ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Υδραυλική των Υπόγειων Ροών

Ενότητα 3: Το μαθηματικό πρόβλημα των υπόγειων ροών

Καθηγητής Κωνσταντίνος Λ. Κατσιφαράκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Νικόλαος Θεοδοσίου
Καθηγητής Περικλής Λατινόπουλος
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ΑΠΘ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

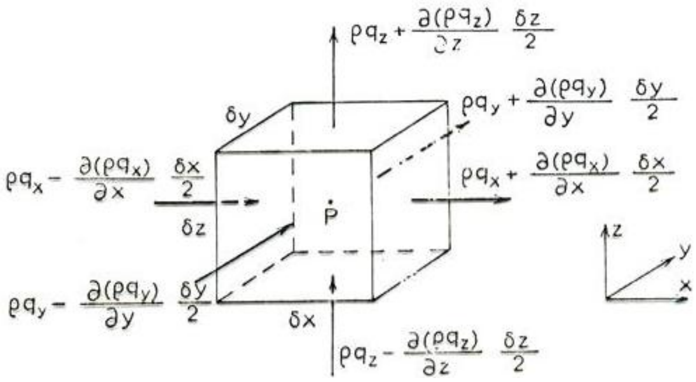
- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Το μαθηματικό πρόβλημα των υπόγειων ροών

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η εξίσωση συνέχειας (1/4)



Σχήμα 1: Στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο πορώδους μέσου κορεσμένου με ρευστό πυκνότητας ρ.

Πηγή: Π. Λατινόπουλος, Υδραυλική των Υπόγειων Ροών, Υπηρεσία Δημοσιευμάτων ΑΠΘ, 1986, σελ.63.

$$\frac{\partial(\rho n)}{\partial t} = -div(\rho q)$$

$$\rho(\alpha + n\beta)\frac{\partial p}{\partial t} = -div(\rho q)$$

p : πίεση ππόρω

α : συμπιεστότητα ττο στερεού σκελετού

β : συμπιεστότητα ττο κκινούμενυ ρευστού

$$S_S = \rho g(\alpha + n\beta)$$

S_S : ειδική αποθηκευτικότητα

Η εξίσωση συνέχειας (2/4)

Υπόμνηση:

$$\nabla = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \mathrm{j}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} + \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}$$

$$\nabla \mathrm{A} = \mathrm{grad}\mathrm{A} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{i} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{j} + \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{k}$$

$$\nabla \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{div}\,\overline{\mathrm{A}} = \frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{A_y}}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial \mathrm{z}}$$

$\mathbf{S = S_s b}$ (η S_s είναι μη εκτατικό μέγεθος)

Η εξίσωση συνέχειας (3/4)

Τελική μορφή εξίσωσης συνέχειας

$$\rho S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho q)$$

Σε συνδυασμό με τον νόμο του Darcy:

$$S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\mathrm{div}(q) = \mathrm{div}(K \,\mathrm{grad}\varphi)$$

ή (για ανομογενές και ανισότροπο μέσο):

$$S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

Η εξίσωση συνέχειας (4/4)

Για ανομογενές και ισότροπο μέσο παίρνει τη μορφή:

$$S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

Ενώ για ομογενές και ισότροπο μέσο γίνεται:

$$S_s \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)$$

Για μόνιμη ροή ή αν το ρευστό και ο εδαφικός σκελετός είναι ασυμπίεστα:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\mathrm{div}\,q = 0$$

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (1/15)

