμετρικού συλλογισμού (5)

- Ανάγκη ενασχόλησης των παιδιών με συστηματικές αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων που τους επιτρέπουν να προσεγγίσουν ιδιότητες και σχέσεις.



Εικόνα 74. Δραστηριότητα με συνθέσεις σχημάτων.



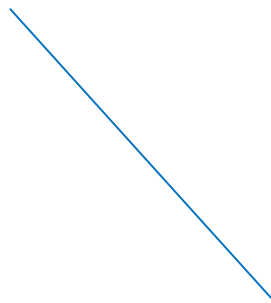
Εικόνα 75. Δραστηριότητα με αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων.

# Ευκλείδεια Γεωμετρία – αποσαφηνίσεις

- Η Γεωμετρία αυτή στηρίζεται στην ανάλυση όλων των μορφών στις βασικές γεωμετρικές έννοιες:
  - το σημείο,
  - την ευθεία και
  - το επίπεδο.
- Ανάμεσα τους περιγράφει **θεμελιώδεις σχέσεις**:



Εικόνα 76. Σημείο.



Εικόνα 77. Ευθεία.



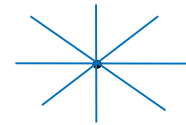
Εικόνα 78. Επίπεδο.



# Ευκλείδεια Γεωμετρία

- Βασικές σχέσεις:

1. Από κάθε σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες.



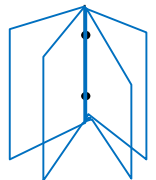
Εικόνα 79.  
Αναπαράσταση.

2. Από δύο σημεία διέρχεται μία και μόνο ευθεία.



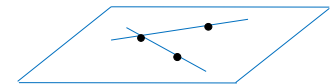
Εικόνα 80.  
Αναπαράσταση.

3. Από δύο σημεία (άρα από μία ευθεία) διέρχονται άπειρα επίπεδα.



Εικόνα 81.  
Αναπαράσταση.

4. Από τρία σημεία (άρα από δύο τεμνόμενες ευθείες ή μία ευθεία και ένα σημείο) διέρχεται ένα και μόνο επίπεδο.



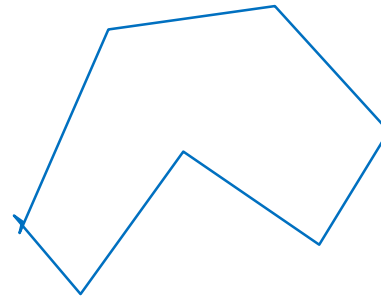
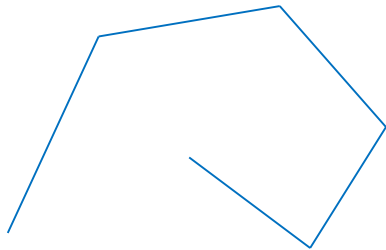
Εικόνα 82.  
Αναπαράσταση.





# Ευκλείδεια Σχήματα (1)

- **Επίπεδη πολυγωνική γραμμή** ονομάζουμε μια απλή επίπεδη καμπύλη που αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο διαδοχικών συνεπίπεδων ευθυγράμμων τμημάτων, όπου δύο οποιαδήποτε διαδοχικά δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία.
- **Απλό πολύγωνο** ονομάζεται κάθε κλειστή επίπεδη πολυγωνική γραμμή.



Εικόνα 83. Πολυγωνική γραμμή. Εικόνα 84. Απλό πολύγωνο.



# Ευκλείδεια Σχήματα (2)

- **Τρίγωνο** ονομάζεται το πολύγωνο που ορίζεται από τρία διακεκριμένα μη συνευθειακά σημεία.
- **Τετράπλευρο** ονομάζεται το πολύγωνο που αποτελείται από τέσσερα συνεπίπεδα ευθύγραμμα τμήματα.
- **Πεντάγωνο** το πολύγωνο που αποτελείται από πέντε συνεπίπεδα ευθύγραμμα τμήματα.
- **Εξάγωνο, επτάγωνο, οκτάγωνο...**

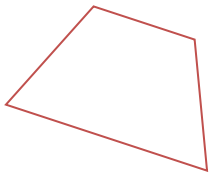
Στα σχήματα εντάσσεται και ο

- **Κύκλος** ως το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα συγκεκριμένο σημείο, το κέντρο του κύκλου.



# Ευκλείδεια Σχήματα (3)

- Τα τετράπλευρα κατηγοριοποιούνται ως προς τις ακόλουθες ιδιότητες:
  - **Τραπέζιο**, δύο πλευρές παράλληλες.
  - **Παραλληλόγραμμο**, απέναντι πλευρές παράλληλες.
  - **Ορθογώνιο**, παραλληλόγραμμο με μία γωνία ορθή.
  - **Ρόμβος**, παραλληλόγραμμο με όλες τις πλευρές ίσες.
  - **Τετράγωνο**, ορθογώνιο και ρόμβος.



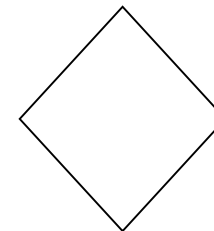
Εικόνα 85.  
Τραπέζιο.



Εικόνα 86.  
Παραλληλόγραμμο.



Εικόνα 87.  
Ορθογώνιο.



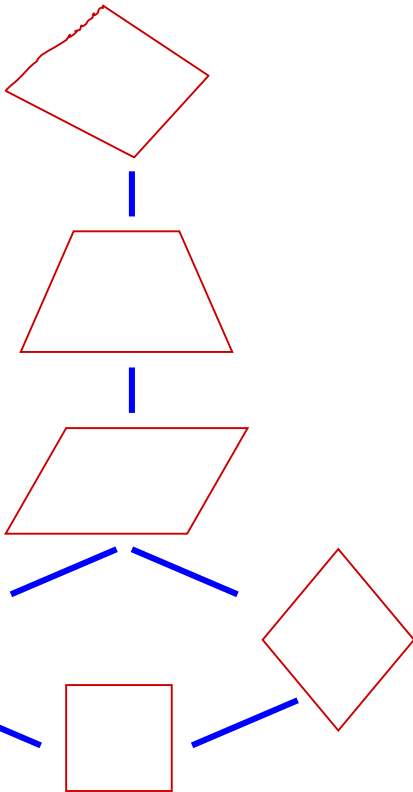
Εικόνα 88.  
Ρόμβος.



Εικόνα 89.  
Τετράγωνο.

# Ευκλείδεια Σχήματα (4)

- Δημιουργείται ένα δένδρο με βάση τις ιδιότητες.



Εικόνα 90.  
Δένδρο.

- 4 πλευρές.
- 4 πλευρές, 2 παράλληλες.
- 4 πλευρές, απέναντι παράλληλες.
- 4 πλευρές, απέναντι παράλληλες, γωνία ορθή.
- 4 πλευρές, απέναντι παράλληλες, πλευρές ίσες.
- 4 πλευρές, απέναντι παράλληλες, γωνία ορθή, πλευρές ίσες.



# Ευκλείδεια Σχήματα (5)

- Τα στερεά σχήματα κατηγοριοποιούνται σε δύο μεγάλες ομάδες:
  - I. Τα στερεά με επίπεδες επιφάνειες, τα **πολύεδρα**, και
  - II. Τα στερεά με καμπύλες επιφάνειες ή στερεά **ΕΚ περιστροφής**.



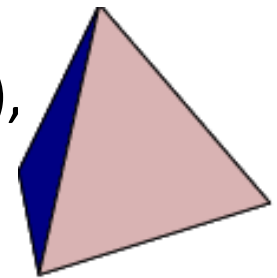
# Ευκλείδεια Σχήματα (6)

- Πολυεδρική επιφάνεια ονομάζουμε κάθε επιφάνεια που αποτελείται από κυρτά πολύγωνα τα οποία ανά δύο βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα.
- Τα πολύγωνα ονομάζονται έδρες της πολυεδρικής επιφάνειας, οι πλευρές των εδρών ονομάζονται ακμές και τα άκρα των ακμών κορυφές.
- Μια πολυεδρική επιφάνεια ονομάζεται κλειστή αν κάθε ακμή ανήκει σε δύο έδρες.
- Πολύεδρο ονομάζεται κάθε κλειστή πολυεδρική επιφάνεια. Το τετράεδρο είναι το πολύεδρο με το μικρότερο αριθμό εδρών – τέσσερις - του οποίου οι έδρες είναι τρίγωνα.

