ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σήματα-Συστήματα

Ενότητα **7**: Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου ΙΙ

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα διακριτού χρόνου II

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Γενικά

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες και αρκετές διαφορές με την περίπτωση συνεχούς χρόνου. Όταν η εξαγωγή και η ερμηνεία μιας ιδιότητας είναι ταυτόσημη με την περίπτωση συνεχούς χρόνου, παραθέτουμε απλώς την ιδιότητα.
- Επιπροσθέτως ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. διατηρεί στενή σχέση με τη διακριτή σειρά Fourier. Πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφέρονται απ' ευθείας από τις ιδιότητες της σειράς Fourier.
- Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \\ x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} \\ x[n] &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) \quad \text{αντί} \quad x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{FT-DT}} X(\Omega). \end{aligned} \tag{1}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Γενικά

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες και αρκετές διαφορές με την περίπτωση συνεχούς χρόνου. Όταν η εξαγωγή και η ερμηνεία μιας ιδιότητας είναι ταυτόσημη με την περίπτωση συνεχούς χρόνου, παραθέτουμε απλώς την ιδιότητα.
- Επιπροσθέτως ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. διατηρεί στενή σχέση με τη διακριτή σειρά Fourier. Πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφέρονται απ' ευθείας από τις ιδιότητες της σειράς Fourier.
- Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \\ x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} \\ x[n] &\stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \quad \text{αντί} \quad x[n] \stackrel{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega). \end{aligned} \tag{1}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Γενικά

- Υπάρχουν πολλές ομοιότητες και αρκετές διαφορές με την περίπτωση συνεχούς χρόνου. Όταν η εξαγωγή και η ερμηνεία μιας ιδιότητας είναι ταυτόσημη με την περίπτωση συνεχούς χρόνου, παραθέτουμε απλώς την ιδιότητα.
- Επιπροσθέτως ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. διατηρεί στενή σχέση με τη διακριτή σειρά Fourier. Πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού μεταφέρονται απ' ευθείας από τις ιδιότητες της σειράς Fourier.
- Στην ενότητα αυτή χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$
\begin{aligned}
X(\Omega) &= X(e^{j\Omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \\
x[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} \\
x[n] &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \quad \text{αντί} \quad x[n] \overset{\mathcal{FT-DT}}{\longleftrightarrow} X(\Omega).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Περιοδικότητα

Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς Ω με περίοδο 2π. Τούτο δεν ισχύει στον μετασχηματισμό Fourier Σ.Χ.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Γραμμικότητα

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega) \\ x_2[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega) \end{array}\right\} \Leftrightarrow a\, x_1[n] + b\, x_2[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a\, X_1(\Omega) + b\, X_2(\Omega) \qquad (2)$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Μιγαδική συζυγία

$$x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \Leftrightarrow x^*[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-\Omega) \tag{3}$$

<u>Απόδειξη</u>

Ξεκινώντας από τον ορισμό

$$\mathcal{F}\left\{x^*[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]\, e^{-j\Omega n} = \left\{\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{j\Omega n}}_{X(-\Omega)}\right\}^* = X^*(-\Omega).$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Χρονική αναστροφή

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \Leftrightarrow x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-\Omega). \tag{4}$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{x[-n]\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]\, e^{-j\Omega n} \overset{n=-m}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, e^{j\Omega m} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, e^{-j(-\Omega)m} = X(-\Omega). \end{aligned}$$

Ιδιότητες συμμετρίας (1)

- Αν $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, τότε

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}. \end{cases} \tag{5}$$

- Ισχύει επίσης ότι $|X(\Omega)|$ είναι άρτια συνάρτηση ως προς Ω, ενώ $\angle X(\Omega)$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς Ω και

$$x_e[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} \tag{6}$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}. \tag{7}$$

- Απόδειξη: Επειδή $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, αξιοποιώντας την ιδιότητα της μιγαδικής συζυγίας έπεται

$$x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(\Omega) = X^*(-\Omega). \tag{8}$$

Ιδιότητες συμμετρίας (1)

- Αν $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, τότε

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}. \end{cases} \tag{5}$$

- Ισχύει επίσης ότι $|X(\Omega)|$ είναι άρτια συνάρτηση ως προς Ω, ενώ $\angle X(\Omega)$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς Ω και

$$x_e[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} \tag{6}$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}. \tag{7}$$