Ροή σε περιορισμένο υδροφορέα

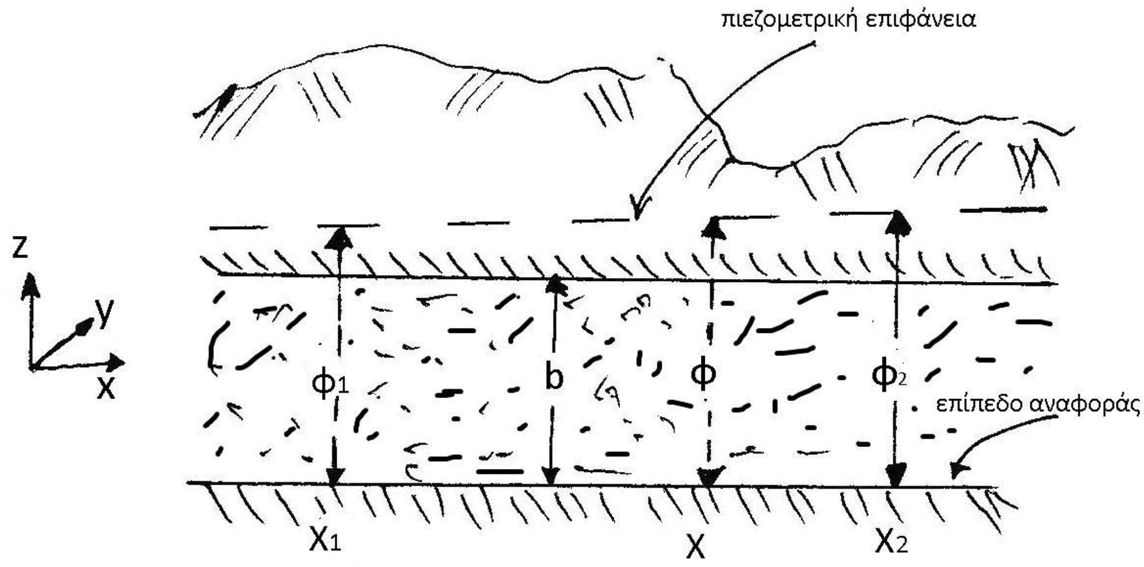
$$\varphi = \varphi(x, y, t) = \frac{1}{b} \int_{(b)} \varphi(x, y, z, t)\, dz$$

$$S \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathrm{div}(T \mathrm{grad} \varphi)$$

$$S \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathrm{div}(T \mathrm{grad} \varphi) - Q$$

$$Q = \sum_{k=1}^{M} Q_k (x_k, y_k)\, \delta (x - x_k, y - y_k)$$

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (2/15)



Σχήμα 2: Ροή σε περιορισμένο υδροφορέα.

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (3/15)

Υδροφορέας ομογενής και ισότροπος

$$S\frac{\partial \varphi}{\partial t} = T\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) - Q$$

Υδροφορέας ανομογενής και ισότροπος

$$S\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - Q$$

Υδροφορέας ανομογενής και ανισότροπος

$$S\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - Q$$

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (4/15)

Παράδειγμα

$$T\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

$$T\frac{d\varphi}{dx} = C_1 \qquad T\varphi = C_1 x + C_2$$

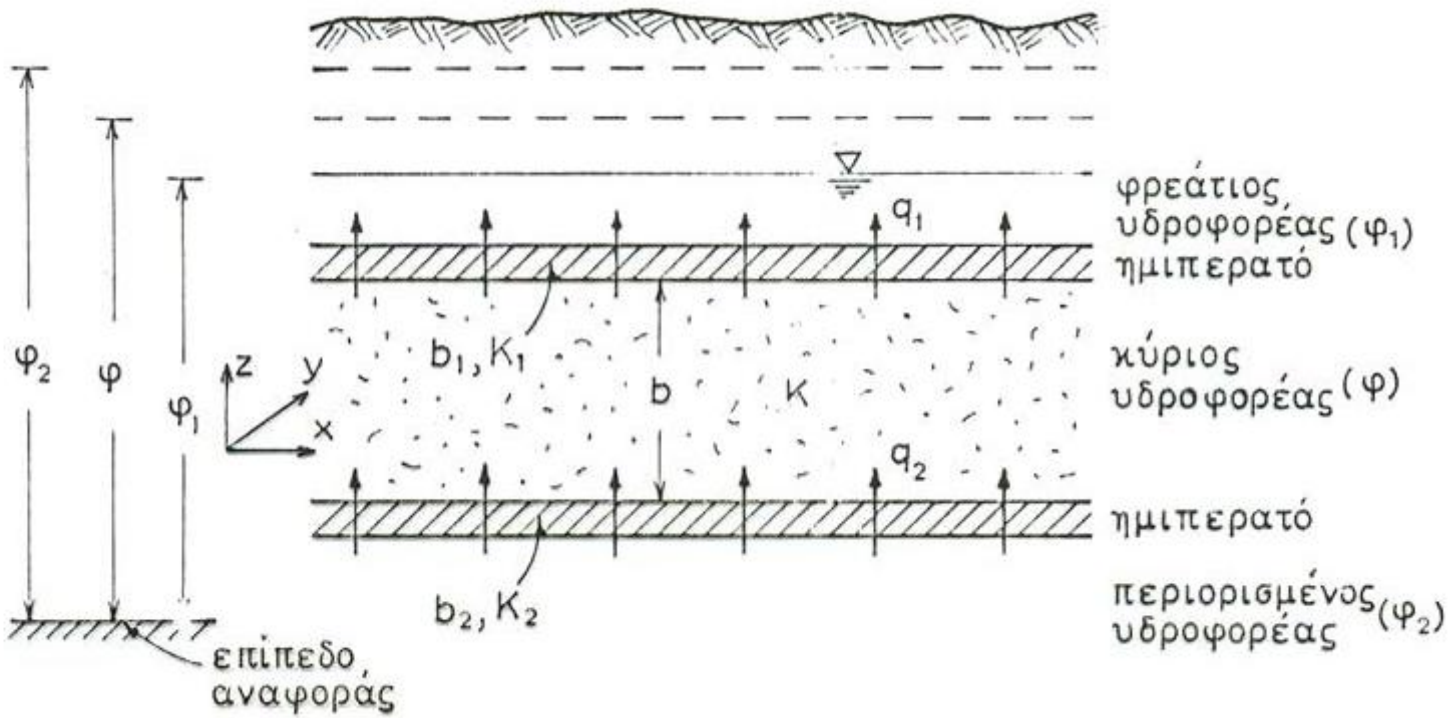
$$C_1 = T\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{x_1 - x_2}, \qquad C_2 = T\frac{x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1}{x_1 - x_2}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{x_1 - x_2}x + \frac{x_1\varphi_2 - x_2\varphi_1}{x_1 - x_2}$$