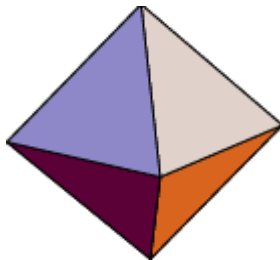


# Ευκλείδεια Σχήματα (7)

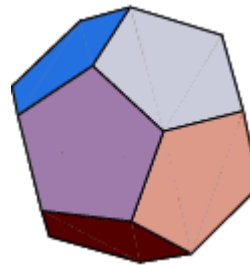
- Αν όλες οι έδρες του πολυέδρου είναι ίσα μεταξύ τους κανονικά πολύγωνα τότε το πολυέδρο ονομάζεται κανονικό.
- Έχουμε πέντε είδη κανονικών πολυέδρων:
  - το κανονικό τετράεδρο (έδρες τρίγωνα),
  - τον κύβο (κανονικό εξάεδρο, έδρες τετράγωνα),
  - το κανονικό οκτάεδρο (έδρες τρίγωνα),
  - το κανονικό δωδεκάεδρο (έδρες πεντάγωνα),
  - το κανονικό εικοσάεδρο (έδρες τρίγωνα).



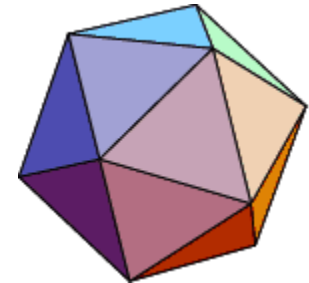
Εικόνα 91. Τετράεδρο.



Εικόνα 92. Οκτάεδρο.



Εικόνα 93. Δωδεκάεδρο.



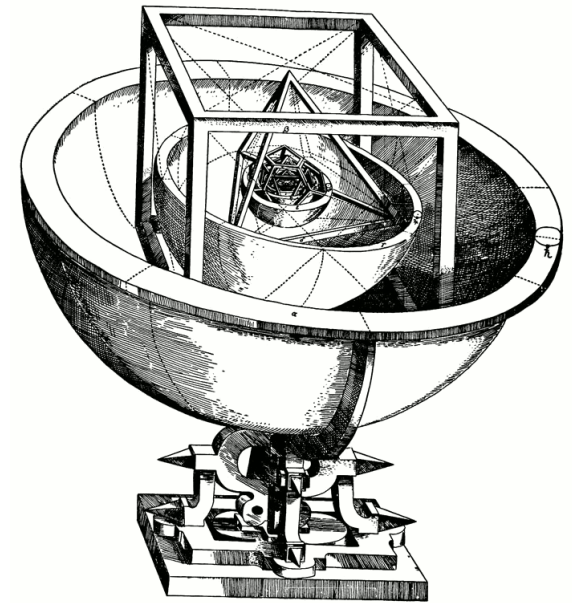
Εικόνα 94. Εικοσάεδρο.





# Ευκλείδεια Σχήματα (8)

- Τα πέντε κανονικά πολύεδρα ονομάζονται πλατωνικά σώματα, καθώς ο Πλάτων είναι ο πρώτος που τα ορίζει.
- Τα αντιστοιχεί επίσης με τα βασικά στοιχεία της φύσης: το πυρ, τη γη, τον αέρα, το νερό, και το Σύμπαν.
- Πολλοί επιστήμονες και καλλιτέχνες τα χρησιμοποιούν στο έργο τους.
- Ο Κέπλερ στηρίζει σε αυτά τον υπολογισμό των αποστάσεων στο ηλιακό σύστημα.

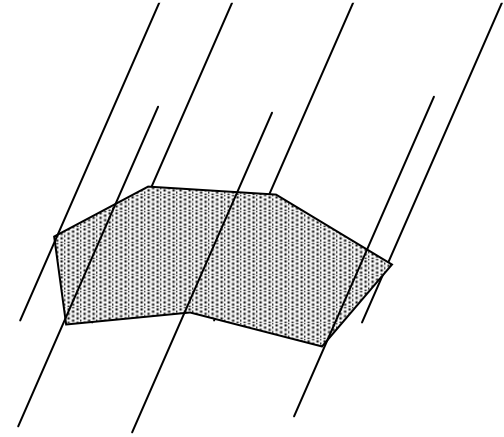


Εικόνα 95. Υπολογισμός των αποστάσεων στο ηλιακό σύστημα – Κέπλερ.

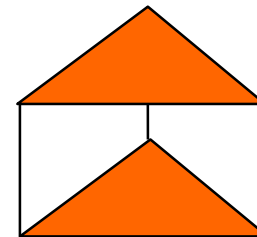


# Ευκλείδεια Σχήματα (9)

- Τα στερεά χωρίς κορυφή και με έδρες παραλληλόγραμμα προέρχονται από μία **πρισματική επιφάνεια** δηλαδή μια επιφάνεια που παράγεται όταν μια ευθεία γραμμή κινηθεί παράλληλα με τον εαυτό της ακολουθώντας μια γραμμή οδηγό.
- **Πρίσμα** λέγεται το πολύεδρο που ορίζεται από δύο παράλληλες τομές μιας πρισματικής επιφάνειας. Οι δύο αυτές τομές ονομάζονται βάσεις του πρίσματος.
- Το πρίσμα λέγεται τριγωνικό, τετραγωνικό κλπ. ανάλογα αν η βάση του είναι τρίγωνο τετράγωνο κλπ.



Εικόνα 96. Πρισματική επιφάνεια.

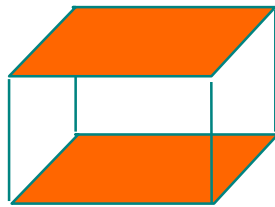


Εικόνα 97. Πρίσμα.

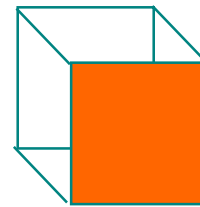


# Ευκλείδεια Σχήματα (10)

- **Παραλληλεπίπεδο** ονομάζεται κάθε τετραγωνικό πρίσμα που οι πλευρές του και οι βάσεις του είναι παραλληλόγραμμα.
- Όταν οι πλευρές και οι βάσεις είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα το παραλληλόγραμμα ονομάζεται ορθογώνιο.
- Αν επιπλέον οι ακμές του είναι ίσες το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο είναι κύβος.



Εικόνα 98. Παραλληλόγραμμα.

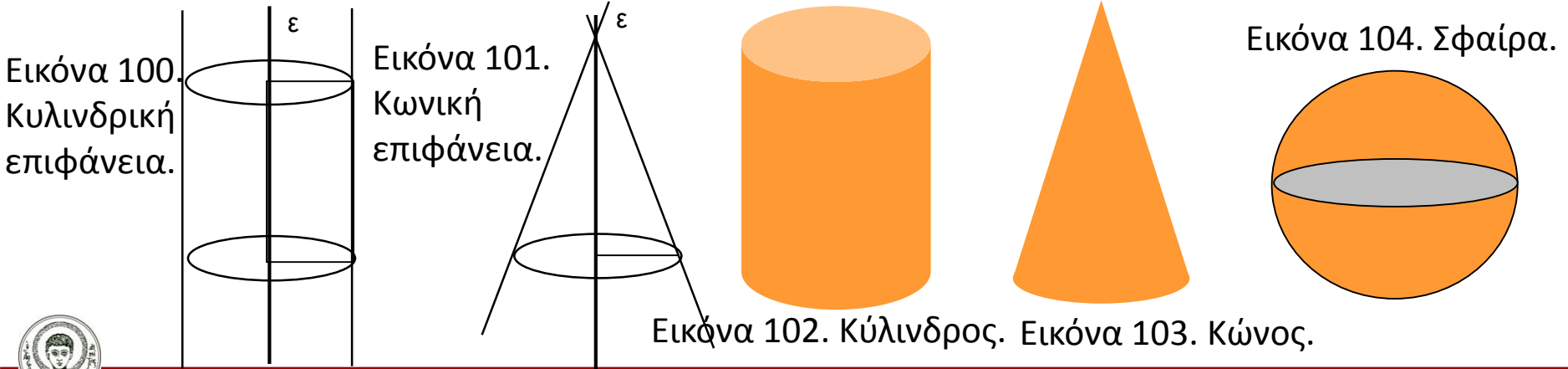


Εικόνα 99. Κύβος.