- Απόδειξη: Επειδή $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, αξιοποιώντας την ιδιότητα της μιγαδικής συζυγίας έπεται

$$x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(\Omega) = X^*(-\Omega). \tag{8}$$

Ιδιότητες συμμετρίας (1)

- Αν $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, τότε

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}. \end{cases} \tag{5}$$

- Ισχύει επίσης ότι $|X(\Omega)|$ είναι άρτια συνάρτηση ως προς Ω, ενώ $\angle X(\Omega)$ είναι περιττή συνάρτηση ως προς Ω και

$$x_e[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} \tag{6}$$

$$x_o[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}. \tag{7}$$

- Απόδειξη: Επειδή $x[n]$ είναι πραγματική ακολουθία, αξιοποιώντας την ιδιότητα της μιγαδικής συζυγίας έπεται

$$x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(\Omega) = X^*(-\Omega). \tag{8}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητες συμμετρίας (2)

- Αν $X(\Omega) = \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$ αναλύοντας την (8) παίρνουμε

$$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} - j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\} \tag{9}$$

  οπότε προκύπτει η σχέση (5).

- Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής και τις ιδιότητες συμμετρίας για το πραγματικό και φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. προκύπτει

$$\begin{aligned} x_e[n] &= \frac{x[n]+x[-n]}{2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}\{x_e[n]\} = \frac{1}{2}\Big[X(\Omega)+X(-\Omega)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} + \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}\Big] \\ &= \mathrm{Re}\{X(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

- Ομοίως αποδεικνύεται η (7).

Ιδιότητες συμμετρίας (2)

- Αν $X(\Omega) = \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$ αναλύοντας την (8) παίρνουμε

$$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} - j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\} \tag{9}$$

  οπότε προκύπτει η σχέση (5).

- Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής και τις ιδιότητες συμμετρίας για το πραγματικό και φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. προκύπτει

$$\begin{aligned} x_e[n] &= \frac{x[n]+x[-n]}{2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{F}\{x_e[n]\} = \frac{1}{2}\Big[X(\Omega)+X(-\Omega)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} + \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}\Big] \\ &= \mathrm{Re}\{X(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

- Ομοίως αποδεικνύεται η (7).

Ιδιότητες συμμετρίας (2)

- Αν $X(\Omega) = \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$ αναλύοντας την (8) παίρνουμε

$$\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} - j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\} \tag{9}$$

  οπότε προκύπτει η σχέση (5).

- Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής και τις ιδιότητες συμμετρίας για το πραγματικό και φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. προκύπτει

$$\begin{aligned} x_e[n] &= \frac{x[n]+x[-n]}{2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathcal{F}\{x_e[n]\} = \frac{1}{2}\Big[X(\Omega)+X(-\Omega)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} + \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\} + j\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}\Big] \\ &= \mathrm{Re}\{X(\Omega)\}. \end{aligned} \tag{10}$$

- Ομοίως αποδεικνύεται η (7).

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Χρονική μετατόπιση και μετατόπιση συχνότητας

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) \Rightarrow x[n-n_0] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \tag{11}$$

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega - \Omega_0). \tag{12}$$

Διαφόριση και Άθροιση (1)

- Για το σήμα της πρώτης διαφοράς $x[n]-x[n-1]$ προκύπτει με εφαρμογή της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης ότι

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left(1-e^{-j\Omega}\right) X(\Omega). \tag{13}$$

- Έστω $y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y[n]-y[n-1]=x[n] \quad &\Rightarrow \quad Y(\Omega)-e^{-j\Omega}\,Y(\Omega)=X(\Omega) \\ &\Rightarrow \quad Y(\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega). \end{aligned} \tag{14}$$

- Η (14) δεν είναι ακριβής, γιατί δεν εγγυάται την περιοδικότητα του $Y(\Omega)$. Πρέπει να προστεθεί ένας όρος που αντικατροπτίζει τη μέση τιμή που προκύπτει από το άθροισμα.