$$Q' = bq_x = -bK\frac{d\varphi}{dx} = -T\frac{d\varphi}{dx}$$

$$Q' = T\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{x_2 - x_1}$$

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (5/15)



Σχήμα 3: Ροή σε περιορισμένο υδροφορέα με διαρροή και από τα δύο όρια του.

Πηγή: Π. Λατινόπουλος 1986, σελ.71.

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (6/15)

Ροή σε περιορισμένο υδροφορέα με διαρροή

$$S\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)-Q-q_1+q_2$$

$$q_1=K_1\frac{\varphi-\varphi_1}{b_1}=\frac{\varphi-\varphi_1}{c_1}\quad \textbf{και}\quad q_2=K_2\frac{\varphi_2-\varphi}{b_2}=\frac{\varphi_2-\varphi}{c_2}$$

$c_i=b_i/K_i \quad (i=1,\ 2)$: **συντελεστής αντίστασης**

$$\frac{S}{T}\frac{\partial \varphi}{\partial t}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\varphi_1-\varphi}{\lambda_1^2}+\frac{\varphi_2-\varphi}{\lambda_2^2}-\frac{Q}{T}$$

$\lambda_i=(Tb_i/K_i)^{1/2}=(Tc_i)^{1/2} \quad (i=1,2)$: **παράγοντας διαρροής**

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (7/15)

Αναλυτική λύση για «απλή» περίπτωση:

<u>Παραδοχές</u>

Το κάτω όριο του υδροφορέα είναι αδιαπέρατο.

Είναι γνωστές οι τιμές ϕ_0 και ϕ_L του πιεζομετρικού φορτίου σε δύο θέσεις.

Οι μεταβολές των υδραυλικών μεγεθών κατά y είναι αμελητέες.

Το φορτίο στον υπερκείμενο φρεάτιο με διαρροή υδροφορέα παραμένει σταθερό και ίσο με ϕ_c.

Η ροή είναι μόνιμη και ο υδροφορέας ομογενής και ισότροπος.

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (8/15)

Υπόμνηση:

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\left(\sinh x\right)' = \cosh x$$

$$\left(\cosh x\right)' = \sinh x$$

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (9/15)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{\varphi_c - \varphi}{\lambda^2} = 0$$

$$\boldsymbol{\varphi = \varphi_c + C_1 \exp(-x/\lambda) + C_2 \exp(x/\lambda)}$$

$$\varphi = \varphi_c + \frac{1}{\sinh(L/\lambda)}\left(\varphi_0 - \varphi_c\right)\sinh\frac{L-x}{\lambda} +$$

$$+ \frac{1}{\sinh(L/\lambda)}\left(\varphi_L - \varphi_c\right)\sinh\frac{x}{\lambda}$$