# Ευκλείδεια Σχήματα (11)

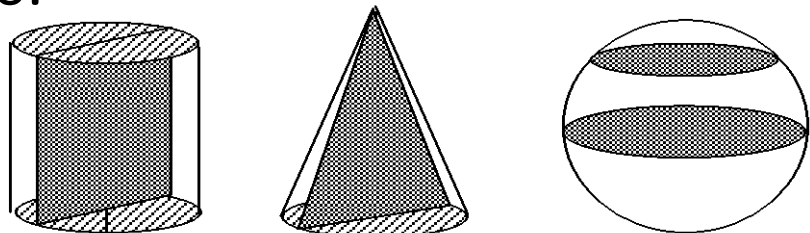
- **Επιφάνεια εκ περιστροφής** ονομάζεται η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή μιας ευθείας γραμμής.
- Όταν ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος με την ευθεία η επιφάνεια που παράγεται ονομάζεται κυλινδρική.
- Όταν ο άξονας τέμνει την ευθεία η επιφάνεια ονομάζεται κωνική.
- Οι τομές μιας κυλινδρικής ή μιας κωνικής επιφάνειας από επίπεδα σχηματίζει αντίστοιχα κυλίνδρους ή κώνους.



# Ευκλείδεια Σχήματα (12)

- Οι σχέσεις των επίπεδων και στερεών σχημάτων καθορίζονται από τα πολύγωνα σχήματα που εμφανίζονται στις πλευρές των στερεών όπως και στις τομές τους από επίπεδα.
- Αν τμήσουμε με ορθό τρόπο (δηλαδή με ένα επίπεδο κάθετο προς τις έδρες) ένα κύβο ή ένα ορθογώνιο οι τομές θα είναι τετράγωνα ή ορθογώνια.
- Αλλά αν τμήσουμε με ένα εγκάρσιο επίπεδο ένα κύλινδρο ή ένα κώνο οι τομές θα είναι ορθογώνια ή τρίγωνα.
- Κάθε τομή σφαίρας είναι κύκλος με μέγιστο την τομή που διέρχεται από μία διάμετρο.

Εικόνα 105. Απεικόνιση τομής κυλίνδρου, κώνου και σφαίρας.



# Διδακτικές κατευθύνσεις (2)

- Αναπτύσσονται 5 ομάδες δραστηριοτήτων για 2Δ και 3Δ σχήματα:
  - Ανάγνωση κι ονομασία τους.
  - Κατασκευές για προσέγγιση ιδιοτήτων.
  - Ανάλυση και σύνθεση σχημάτων για προσέγγιση σχέσεων.
  - Κατηγορίες των κατηγοριών σχημάτων.
  - Σύνδεση 2Δ και 3Δ σχημάτων.



# Δραστηριότητες (8)

- **Ξέρω το σχήμα τους:** Τα παιδιά σε ομάδες ομαδοποιούν μια ποικιλία επίπεδων αντικειμένων ως προς την μορφή. Ονομάζουν τις κλάσεις με το όνομα του σχήματος που έχουν.
- **Ξέρω τα σχήματα:** Τα παιδιά σε ομάδες αναζητούν από μια μεγάλη ποικιλία σχημάτων με διάφορα μεγέθη και προσανατολισμούς συγκεκριμένα σχήματα (πχ. τρίγωνα) με βάση ένα σύνθημα.
- **Βρες τον κανόνα μου:** Μια ομάδα παιδιών διαχωρίζει από ένα σύνολο σχημάτων κάποια με βάση ένα κανόνα. Για παράδειγμα, μια ομάδα σχήματα με τέσσερις πλευρές. Οι ομάδες πρέπει να βρουν τον κανόνα με τον οποίο γίνεται ο χωρισμός.





# Δραστηριότητες (9)

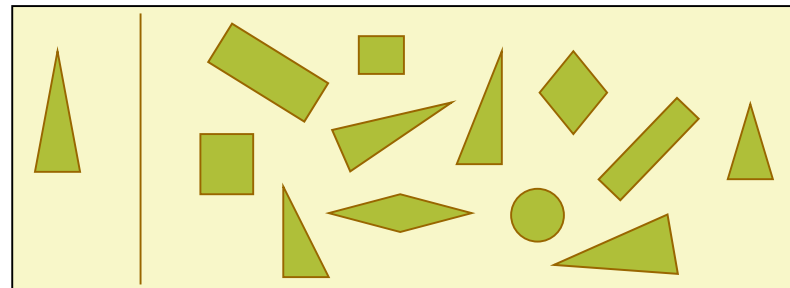
- **Ποιο σχήμα είναι:** Τα παιδιά επιλέγουν από μία μεγάλη συλλογή το σχήμα που ταιριάζει με ένα που επιδεικνύεται σε μια συγκεκριμένη θέση συγκρίνοντας μορφή, μέγεθος και προσανατολισμό.



Εικόνα 106.  
Παράδειγμα.



Εικόνα 107.  
Παράδειγμα.



Εικόνα 108.  
Παράδειγμα.

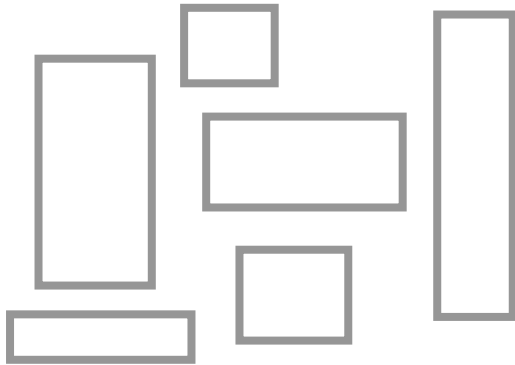


# Δραστηριότητες (10)

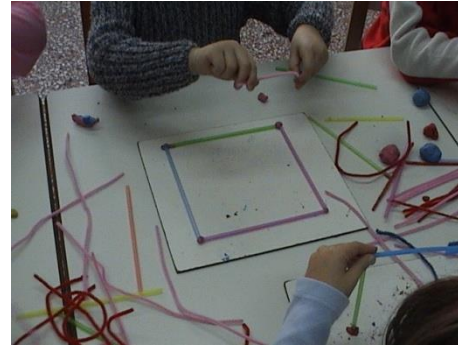
- **Ξέρω πώς γίνεται:** Τα παιδιά δουλεύουν ατομικά και σχηματίζουν ένα- ένα τα βασικά σχήματα ακολουθώντας ένα πρότυπο ή χωρίς αυτό και με διάφορα υλικά.
- **Ξέρω πώς είναι τα σχήματα:** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Η μία ομάδα περιγράφει ένα σχήμα χωρίς να πει το όνομά του και η άλλη πρέπει να το βρει και να το δείξει
- **Δεν τα βάζω πάντα μαζί:** Τα παιδιά σε ομάδες επιλέγουν από μία μεγάλη συλλογή όμοιων ως προς το γενικό σχήμα αντικειμένων για να οδηγηθούν σε ποιο λεπτομερείς κατηγοριοποιήσεις. Για παράδειγμα τους δίνονται πολλές ορθογώνιες κορνίζες και χρειάζεται να τις οργανώσουν σε ομάδες για μία βιτρίνα. Έτσι συγκρίνουν όχι μόνο τη γενική μορφή αλλά και άλλες ιδιότητες.



# Δραστηριότητες (11)



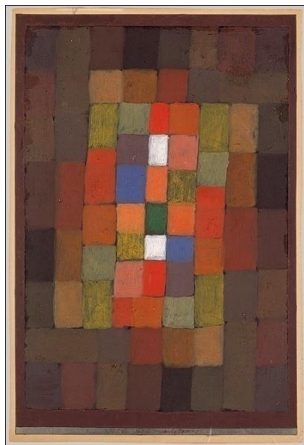
Εικόνα 109. Δραστηριότητα.



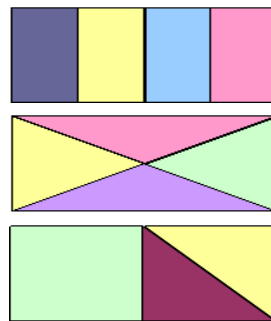
Εικόνα 110. Κατασκευή.



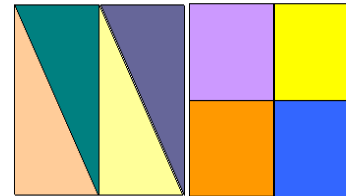
Εικόνα 111. Κατασκευή.



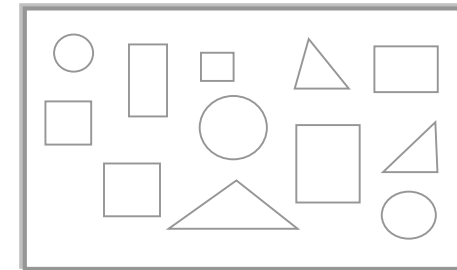
Εικόνα 112. Πίνακας ζωγραφικής με σχήματα.



Εικόνα 113. Σχήματα.

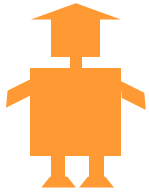


Εικόνα 114. Σχήματα.

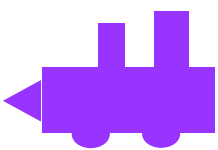


Εικόνα 115. Σχήματα.