Διαφόριση και Άθροιση (1)

- Για το σήμα της πρώτης διαφοράς $x[n]-x[n-1]$ προκύπτει με εφαρμογή της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης ότι

$$x[n]-x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left(1-e^{-j\Omega}\right) X(\Omega). \tag{13}$$

- Έστω $y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y[n]-y[n-1]=x[n] \quad &\Rightarrow \quad Y(\Omega)-e^{-j\Omega}\,Y(\Omega)=X(\Omega) \\ &\Rightarrow \quad Y(\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega). \end{aligned} \tag{14}$$

- Η (14) δεν είναι ακριβής, γιατί δεν εγγυάται την περιοδικότητα του $Y(\Omega)$. Πρέπει να προστεθεί ένας όρος που αντικατροπτίζει τη μέση τιμή που προκύπτει από το άθροισμα.

Διαφόριση και Άθροιση (1)

- Για το σήμα της πρώτης διαφοράς $x[n]-x[n-1]$ προκύπτει με εφαρμογή της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης ότι

$$x[n]-x[n-1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \left(1-e^{-j\Omega}\right) X(\Omega). \tag{13}$$

- Έστω $y[n]=\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y[n]-y[n-1]=x[n] \quad &\Rightarrow \quad Y(\Omega)-e^{-j\Omega}\,Y(\Omega)=X(\Omega) \\ &\Rightarrow \quad Y(\Omega)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega). \end{aligned} \tag{14}$$

- Η (14) δεν είναι ακριβής, γιατί δεν εγγυάται την περιοδικότητα του $Y(\Omega)$. Πρέπει να προστεθεί ένας όρος που αντικατροπτίζει τη μέση τιμή που προκύπτει από το άθροισμα.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Διαφόριση και Άθροιση (2)

- Θυμηθείτε ότι στην περίπτωση συνεχούς χρόνου είχαμε κάτι αντίστοιχο:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega).$$

- Η ακριβής σχέση είναι

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k). \tag{15}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Διαφόριση και Άθροιση (2)

- Θυμηθείτε ότι στην περίπτωση συνεχούς χρόνου είχαμε κάτι αντίστοιχο:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega).$$

- Η ακριβής σχέση είναι

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k). \tag{15}$$

Παράδειγμα 7.12

- Αν εφαρμόσουμε την (15) για το σήμα $u[n]$ παίρνουμε

$$u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k). \tag{16}$$

- Για $x[n] = \delta[n] = u[n] - u[n-1]$, παίρνουμε

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \frac{e^{-j\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} - \pi e^{-j\Omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) = 1 + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi k}$$

$$\delta(\Omega - 2\pi k) = 1 \tag{17}$$

- που ισχύει.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.12

- Αν εφαρμόσουμε την (15) για το σήμα $u[n]$ παίρνουμε

$$u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k). \tag{16}$$

- Για $x[n] = \delta[n] = u[n] - u[n-1]$, παίρνουμε

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} - \pi e^{-j\Omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) = 1 + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi k}$$

$$\delta(\Omega - 2\pi k) = 1 \tag{17}$$

- που ισχύει.

Παράδειγμα 7.12

- Αν εφαρμόσουμε την (15) για το σήμα $u[n]$ παίρνουμε

$$u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k). \tag{16}$$

- Για $x[n] = \delta[n] = u[n] - u[n-1]$, παίρνουμε

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \frac{e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} - \pi e^{-j\Omega}$$
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) = 1 + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi k}$$
$$\delta(\Omega - 2\pi k) = 1 \tag{17}$$

- που ισχύει.

Διαφόριση στη συχνότητα

- Αν $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, jn\, e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\{-jnx[n]\}.$$

- Οπότε προκύπτει

$$nx[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}. \tag{18}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Διαφόριση στη συχνότητα

- Αν $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$, τότε

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, jn\, e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\{-jnx[n]\}.$$

- Οπότε προκύπτει

$$nx[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}. \tag{18}$$

Ταυτότητα του Parseval

- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega. \tag{19}$$

- Το αριστερό μέρος της σχέσης (19) είναι η ενέργεια του σήματος $x[n]$. Η συνάρτηση $|X(\Omega)|^2$ καλείται πυκνότητα φάσματος ενέργειας.