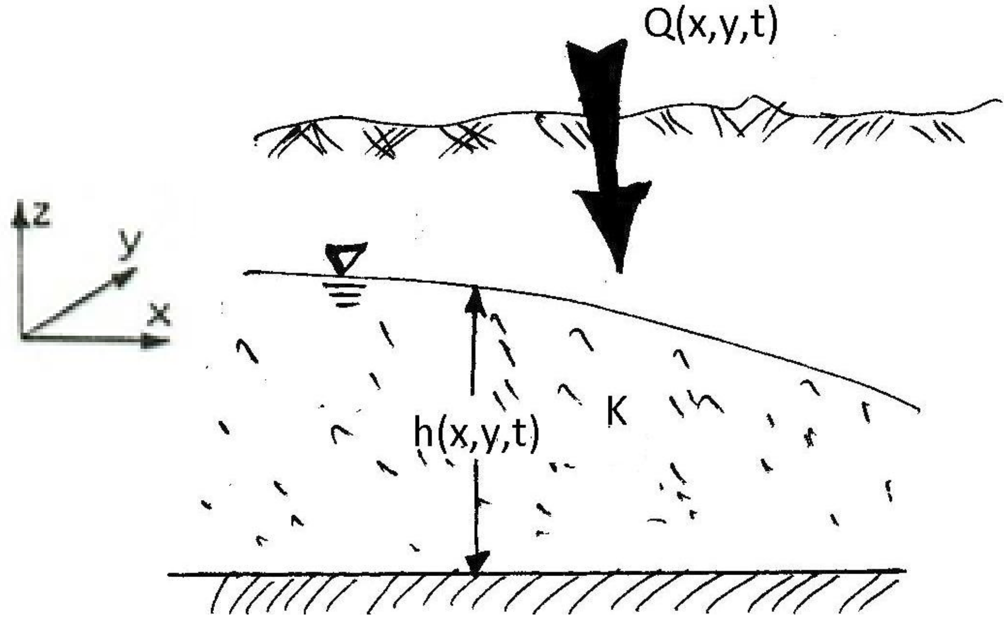
Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (10/15)

$$Q' = -T\,\frac{d\varphi}{dx}$$

$$Q' = \frac{T}{\lambda \sinh(L/\lambda)}\left(\varphi_0 - \varphi_c\right)\cosh\frac{L-x}{\lambda} +$$

$$+\frac{T}{\lambda \sinh(L/\lambda)}\left(\varphi_L - \varphi_c\right)\cosh\frac{x}{\lambda}$$

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (11/15)



Σχήμα 4: Ροή σε φρεάτιο υδροφορέα.

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (12/15)

Ροή σε φρεάτιο υδροφορέα

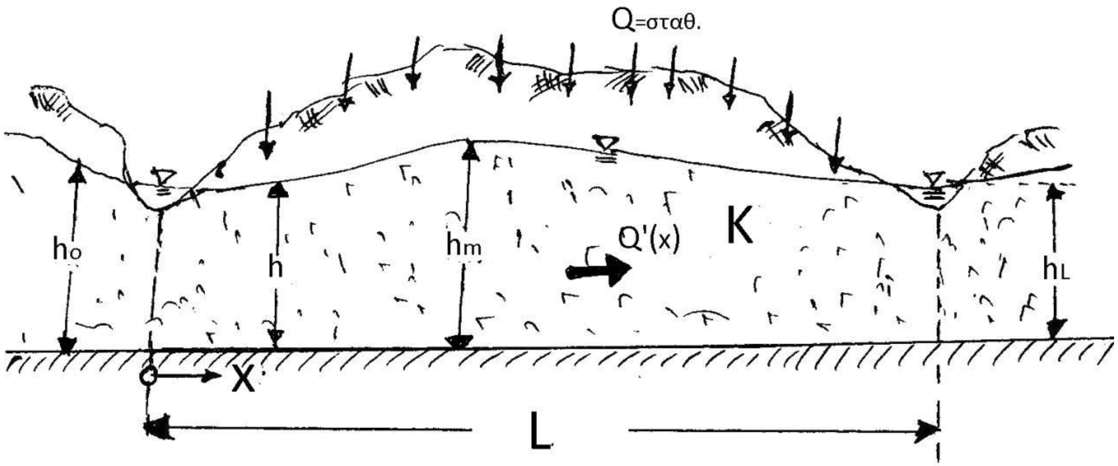
$$S\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(Kh\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(Kh\frac{\partial h}{\partial y})-Q$$

$$S\frac{\partial h}{\partial t}=K\frac{\partial}{\partial x}(h\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(h\frac{\partial h}{\partial y})-Q$$ **(Εξίσωση Boussinesq)**

$$\frac{S}{T}\frac{\partial h^2}{\partial t}=\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2}-\frac{2Q}{K}$$

$$S\frac{\partial h}{\partial t}=T(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2})-Q$$