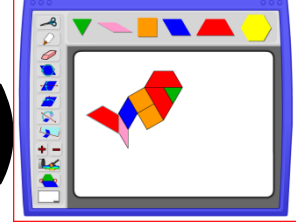


Εικόνα 116.  
Δραστηριότητα.



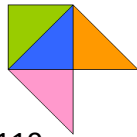
Εικόνα 117.  
Δραστηριότητα.

# Δραστηριότητες (12)



Εικόνα 118. Δραστηριότητα.

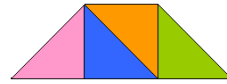
- **Βάζω μαζί σχήματα για να φτιάξω άλλο:** Τα παιδιά δουλεύουν ατομικά και επικαλύπτουν δεδομένα σχήματα ή άλλες μορφές με διαθέσιμα σχήματα σε πολλά μεγέθη και μορφές.
- **Κάνω συνδυασμούς με σχήματα:** Τα παιδιά δημιουργούν διάφορους σχηματισμούς με δεδομένα σχήματα.



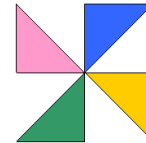
Εικόνα 119.  
Συνδυασμός  
σχημάτων.



Εικόνα 120.  
Συνδυασμός  
σχημάτων.



Εικόνα 121.  
Συνδυασμός  
σχημάτων.



Εικόνα 122. Συνδυασμός  
σχημάτων.

- **Αποτυπώνω:** Τα παιδιά αποτυπώνουν τις έδρες των στερεών γύρω- γύρω με τα μολύβια τους ή βουτούν τα σχήματα σε μπογιά και κάνουν στάμπες.
- **Ταιριάζω:** Έχει προετοιμαστεί μια αφίσα που τοποθετείται στο πάτωμα με έδρες οι βάσεις των στερεών σχημάτων σε μια ποικιλία σε μορφή μέγεθος και προσανατολισμό και τα παιδιά αντιστοιχούν τα σχήματα.



# Δραστηριότητες (13)



Εικόνα 123. Δραστηριότητα.



Εικόνα 124. Δραστηριότητα.





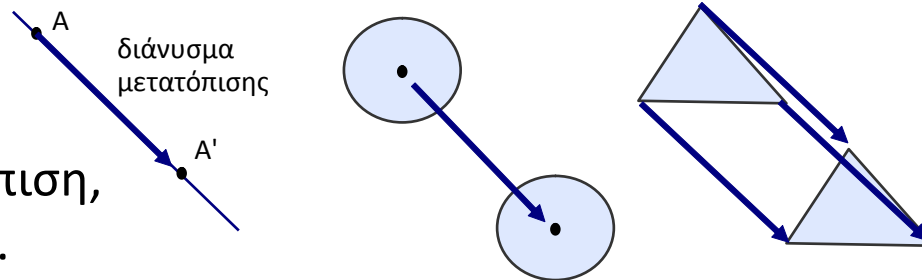
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

---

# Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

# Ισομετρίες (1)

- **Ισομετρίες** ονομάζονται οι μετασχηματισμοί που διατηρούν την ισότητα των σχημάτων. Οι πιο χαρακτηριστικοί είναι: η μετατόπιση, η στροφή και οι συμμετρίες.
- **Μετατόπιση** είναι ένας μετασχηματισμός στο επίπεδο συγκεκριμένης απόστασης και διεύθυνσης, που μετακινεί ένα σχήμα κατά μήκος μιας ευθείας. Η διεύθυνση και η απόσταση ορίζουν το διάνυσμα της μετατόπισης.

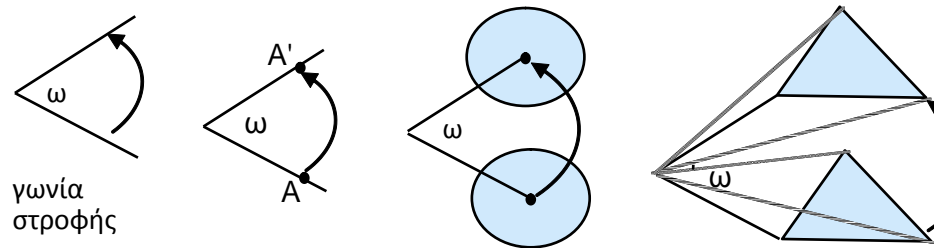


Εικόνα 125. Μετατόπιση, στροφή, συμμετρίες.



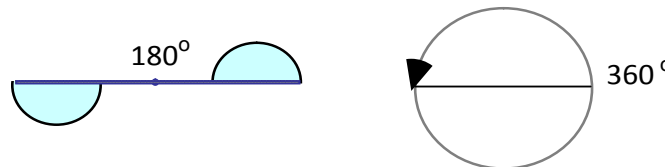
# Ισομετρίες (2)

- **Στροφή** είναι ένας μετασχηματισμός στο επίπεδο που ορίζεται από ένα σταθερό σημείο και μία σταθερή γωνία. Τα σχήματα αλλάζουν προσανατολισμό αλλά διατηρούνται ίσα.



Εικόνα 126.  
Στροφές.

- Μία στροφή  $180^\circ$  αντιστρέφει το σχήμα και μια στροφή  $360^\circ$  το επαναφέρει στην ίδια θέση.



Εικόνα 127.  
Στροφές.





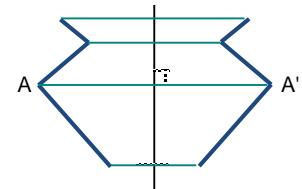
# Ισομετρίες (3)

## Συμμετρία ως προς άξονα

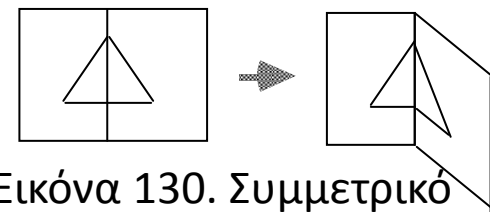
- Δύο σχήματα ονομάζονται **συμμετρικά ως προς άξονα  $\varepsilon$**  αν τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα αντίστοιχά τους σημεία έχουν την ευθεία  $\varepsilon$  μεσοκάθετο.
- Η ευθεία  $\varepsilon$  ονομάζεται **άξονας συμμετρίας**. Τα σχήματα μπορούν να έχουν έναν ή περισσότερους άξονες συμμετρίας.
- Τα συμμετρικά σχήματα (ή μέρη):
  - Είναι ίσα σχήματα.
  - Ισαπέχουν από τον άξονα.
  - Έχουν αντίστροφο προσανατολισμό.



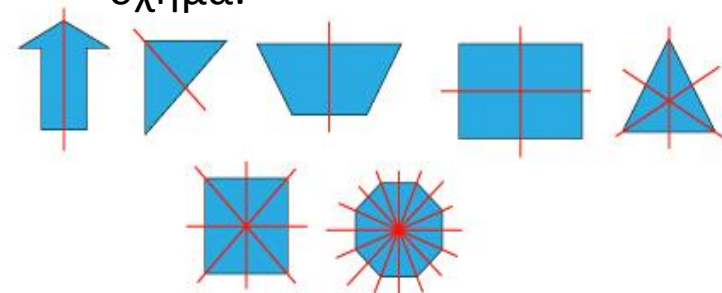
Εικόνα 128.  
Συμμετρικό σχήμα.



Εικόνα 129.  
Συμμετρικό σχήμα.



Εικόνα 130. Συμμετρικό σχήμα.



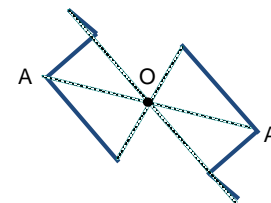
Εικόνα 131. Συμμετρικά σχήματα.



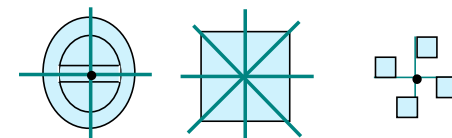
# Ισομετρίες (4)

## Συμμετρία ως προς σημείο

- Δύο σχήματα ονομάζονται **συμμετρικά ως προς σημείο O** αν τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα αντίστοιχά τους σημεία έχουν σημείο O μέσο. Το σημείο αυτό ονομάζεται **κέντρο συμμετρίας**.
- Τα σχήματα με πολλούς άξονες συμμετρίας έχουν το σημείο τομής των αξόνων ως κέντρο συμμετρίας.
- Η **συμμετρία ως προς σημείο** είναι μια στροφή  $180^\circ$ .



Εικόνα 132.  
Συμμετρία.



Εικόνα 133.  
Συμμετρία.