- Για περιοδικά σήματα μας ενδιαφέρει η ισχύς (ενέργεια σε μια περίοδο). Τότε χρησιμοποιούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier

$$\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2. \tag{20}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ταυτότητα του Parseval

- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega. \tag{19}$$
- Το αριστερό μέρος της σχέσης (19) είναι η ενέργεια του σήματος $x[n]$. Η συνάρτηση $|X(\Omega)|^2$ καλείται πυκνότητα φάσματος ενέργειας.
- Για περιοδικά σήματα μας ενδιαφέρει η ισχύς (ενέργεια σε μια περίοδο). Τότε χρησιμοποιούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier

$$\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2. \tag{20}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ταυτότητα του Parseval

- $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 \, d\Omega. \tag{19}$$
- Το αριστερό μέρος της σχέσης (19) είναι η ενέργεια του σήματος $x[n]$. Η συνάρτηση $|X(\Omega)|^2$ καλείται πυκνότητα φάσματος ενέργειας.
- Για περιοδικά σήματα μας ενδιαφέρει η ισχύς (ενέργεια σε μια περίοδο). Τότε χρησιμοποιούμε τους συντελεστές της σειράς Fourier

$$\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2. \tag{20}$$

Ιδιότητα της συνέλιξης

- Εάν $y[n] = (x * h)[n]$, τότε
- $$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \tag{21}$$

  όπου $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ και $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητα της συνέλιξης

- Εάν $y[n] = (x * h)[n]$, τότε
- $$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \tag{21}$$

  όπου $X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ και $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$.

Παράδειγμα 7.13

- Έστω $h[n] = \delta[n - n_0]$, τότε

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]\, e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}. \tag{22}$$

- Αν $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, τότε

$$y[n] = (x * h)[n] = x(n - n_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n - n_0]\}. \tag{23}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.13

- Έστω $h[n] = \delta[n - n_0]$, τότε

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]\, e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}. \tag{22}$$

- Αν $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$, τότε

$$y[n] = (x * h)[n] = x(n - n_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n - n_0]\}. \tag{23}$$

Παράδειγμα 7.14 (1)

- Έστω

$$h[n] = a^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H(\Omega) = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}} \tag{24}$$

$$x[n] = b^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \frac{1}{1 - b\, e^{-j\Omega}} \tag{25}$$

- τότε για $y[n] = (h * x)[n]$ παίρνουμε

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{(1 - a\, e^{-\Omega})(1 - b\, e^{-j\Omega})}. \tag{26}$$

- Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

Παράδειγμα 7.14 (1)

- Έστω

$$h[n] = a^n u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H(\Omega) = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}} \tag{24}$$

$$x[n] = b^n u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega) = \frac{1}{1 - b\, e^{-j\Omega}} \tag{25}$$

- τότε για $y[n] = (h * x)[n]$ παίρνουμε

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{(1 - a\, e^{-\Omega})(1 - b\, e^{-j\Omega})}. \tag{26}$$

- Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.14 (1)

- Έστω

$$h[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H(\Omega) = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}} \tag{24}$$

$$x[n] = b^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega) = \frac{1}{1 - b\, e^{-j\Omega}} \tag{25}$$

- τότε για $y[n] = (h * x)[n]$ παίρνουμε

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega) = \frac{1}{(1 - a\, e^{-\Omega})(1 - b\, e^{-j\Omega})}. \tag{26}$$

- Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό αναπτύσσουμε σε μερικά κλάσματα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

Παράδειγμα 7.14 (2)

- Αν $a \neq b$, τότε

$$Y(\Omega) = \frac{A}{1 - a\, e^{-\Omega}} + \frac{B}{1 - b\, e^{-j\Omega}} \tag{27}$$

όπου $A = \dfrac{a}{a-b}$ και $B = \dfrac{-b}{a-b}$. Άρα

$$y[n] = \frac{a}{a-b}\, a^n\, u[n] - \frac{b}{a-b}\, b^n\, u[n] = \frac{1}{a-b}\left[a^{n+1}\, u[n] - b^{n+1}\, u[n]\right]. \tag{28}$$

- Αν $a = b$, τότε

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(1 - a\, e^{-j\Omega})^2} = \frac{j}{a} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}}\right). \tag{29}$$

Παράδειγμα 7.14 (2)

- Αν $a \neq b$, τότε

$$Y(\Omega) = \frac{A}{1 - a\,e^{-\Omega}} + \frac{B}{1 - b\,e^{-j\Omega}} \tag{27}$$