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (13/15)



Σχήμα 5: Παράδειγμα-Ροή σε φρεάτιο υδροφορέα με επιφανειακή διήθηση.

$$h^2 = h_o^2 - (h_o^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + \frac{Q}{K}x(L-x)$$

$$Q' = -Kh\frac{dh}{dx} = \frac{K}{2L}(h_o^2 - h_L^2) + Q(x - \frac{L}{2})$$

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (14/15)

Τι πρέπει να γνωρίζουμε για την επίλυση ενός προβλήματος:

1. Τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη ροή.
2. Τις τιμές των φυσικών παραμέτρων του υδροφορέα, π.χ. K, S, n.
3. Τα γεωμετρικά όρια του πεδίου ροής, που καθορίζονται από το φυσικό πρόβλημα.
4. Τις οριακές συνθήκες, δηλαδή τις μαθηματικές σχέσεις για τη μεταβλητή του προβλήματος, που ισχύουν πάνω στα όρια.
5. Τις αρχικές συνθήκες (αν το φαινόμενο δεν είναι μόνιμο).

Οι εξισώσεις ροής σε υπόγειους υδροφορείς (15/15)

Σε ένα καλά τοποθετημένο πρόβλημα η λύση:

α) υπάρχει,

β) είναι μοναδική,

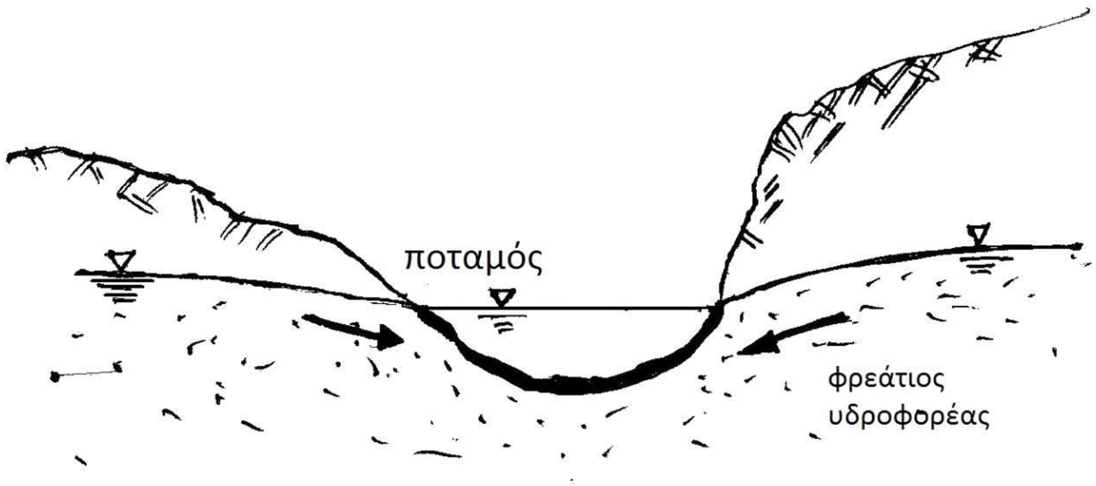
γ) είναι ευσταθής (δηλαδή εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα αντίστοιχα δεδομένα).

Αρχικές οριακές συνθήκες

Αρχικές συνθήκες:

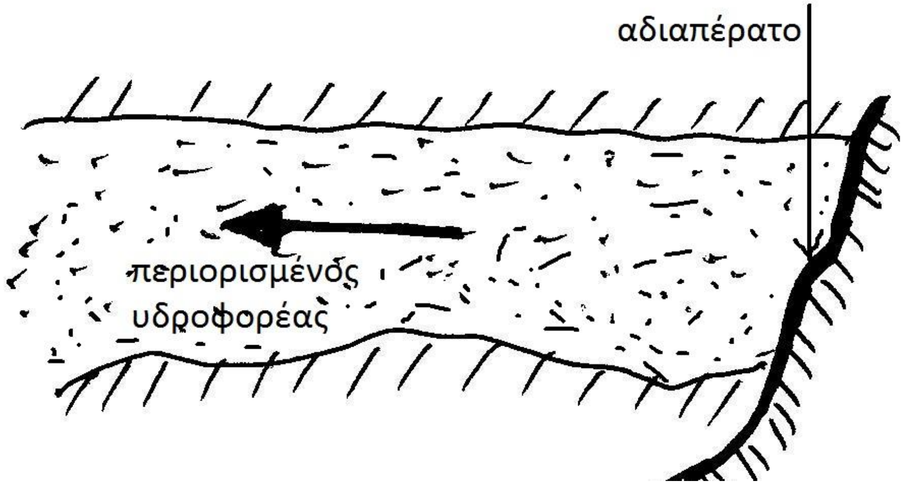
$$\varphi = f(x, y, z, 0)$$

Οριακές συνθήκες (1/5)



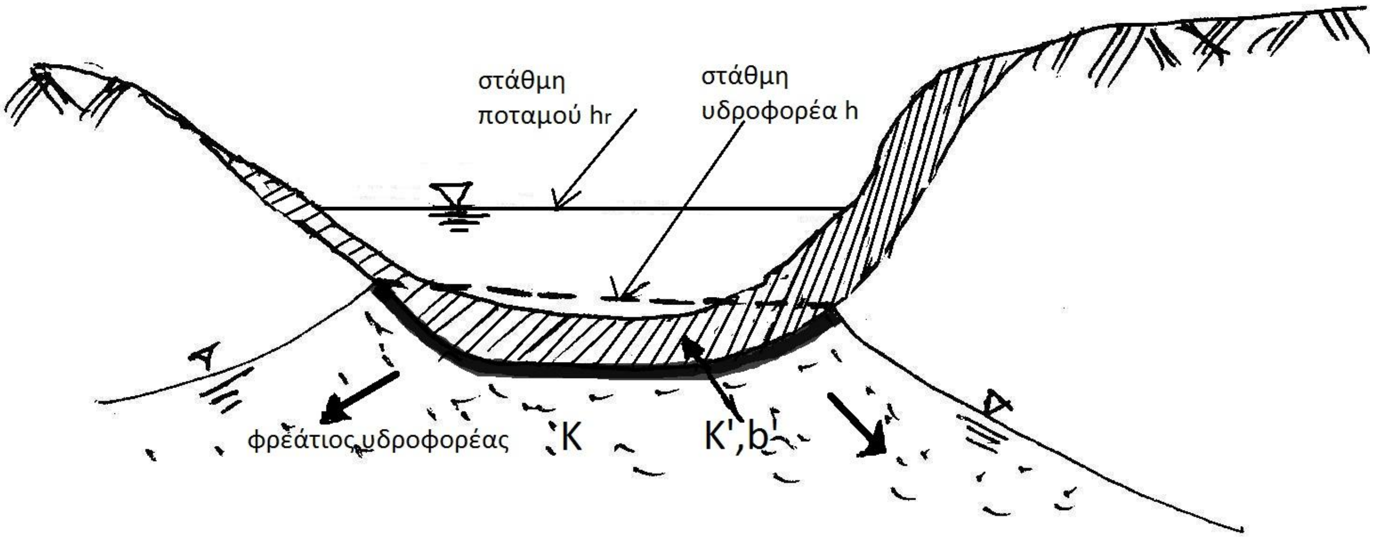
Σχήμα 6: Οριακές συνθήκες γνωστού φορτίου.

Οριακές συνθήκες (2/5)



Σχήμα 7: Όριο γνωστής παροχής-Υποπερίπτωση: αδιαπέρατο όριο.

Οριακές συνθήκες (3/5)



Σχήμα 8: Οριακές συνθήκες μικτού τύπου.