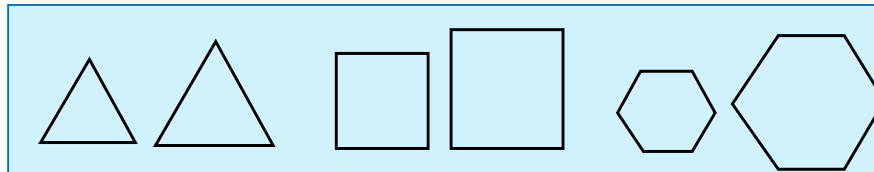
Εικόνα 134.  
Συμμετρία.

Εικόνα 135.  
Συμμετρία.



# Ομοιότητα – ομοιοθεσία (1)

- Δύο σχήματα ονομάζονται **όμοια** αν έχουν ίσες όλες τις γωνίες και όλες τις πλευρές ανάλογες. Ο λόγος των αναλόγων πλευρών ονομάζεται **λόγος ομοιότητας**.
- Η έννοια των **ομοίων σχημάτων** και των αναλογιών ξεκίνησε από τους Πυθαγόρειους και συνδέονταν για αυτούς με την αρμονία και τη δικαιοσύνη.
- Τα κανονικά πολύγωνα, δηλαδή τα πολύγωνα που έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες είναι όλα όμοια μεταξύ τους. Έτσι όλα τα τετράγωνα, τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα κανονικά εξάγωνα κλπ. είναι μεταξύ τους όμοια.

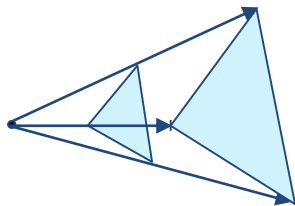


Εικόνα 136. Όμοια σχήματα.

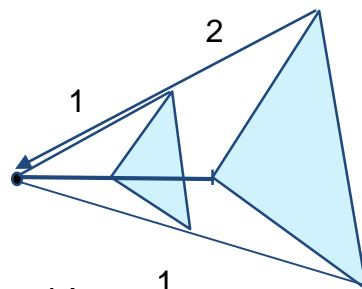


# Ομοιότητα – ομοιοθεσία (2)

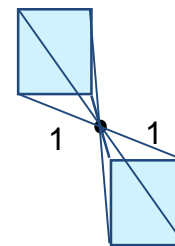
- Η **ομοιοθεσία** είναι ένας μετασχηματισμός ο οποίος με τη βοήθεια ενός σημείου και ενός λόγου δημιουργεί όμοια σχήματα.
- Στην έννοια της ομοιοθεσίας στηρίζεται η μεγέθυνση ή η σμίκρυνση των προβολών ή των αντίστροφων προβολών.



Εικόνα 137.  
Όμοια σχήματα.



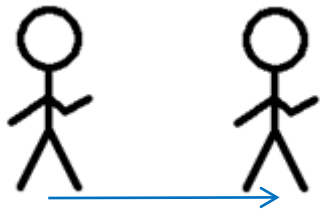
λόγο  $\frac{1}{2}$   
Εικόνα 138.  
Όμοια σχήματα.



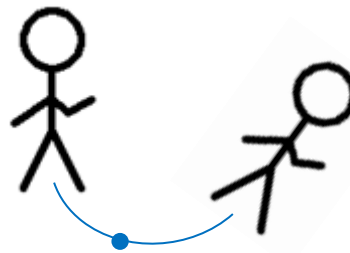
λόγος  $\frac{1}{1}$   
Εικόνα 139.  
Όμοια σχήματα.



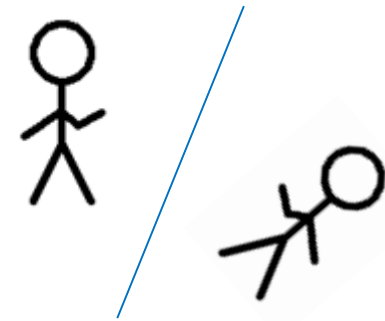
# Μετασχηματισμοί



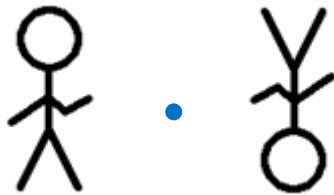
Εικόνα 140. Μετατόπιση.



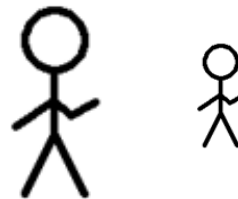
Εικόνα 141. Στροφή.



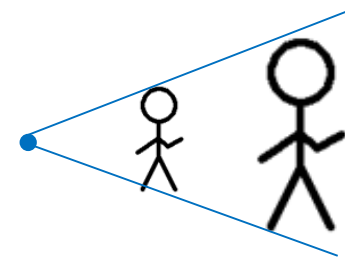
Εικόνα 142. Αξονική συμμετρία.



Εικόνα 143. Κεντρική συμμετρία.



Εικόνα 144. Ομοιότητα.



Εικόνα 145. Ομοιοθεσία



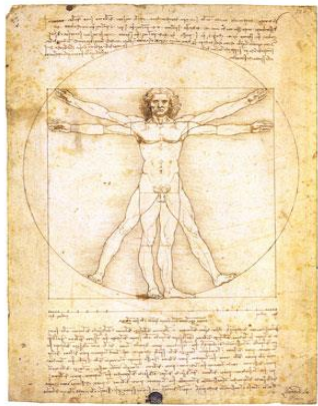
# Ένα ιδιαίτερο ζήτημα: Χρυσός λόγος (1)

- Οι Πυθαγόρειοι απέδιδαν μεγάλη σημασία στη θεωρία της αναλογίας και των ομοίων σχημάτων.
- Θεωρούσαν ότι αυτό εκφράζει την αρμονία της φύσης, αλλά και τη δικαιοσύνη, όπου ο καθένας λαμβάνει **ανάλογα** με τις ανάγκες του.
- Η προτίμησή τους στις αναλογίες τους οδήγησαν να προσδιορίσουν **το Χρυσό Λόγο**, δηλαδή το λόγο που πρέπει να έχουν δύο μήκη για να βρίσκονται σε μια αρμονική σχέση μεγεθών.

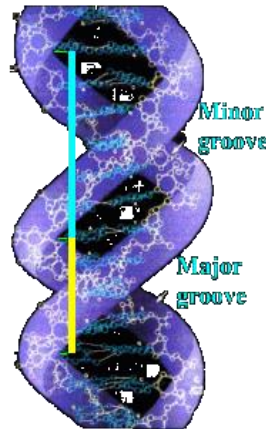


# Ένα ιδιαίτερο ζήτημα: Χρυσός λόγος (2)

- Το λόγο αυτό χρησιμοποίησαν ιδιαίτερα οι αρχαίοι Έλληνες στα έργα τους (Παρθενώνας, αγάλματα κλπ.) αλλά και πολλοί άλλοι καλλιτέχνες, αρχιτέκτονες κτλ. αξιοποιώντας το **Χρυσό Ορθογώνιο**, δηλαδή το ορθογώνιο εκείνο του οποίου ο λόγος των πλευρών είναι ίσος με το χρυσό λόγο.
- Ο αριθμός αυτός πρόκυψε από τη μελέτη της ίδιας της φύσης.



Εικόνα 146.  
Vitruvian Man.



Εικόνα 147. DNA



Εικόνα 148.  
Παρθενώνας.



# Ένα ιδιαίτερο ζήτημα: Χρυσός λόγος (3)

- Ο Χρυσός λόγος αποδίδεται από τη σχέση

Εικόνα 149. Σχέση  
Χρυσού λόγου.

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$$

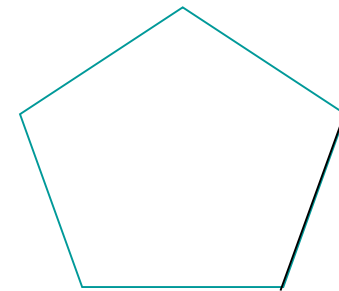
Εικόνα 150. Σχέση  
Χρυσού λόγου.

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x}$$

και είναι ο αριθμός  $\phi = 1,618\dots$  (  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  ) Εικόνα 151. Αριθμός  $\phi$  –  
αποτέλεσμα ρίζας.

- Ο αριθμός αυτός είναι **άρρητος**, εκφράζει την πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

- Επίσης είναι το όριο της ακολουθίας που δημιουργείται από τη διαίρεση κάθε αριθμού Fibonacci (1,1,2,3,5,..) με τον αμέσως προηγούμενό του.



Εικόνα 152.  
Κανονικό  
πεντάγωνο.