όπου $A = \dfrac{a}{a-b}$ και $B = \dfrac{-b}{a-b}$. Άρα

$$y[n] = \frac{a}{a-b}\,a^n\,u[n] - \frac{b}{a-b}\,b^n\,u[n] = \frac{1}{a-b}\left[a^{n+1}\,u[n] - b^{n+1}\,u[n]\right]. \tag{28}$$

- Αν $a = b$, τότε

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(1 - a\,e^{-j\Omega})^2} = \frac{j}{a}e^{j\Omega}\,\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1 - a\,e^{-j\Omega}}\right). \tag{29}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.14 (3)

1. Γνωρίζουμε ότι $a^n\, u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-a\,e^{-\Omega}}$. Οπότε από την ιδιότητα διαφόρισης στη συχνότητα

$$na^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\right) \tag{30}$$

2. και την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο προκύπτει

$$(n+1)\,\frac{1}{a}\,a^{n+1}\,u[n+1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{1}{a}\,e^{j\Omega}\,\frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-a\,e^{-j\Omega}}\right). \tag{31}$$

3. Άρα ο ζητούμενος αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$y[n] = (n+1)a^n u[n] \tag{32}$$

διότι για $n=-1 \Leftrightarrow n+1=0$, μολονότι $u[n+1] \neq 0$.

Παράδειγμα 7.14 (3)

1. Γνωρίζουμε ότι $a^n\, u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-a\, e^{-\Omega}}$. Οπότε από την ιδιότητα διαφόρισης στη συχνότητα

$$n a^n u[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-a e^{-j\Omega}}\right) \tag{30}$$

2. και την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο προκύπτει

$$(n+1)\,\frac{1}{a}\, a^{n+1}\, u[n+1] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{1}{a}\, e^{j\Omega}\, \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1-a\, e^{-j\Omega}}\right). \tag{31}$$

3. Άρα ο ζητούμενος αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$y[n] = (n+1)a^n u[n] \tag{32}$$

διότι για $n=-1 \Leftrightarrow n+1=0$, μολονότι $u[n+1] \neq 0$.

Παράδειγμα 7.14 (3)

1. Γνωρίζουμε ότι $a^n\, u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1 - a\, e^{-\Omega}}$. Οπότε από την ιδιότητα διαφόρισης στη συχνότητα

$$na^n u[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}\right) \tag{30}$$

2. και την ιδιότητα μετατόπισης στο χρόνο προκύπτει

$$(n+1)\, \frac{1}{a}\, a^{n+1}\, u[n+1] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j \frac{1}{a}\, e^{j\Omega}\, \frac{d}{d\Omega}\left(\frac{1}{1 - a\, e^{-j\Omega}}\right). \tag{31}$$

3. Άρα ο ζητούμενος αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$y[n] = (n+1)a^n u[n] \tag{32}$$

διότι για $n = -1 \Leftrightarrow n + 1 = 0$, μολονότι $u[n+1] \neq 0$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Απόκριση συχνότητας

- Η απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ., $H(\Omega)$, παίζει τον ίδιο ρόλο με εκείνη του συστήματος Σ.Χ.
- Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν έχει απόκριση συχνότητας οποιοδήποτε Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. Το σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = 2^n u[n]$ δεν έχει απόκριση συχνότητας. Ένα σύστημα είναι ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου αν η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{33}$$

γεγονός που εγγυάται σύγκλιση του $\mathcal{F}\{h[n]\}$. Επομένως τα ευσταθή Γ.Χ.Α. συστήματα Δ.Χ. έχουν καλώς ορισμένη $H(\Omega)$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Απόκριση συχνότητας

- Η απόκριση συχνότητας ενός Γ.Χ.Α. συστήματος Δ.Χ., $H(\Omega)$, παίζει τον ίδιο ρόλο με εκείνη του συστήματος Σ.Χ.
- Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν έχει απόκριση συχνότητας οποιοδήποτε Γ.Χ.Α. σύστημα Δ.Χ. Το σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = 2^n u[n]$ δεν έχει απόκριση συχνότητας. Ένα σύστημα είναι ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου αν η κρουστική απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλαδή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{33}$$