Οριακές συνθήκες (4/5)

(α) Όριο γνωστού φορτίου

$\varphi = f_1(x, y, t)$ **στη C**

(β) Όριο γνωστής παροχής

$Q'_n = f_2(x, y, t)$ **στη C**

$\partial\varphi/\partial n = f_3(x, y, t)$ **στη C**

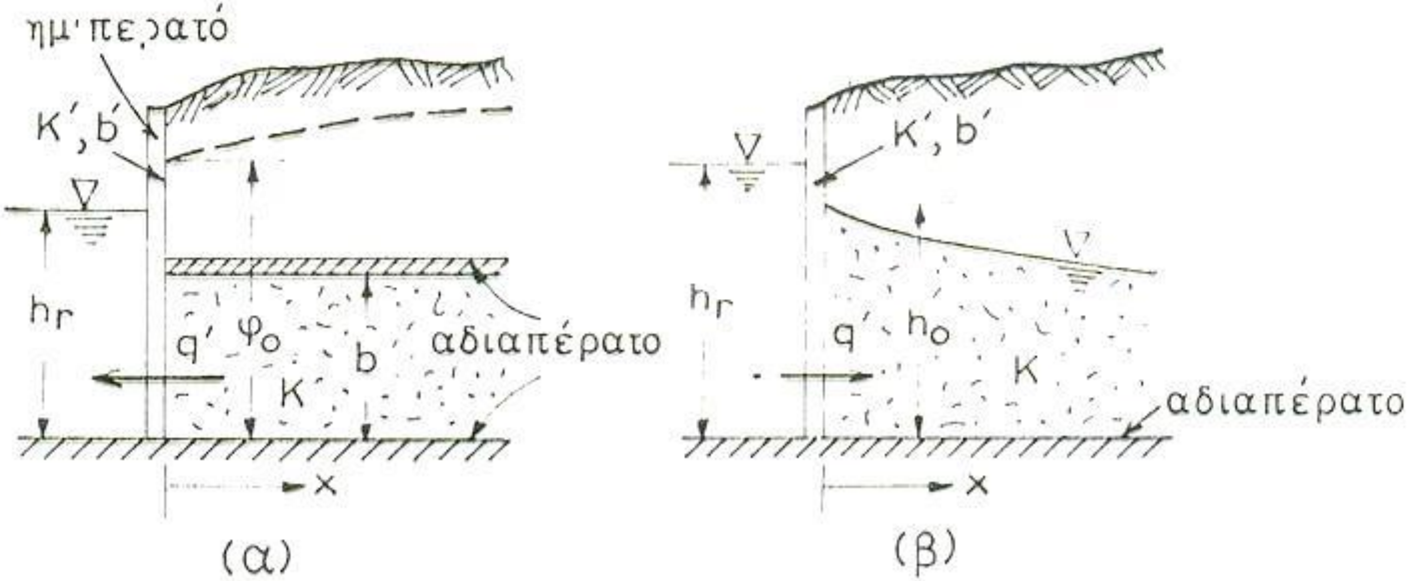
$\partial\varphi/\partial n = 0$ **στη C**

(γ) Ημιπερατο όριο

$$q' = K \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\varphi_o - h_r}{c'}$$

$$T\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{b}{c'}(\varphi_o - h_r) = 0$$ **στη C**

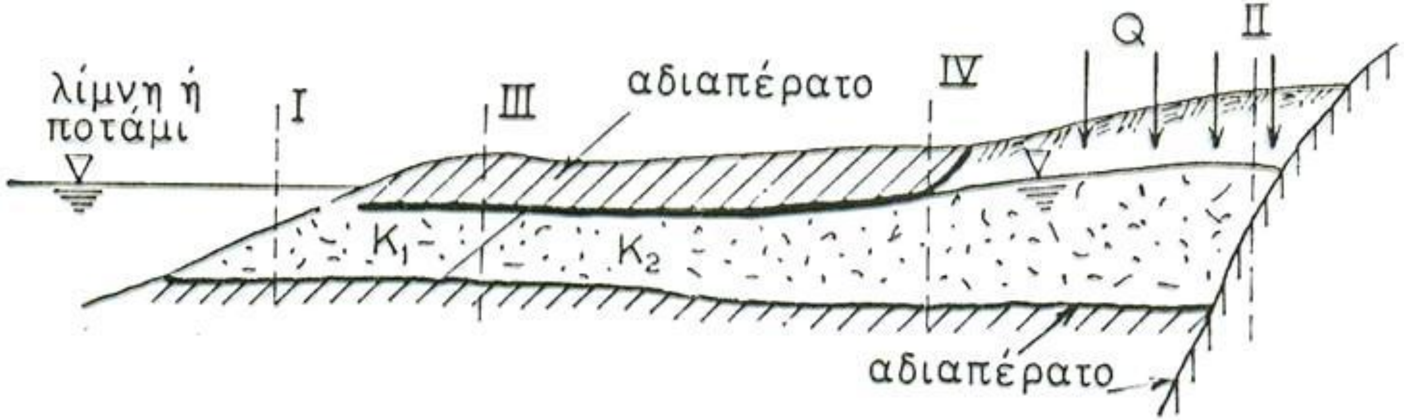
Οριακές συνθήκες (5/5)



Σχήμα 9: Φραγμένη κοίτη ποταμού (ημιπερατό όριο ροής): (α) για περιορισμένο υδροφορέα (β) για φρεάτιο υδροφορέα

Πηγή: Λατινόπουλος 1986, σελ.91.