# Εφαρμογές Χρυσού Λόγου



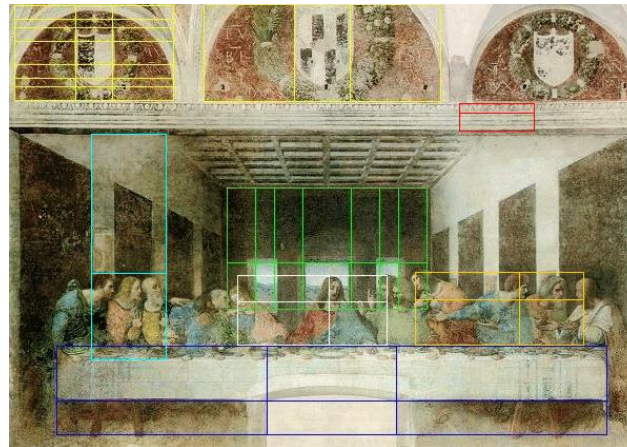
Εικόνα 153.  
Πυραμίδες.



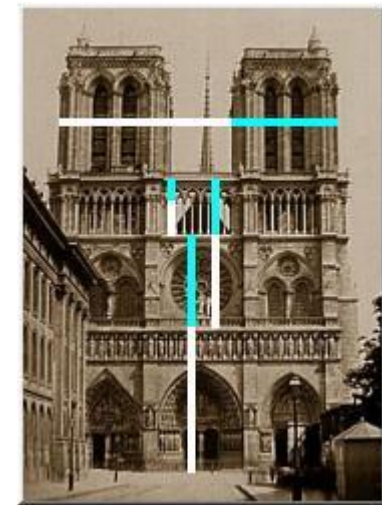
Εικόνα 154.  
Παρθενώνας.



Εικόνα 155.  
Κτίριο ΟΗΕ.



Εικόνα 156.  
Μυστικός δείπνος, Ντα Βίντσι.



Εικόνα 157.  
Παναγία των Παρισίων.



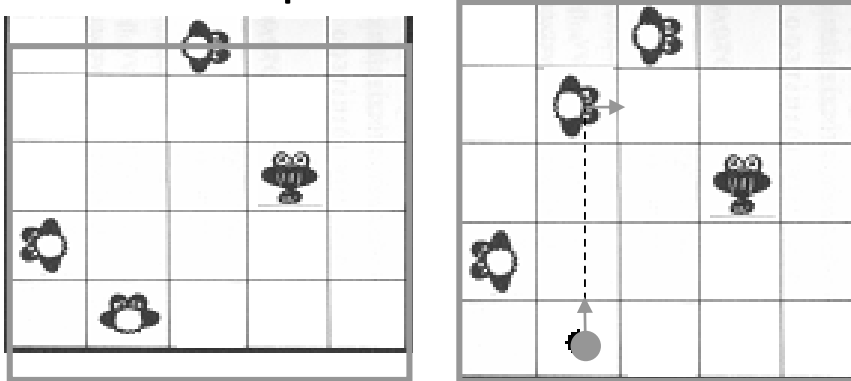
# Διδακτικές κατευθύνσεις (3)

- Η μετατόπιση και η στροφή είναι δύο μετασχηματισμοί θεμελιώδεις σε όλες τις λειτουργίες μέσα στον χώρο.
- Εξοικειώνουν τα παιδιά στην ανάλυση μιας κίνηση, όπως συμβαίνει με τη γεωμετρία της Logo.
- Εξοικειώνουν επίσης με τη διατήρηση των ιδιοτήτων των σχημάτων και την οπτική ευλυγισία.
- Ενθαρρύνουμε το παιδί:
  - παρατηρεί μετατοπίσεις και στροφές και να προβλέπει το αποτέλεσμα,
  - αναγνωρίζει συμμετρικά δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα και τους άξονες και να κάνει κατασκευές.

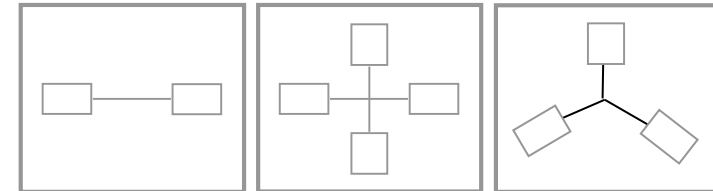


# Δραστηριότητες (14)

- **Ξέρω τι κίνηση κάνει:** Τα παιδιά σε ομάδες παρατηρούν μια ομάδα διάταξη σε πλακόστρωτο δάπεδο. Η πρώτη ομάδα αλλάζει τη θέση ενός παιδιού χωρίς να το δουν οι άλλοι και οι άλλοι πρέπει να βρουν τι άλλαξε:



Εικόνα 159. Δραστηριότητα.



Εικόνα 158.

Δραστηριότητα.

- **Ξέρω που θα βρεθεί:** Η νηπιαγωγός ή παιδιά περιστρέφουν μια κατασκευή με κουτιά που περιέχουν ένα αντικείμενο. Οι υπόλοιποι πρέπει να βρουν πιο από τα κουτιά βρίσκεται το αντικείμενο μετά την περιστροφή.



# Δραστηριότητες (15)



Εικόνα 160. Δραστηριότητα.

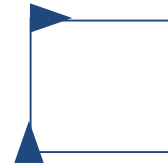


Εικόνα 161. Δραστηριότητα.



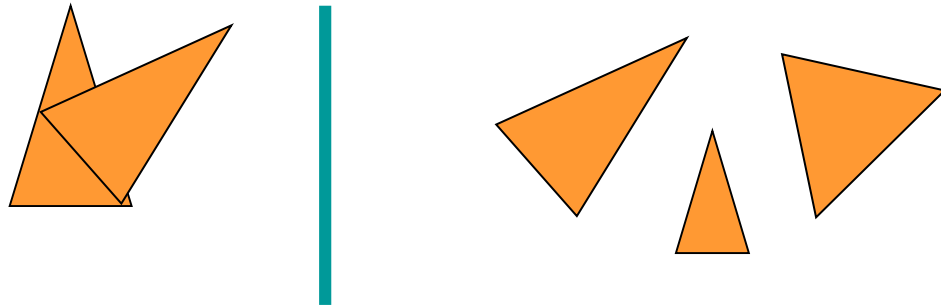
# Δραστηριότητες (16)

- Μια κατασκευή Logo:



Εικόνα 162. Κατασκευή.

- Αναγνώριση σχημάτων: ποιο ταιριάζει; Νοερός μετασχηματισμός:

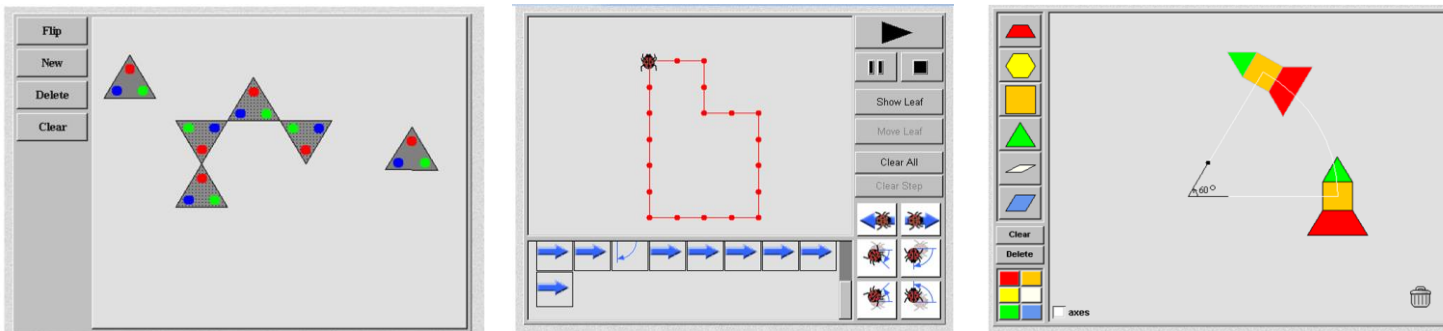


- Ψηφιακά

– <http://nlvm.usu.edu/>.

Εικόνα 163. Αναγνώριση σχημάτων.

– <http://illuminations.nctm.org/ActivitySearch.aspx>.



Εικόνα 164. Ψηφιακά παιχνίδια.





# Διδακτικές Κατευθύνσεις (4)

- Η συμμετρία είναι χαρακτηριστική ιδιότητα πολλών φυσικών και τεχνητών αντικειμένων, σχημάτων, κτισμάτων, δημιουργημάτων τέχνης κλπ. Το ανθρώπινο σώμα, τα φύλλα και το σχήμα των δένδρων είναι συμμετρικά. Το καθρέφτισμα, το δίπλωμα δημιουργούν συμμετρικά σχήματα.
- Η ιδιότητα της συμμετρίας έγινε αντιληπτή από την ανθρωπότητα από νωρίς όπως γίνεται αντιληπτή και από τα μικρά παιδιά. Σχετικές δραστηριότητες αναγνώρισης και κατασκευής συμμετρικών μορφών προτείνονται στα παιδιά από την πρώτη σχολική ηλικία.

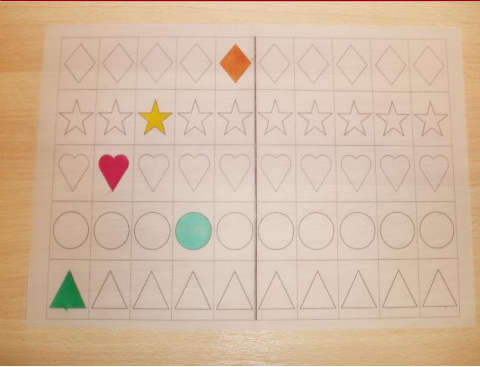


# Δραστηριότητες (17)

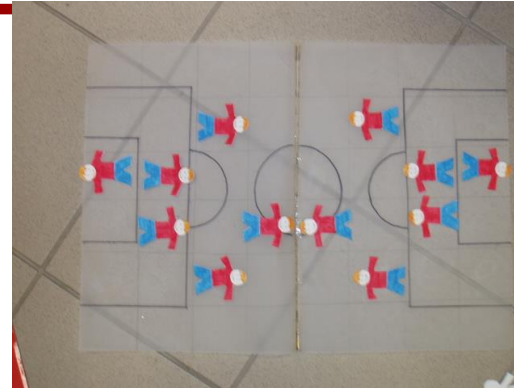
- **Ξέρω ποια είναι συμμετρικά:** Τα παιδιά σε ομάδες αναζητούν τα συμμετρικά από μια ποικιλία αντικειμένων, εικόνων ή σχεδίων.
- **Βρίσκω τα συμμετρικά:** Τα παιδιά σε ομάδες εργάζονται στο τραπέζι όπου έχουν χωρισμένα σε μέρη συμμετρικά σχήματα ή σχηματισμούς. Αντιστοιχίζουν και ενώνουν για να δημιουργήσουν τα αρχικά σχήματα.
- **Κατασκευάζω συμμετρικά:** Τα παιδιά κατασκευάζουν συμμετρικά με διάφορα υλικά.



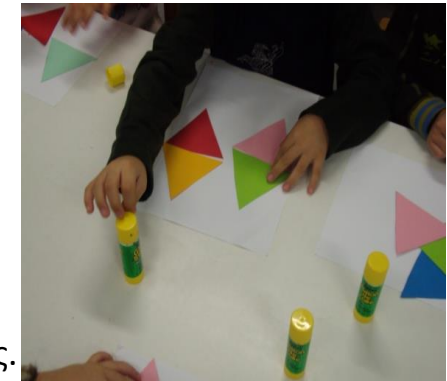
# Δραστηριότητες (18)



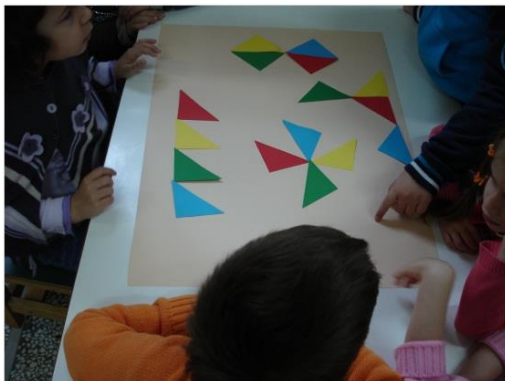
Εικόνα  
165.  
Δράσεις.



Εικόνα  
166.  
Δράσεις.



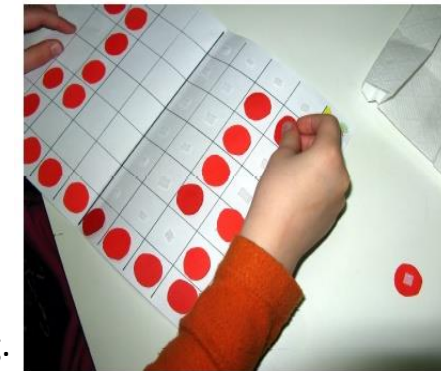
Εικόνα  
167.  
Δράσεις.



Εικόνα  
168.  
Δράσεις.



Εικόνα  
169.  
Δράσεις.



Εικόνα  
170.  
Δράσεις.



Εικόνα 171.  
Δράσεις.



Εικόνα 172.  
Δράσεις.



Εικόνα 173.  
Δράσεις.



# Ερωτήσεις (1)

1. Ποιες είναι οι βασικές μορφές συλλογισμών στην ενότητα των «έννοιες χώρου και γεωμετρία»;
2. Ποια η σημασία ανάπτυξης των συλλογισμών αυτών (χωρικού, γεωμετρικού και οπτικοποίησης);
3. Ποια είναι η γενική ιστορική εξέλιξη και ποια τα είδη των γεωμετρικών;
4. Τι ομάδες δράσεων περιλαμβάνει ο χωρικός συλλογισμός;
5. Ποιες δραστηριότητες προτείνονται για την ανάπτυξη χωρικού συλλογισμού στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία;
6. Τι ονομάζεται οπτικοποιημένη σκέψη και ποιες δράσεις περιλαμβάνει;
7. Ποιες δραστηριότητες προτείνονται για την ανάπτυξη οπτικοποιημένης σκέψης στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία;
8. Ποια είναι τα βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και ποιες οι μεταξύ τους σχέσεις;



# Ερωτήσεις (2)

9. Ποιες ομάδες δραστηριοτήτων προτείνονται στη γεωμετρία στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία;
10. Ποιες δραστηριότητες προτείνονται για την ανάπτυξη γεωμετρικού συλλογισμού στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία;
11. Ποιοι είναι οι βασικοί μετασχηματισμοί;
12. Ποιες δραστηριότητες που σχετίζονται με μετασχηματισμούς προτείνονται στην προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία;



# Υλικό μελέτης - Βιβλιογραφία

1. [Τζεκάκη, Μ. \(2010\). Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζυγός. – σελίδες 95-184](#)
2. [Τζεκάκη, Μ. \(2010\). Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά νοήματα. Αθήνα: Gutenberg – σελίδες 147-171](#)
3. Ιστορία γεωμετρίας  
[Boyer, C.B., & Merzbach. U.C. \(1997\). Η Ιστορία των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Πνευματικός .](#)  
[Kline M. \(1985\). Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό. Τόμος Α' Εκδόσεις: Κώδικας.](#)
4. Ιστορία μετασχηματισμών  
[Open University. \(1986\). Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών. Εκδόσεις Κουσουμπός.](#)
5. Συμμετρία  
[Weyl. H. \(1991\). Συμμετρία. Εκδόσεις: Τροχαλία.](#)



# Αναφορές εικόνων (1)

- 1-2. Προσωπικό αρχείο.
3. Paintings from the Chauvet cave (museum replica).jpg  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c0/Paintings from the Chauvet cave %28museum replica%29.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c0/Paintings_from_the_Chaudet_cave_%28museum_replica%29.jpg)  
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
4. Manos de Gargas (Francia).png  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Manos de Gargas %28Francia%29.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f9/Manos_de_Gargas_%28Francia%29.png)  
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
5. By 49ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ (<http://49lyk-athin.att.sch.gr/PROISTORIA.htm>).
6. By Encyclopædia Britannica  
(<http://commonmaths.weebly.com/piupsilonthetaalphagamma972rhoepsiloniotaomicron-thetaepsilon974rhoetamualpha.html>).
7. Hilbert.jpg  
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Hilbert.jpg>  
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons



# Αναφορές εικόνων (2)

8. Riemann sqrt.jpg  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b5/Riemann\\_sqrt.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b5/Riemann_sqrt.jpg)  
By Elb2000 [GNU Free Documentation License  
([http://commons.wikimedia.org/wiki/GNU\\_Free\\_Documentation\\_License](http://commons.wikimedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License))  
or CC-BY-SA-2.5,2.0,1.0  
(<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/deed.en>)], via Wikimedia Commons
9. Togliatti surface.png  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e0/Togliatti\\_surface.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e0/Togliatti_surface.png)  
By Claudio Rocchini (Own work) [GFDL  
([http://en.wikipedia.org/wiki/GNU\\_Free\\_Documentation\\_License](http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License)) or CC-BY-3.0  
(<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en>)], via Wikimedia Commons
10. By ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ 2010  
(<http://www.m3.tuc.gr/ANAGNWSTHRIO/Drawing/THEORIA/PLAGIES%20PROBOLES.html>).