Αρχικές Οριακές συνθήκες



Σχήμα 10: Προσεγγιστικές θέσεις ορίων υδροφορέων.

Πηγή: Λατινόπουλος 1986, σελ.92.

Γραμμές ίσου δυναμικού και γραμμές ροής (1/3)

Συνάρτηση δυναμικού Φ = Κφ

Σε ισότροπο και ομογενή υδροφορέα:

$$q_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad q_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Γραμμές ίσου δυναμικού και γραμμές ροής (2/3)

Υπόμνηση:

Όταν δύο διανύσματα είναι παράλληλα, το εξωτερικό τους γινόμενο ισούται με 0.

Το εξωτερικό γινόμενο δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{A} x \overline{B} = |\overline{A}||\overline{B}| \sin\theta \overline{n}$$

$$\overline{A} x \overline{B} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \overline{k} = (A_1 B_2 - B_1 A_2) \overline{k}$$

Γραμμές ίσου δυναμικού και γραμμές ροής (3/3)

Εξισώσεις γραμμών ροής:

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

$$q \;\; x \;\; ds = 0 \Rightarrow q_y dx - q_x dy = 0$$

$$q_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad q_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Εξισώσεις Cauchy-Riemann

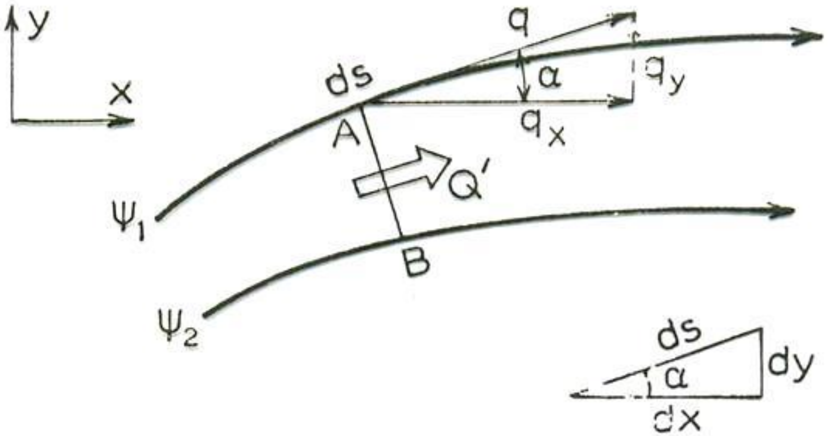
$$q_x = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$q_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

άρα

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$$

Δίκτυα γραμμών ροής και δυναμικού (1/3)



Σχήμα 11: Γραμμές Ροής.

Πηγή: Λατινόπουλος 1986, σελ.95.

Δίκτυα γραμμών ροής και δυναμικού (2/3)

Υπόμνηση:

Όταν δύο διανύσματα είναι κάθετα το εσωτερικό τους γινόμενο είναι ίσο με το μηδέν.

Το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = \left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right| \cos\theta = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

Δίκτυα γραμμών ροής και δυναμικού (3/3)

Στα ανισότροπα εδάφη οι γραμμές ροής δεν είναι κάθετες στις γραμμές ίσου πιεζομετρικού φορτίου.

Με άλλα λόγια η ταχύτητα αποκλίνει από τη διεύθυνση μεταβολής του κινούντος αιτίου, διότι η ευκολία κίνησης δεν είναι ίδια σε όλες τις κατευθύνσεις.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Κωνσταντίνος Κατσιφαράκης, Νικόλαος Θεοδοσίου, Περικλής Λατινόπουλος. «Υδραυλική των Υπόγειων Ροών. Ενότητα 3. Το μαθηματικό πρόβλημα των υπόγειων ροών». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:http://eclass.auth.gr/courses/OCRS179/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Ιωάννης Αυγολούπης

Θεσσαλονίκη, <Εαρινό Εξάμηνο 2012-2013>

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.