# Αναφορές εικόνων (3)

11. By Skouloudis Errikos [(Picture Window πρότυπο. Powered by Blogger) (<http://erythrealithri.blogspot.gr/2011/04/desolation-and-terror-in-erythrea-by.html>)].
12. Sanzio 01.jpg  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/94/Sanzio\\_01.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/94/Sanzio_01.jpg)  
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
13. Vecteur coordonnées.png  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vecteur\\_coordonn%C3%A9es.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vecteur_coordonn%C3%A9es.png)  
By Nicostella [GFDL (GNU Free Documentation License) or cc-by-sa-3.0-migrated (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>) or cc-by-sa-2.5,2.0,1.0 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/deed.en>)], via Wikimedia Commons
- 14,26. Möbius strip.jpg  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/M%C3%B6bius\\_strip.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/M%C3%B6bius_strip.jpg)



# Αναφορές εικόνων (4)

By David Benbennick (Own work) [GFDL (<http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:GFDL>) or CC-BY-SA-3.0-migrated, CC-BY-SA-2.0 (<http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:CC-BY-SA-3.0-migrated>), (<http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:CC-BY-SA-2.0>)], via Wikimedia Commons

15. TorusKnot3D.png

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/07/TorusKnot3D.png>

By Michiel Sikma (Own work) [CC-BY-SA-2.5 (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.5/deed.en>)], via Wikimedia Commons

16-18. Προσωπικό αρχείο.

19. Konigsberg bridges.png

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg\\_bridges.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Konigsberg_bridges.png)

See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

20. Προσωπικό αρχείο.

21. By blueKiwi Software (<http://www.bluekiwi-software.com/fr/2012/09/27/le-secret-de-linnovation-developpez-vos-liens-faibles/>).



# Αναφορές εικόνων (5)

22-24. Προσωπικό αρχείο.

25. TrefoilKnot 01.svg

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/TrefoilKnot\\_01.svg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/04/TrefoilKnot_01.svg)

See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

27. KleinBottle-02.png

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/15/KleinBottle-02.png>

See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

28. Cretan-labyrinth-circular-disc.svg

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1a/Cretan-labyrinth-circular-disc.svg>

See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

29. By Jorge Fernandes Isah ([http://www.xn--klamos-pta.blog.br/2011\\_09\\_01\\_archive.html](http://www.xn--klamos-pta.blog.br/2011_09_01_archive.html)).

30. Labyrinth 1 (from Nordisk familjebok).svg

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Labyrinth\\_1\\_\(from\\_Nordisk\\_familjebok\).svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Labyrinth_1_(from_Nordisk_familjebok).svg)





# Αναφορές εικόνων (6)

By Sebastián Asegurado (Own work)

See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons

31. By © Agora SA (<http://www.bryla.pl/bryla/51,85298,8209644.html?i=4>).
32. By blogspot.com (<http://2.bp.blogspot.com/-bF4gGxTjqdM/UHkt3gUDARI/AAAAAAAAAZnE/4CvDYZwTtdQ/s1600/LABYRINTHOS+GRAFEIOKRATIA.jpg>).
- 33-35. Προσωπικό αρχείο.
36. By Illuminations: Resources for Teaching Math (<http://illuminations.nctm.org>).
- 37-45. Προσωπικό αρχείο.
46. Melencolia I (Durer).jpg  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/14/Melencolia I %28Durer%29.jpg](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/14/Melencolia_I_%28Durer%29.jpg)  
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
- 47-49. Προσωπικό αρχείο.
- 50-53. Cone-cir.jpg  
[http://mathforum.org/mathimages/index.php/Conic\\_Section](http://mathforum.org/mathimages/index.php/Conic_Section)
54. Προσωπικό αρχείο.



# Αναφορές εικόνων (7)

55. By ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ 2008  
(<http://www.cam.tuc.gr/ANAGNWSTHRIO/Drawing/THEORIA/PLAGIES%20PROBOLES.html>)
56. Belvedere, by M. C. Escher.jpg  
[https://en.wikipedia.org/wiki/File:Belvedere,\\_by\\_M.\\_C.\\_Escher.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Belvedere,_by_M._C._Escher.jpg)  
By M. C. Escher. Lithograph, 1958 (<http://www.mcescher.com/>) [CC BY-SA 3.0 Unported License  
([http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text\\_of\\_Creative\\_Commons\\_Attribution-ShareAlike\\_3.0\\_Unported\\_License](http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Text_of_Creative_Commons_Attribution-ShareAlike_3.0_Unported_License))], via Wikimedia Commons
57. Escher's Relativity.jpg  
[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Escher's\\_Relativity.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Escher's_Relativity.jpg)  
M. C. Escher, Lithograph, 1953 [WP:NFC  
([http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Non-free\\_content](http://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Non-free_content))], via Wikimedia Commons
58. By Panos Papadopoulos ([http://panos1962.blogspot.gr/2009/12/blog-post\\_7368.html](http://panos1962.blogspot.gr/2009/12/blog-post_7368.html)).



# Αναφορές εικόνων (8)

59. Impossible cube illusion angle.svg  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Impossible\\_cube\\_illusion\\_angle.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Impossible_cube_illusion_angle.svg)  
By 4C (Own work, based on PNG version) [GFDL (http://en.wikipedia.org/wiki/GNU\_Free\_Documentation\_License) or CC-BY-SA-3.0-migrated (http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:CC-BY-SA-3.0-migrated) or CC-BY-SA-2.5,2.0,1.0 (http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:CC-BY-SA-2.5,2.0,1.0)}, via Wikimedia Commons
- 60-94. Προσωπικό αρχείο.
95. Kepler-solar-system-1.png  
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler-solar-system-1.png>  
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
- 96-117. Προσωπικό αρχείο.
118. By Illuminations: Resources for Teaching Math  
(<http://illuminations.nctm.org>).
- 119-127. Προσωπικό αρχείο.



# Αναφορές εικόνων (9)

128. By Easy Drawings And Sketches, Copyright © 2014 - 2015 (<http://www.easy-drawings-and-sketches.com/cross.html>).
- 129-134. Προσωπικό αρχείο.
135. King of hearts fr.svg  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:King\\_of\\_hearts\\_fr.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:King_of_hearts_fr.svg)  
By David Bellot - Berkeley [LGPL  
(<http://commons.wikimedia.org/wiki/Template:LGPLv2.1%2B>)], via  
Wikimedia Commons
- 136-145. Προσωπικό αρχείο.
146. Da Vinci Vitruve Luc Viatour.jpg  
[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Da\\_Vinci\\_Vitruve\\_Luc\\_Viatour.j  
pg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Da_Vinci_Vitruve_Luc_Viatour.jpg)  
See page for author [Public domain], via Wikimedia Commons
147. By Καρακούση Ελένη (<http://to.ly/IRXx>)
148. By PhiPoint Solutions (<http://www.phipoint.com/affiliates.htm>) Copyright © 2007-2014.
- 149-152. Προσωπικό αρχείο.



# Αναφορές εικόνων (10)

153. Kheops-Pyramid.jpg  
<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kheops-Pyramid.jpg>  
By Nina [GFDL  
([http://en.wikipedia.org/wiki/GNU\\_Free\\_Documentation\\_License](http://en.wikipedia.org/wiki/GNU_Free_Documentation_License)) or  
Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported  
(<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en>) or Creative  
Commons Attribution 2.5 Generic  
(<http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/deed.en>)], via Wikimedia  
Commons
- 154,155,157. By Christa Nathe & Kate Hobgood  
([http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680fa06/hobgood/kate\\_files/golden%20ratio/gr%20arch.html](http://jwilson.coe.uga.edu/emat6680fa06/hobgood/kate_files/golden%20ratio/gr%20arch.html)).
156. By Gary Meisner (<http://www.goldennumber.net/art-composition-design/>).
- 158-163. Προσωπικό αρχείο.
164. By Illuminations: Resources for Teaching Math  
(<http://illuminations.nctm.org>).
- 165-173. Προσωπικό αρχείο.



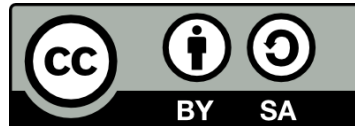
# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Τζεκάκη Μαριάννα.  
«Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία.  
Ενότητα 5. Έννοιες χώρου και Γεωμετρίες. Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015.  
Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:  
<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS177/>.



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





# Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Στοϊνίτση Αφροδίτη  
Θεσσαλονίκη, Χειμερινό εξάμηνο 2014-15



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

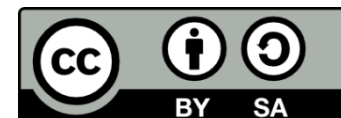


ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ







**ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ**

---

# **Σημειώματα**

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