γεγονός που εγγυάται σύγκλιση του $\mathcal{F}\{h[n]\}$. Επομένως τα ευσταθή Γ.Χ.Α. συστήματα Δ.Χ. έχουν καλώς ορισμένη $H(\Omega)$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα (1)

- Έστω $x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$. Αν $y[n] = x[-n]$, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής $Y(\Omega) = X(-\Omega)$.
- Ενώ στο συνεχή χρόνο ισχύει $x(at) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$, στις ακολουθίες δεν ορίζονται τα δείγματα $x[an]$ αν $a < 1$, δηλαδή για μη-ακέραιες τιμές του a. Λ.χ. το σήμα $x[2n]$ υπονοεί ότι παίρνουμε υπόψη κάθε δεύτερο δείγμα του $x[n]$, δηλαδή τα άρτια δείγματα του $x[n]$.
- Έστω k θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε το σήμα

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}], & n \bmod k = 0 \\ 0, & n \bmod k \neq 0 \end{cases} \tag{34}$$

όπου $n \bmod k = 0$ υποδηλοί ότι το n είναι πολλαπλάσιο του k, ενώ $n \bmod k \neq 0$ υποδηλοί ότι το n δεν είναι πολλαπλάσιο του k.

Σχήμα 7.15

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα (1)

- Έστω $x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$. Αν $y[n] = x[-n]$, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής $Y(\Omega) = X(-\Omega)$.
- Ενώ στο συνεχή χρόνο ισχύει $x(at) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$, στις ακολουθίες δεν ορίζονται τα δείγματα $x[an]$ αν $a < 1$, δηλαδή για μη-ακέραιες τιμές του a. Λ.χ. το σήμα $x[2n]$ υπονοεί ότι παίρνουμε υπόψη κάθε δεύτερο δείγμα του $x[n]$, δηλαδή τα άρτια δείγματα του $x[n]$.
- Έστω k θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε το σήμα

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}], & n \bmod k = 0 \\ 0, & n \bmod k \neq 0 \end{cases} \tag{34}$$

όπου $n \bmod k = 0$ υποδηλοί ότι το n είναι πολλαπλάσιο του k, ενώ $n \bmod k \neq 0$ υποδηλοί ότι το n δεν είναι πολλαπλάσιο του k.

Σχήμα 7.15

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα (1)

- Έστω $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\Omega)$. Αν $y[n] = x[-n]$, τότε σύμφωνα με την ιδιότητα της χρονικής αναστροφής $Y(\Omega) = X(-\Omega)$.
- Ενώ στο συνεχή χρόνο ισχύει $x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$, στις ακολουθίες δεν ορίζονται τα δείγματα $x[an]$ αν $a < 1$, δηλαδή για μη-ακέραιες τιμές του a. Λ.χ. το σήμα $x[2n]$ υπονοεί ότι παίρνουμε υπόψη κάθε δεύτερο δείγμα του $x[n]$, δηλαδή τα άρτια δείγματα του $x[n]$.
- Έστω k θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε το σήμα

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{k}], & n \bmod k = 0 \\ 0, & n \bmod k \neq 0 \end{cases} \tag{34}$$

όπου $n \bmod k = 0$ υποδηλοί ότι το n είναι πολλαπλάσιο του k, ενώ $n \bmod k \neq 0$ υποδηλοί ότι το n δεν είναι πολλαπλάσιο του k.

Σχήμα 7.15

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα (2)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x_{(k)}[n]$ προκύπτει ως

$$\begin{aligned} X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]\, e^{-j\Omega n} \overset{n=rk}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk]\, e^{-j\Omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]\, e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega). \end{aligned} \tag{35}$$

-

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(k\Omega). \tag{36}$$

- Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη σχέση μεταξύ διάρκειας στο χρόνο και εύρους στη συχνότητα ισχύει και πάλι. Αν απλώνει ένα σήμα και "επιβραδύνεται στο χρόνο", τότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. συμπιέζεται. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ $X(k\Omega)$ είναι περιοδικό σήμα ως προς Ω με περίοδο $\frac{2\pi}{|k|}$. Σχήματα 7.16 και 7.17

Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα (2)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x_{(k)}[n]$ προκύπτει ως

$$\begin{aligned} X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]\, e^{-j\Omega n} \overset{n=rk}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk]\, e^{-j\Omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]\, e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega). \end{aligned} \tag{35}$$

- $$x_{(k)}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega). \tag{36}$$

- Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη σχέση μεταξύ διάρκειας στο χρόνο και εύρους στη συχνότητα ισχύει και πάλι. Αν απλώνει ένα σήμα και "επιβραδύνεται στο χρόνο", τότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. συμπιέζεται. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ $X(k\Omega)$ είναι περιοδικό σήμα ως προς Ω με περίοδο $\frac{2\pi}{|k|}$. Σχήματα 7.16 και 7.17

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα (2)

- Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του $x_{(k)}[n]$ προκύπτει ως

$$\begin{aligned} X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]\, e^{-j\Omega n} \overset{n=rk}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk]\, e^{-j\Omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]\, e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega). \end{aligned} \tag{35}$$

- $$x_{(k)}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(k\Omega). \tag{36}$$

- Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη σχέση μεταξύ διάρκειας στο χρόνο και εύρους στη συχνότητα ισχύει και πάλι. Αν απλώνει ένα σήμα και "επιβραδύνεται στο χρόνο", τότε ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. συμπιέζεται. Ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ $X(k\Omega)$ είναι περιοδικό σήμα ως προς Ω με περίοδο $\frac{2\pi}{|k|}$. Σχήματα 7.16 και 7.17

Περιοδική Συνέλιξη (1)

- Για περιοδικές ακολουθίες το άθροισμα της συνέλιξης δεν συγκλίνει. Έτσι ορίζεται ένας νέος τελεστής η περιοδική συνέλιξη δύο ακολουθιών που είναι περιοδικές με κοινή περίοδο N

$$\tilde{y}[n] = (\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2)[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\, \tilde{x}_2[n-m]. \qquad (37)$$

- Ας προσπαθήσουμε να δούμε πώς θα κατασκευάσουμε το χρονικώς αντεστραμμένο σήμα $\tilde{x}_2[-m]$ και τα χρονικώς αντεστραμμένα και μετατοπισμένα σήματα $\tilde{x}_2[1-m]$ και $\tilde{x}_2[2-m]$ στηριζόμενοι στα Σχήματα 7.18 και 7.19.

Περιοδική Συνέλιξη (1)

- Για περιοδικές ακολουθίες το άθροισμα της συνέλιξης δεν συγκλίνει. Έτσι ορίζεται ένας νέος τελεστής η περιοδική συνέλιξη δύο ακολουθιών που είναι περιοδικές με κοινή περίοδο N

$$\tilde{y}[n] = (\tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2)[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\, \tilde{x}_2[n-m]. \tag{37}$$

- Ας προσπαθήσουμε να δούμε πώς θα κατασκευάσουμε το χρονικώς αντεστραμμένο σήμα $\tilde{x}_2[-m]$ και τα χρονικώς αντεστραμμένα και μετατοπισμένα σήματα $\tilde{x}_2[1-m]$ και $\tilde{x}_2[2-m]$ στηριζόμενοι στα Σχήματα 7.18 και 7.19.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Περιοδική Συνέλιξη (2)

Κυκλική Μετατόπιση.

- Παρατηρούμε ότι τα σήματα $\tilde{x}_2[1-m]$ και $\tilde{x}_2[2-m]$ προκύπτουν από κυκλικές μετατοπίσεις δειγμάτων της πρώτης περιόδου του σήματος $\tilde{x}_2[-m]$.
- Ισχύει $\tilde{y}[n+N] = \tilde{y}[n]$, επειδή πρόκειται για περιοδική ακολουθία με περίοδο N. Για την περιοδική συνέλιξη ισχύει ανάλογη ιδιότητα, όπως και για την μη-περιοδική, δηλαδή, αν $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, και $\{c_k\}$ είναι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier των $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ και $\tilde{y}[n]$ αντιστοίχως, τότε

$$c_k = N\,a_k\,b_k. \tag{38}$$

- Η πιο σημαντική χρήση της ιδιότητας αυτής για τους συντελεστές της σειράς Fourier είναι η εφαρμογή της μαζί με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) στον υπολογισμό της μη-περιοδικής συνέλιξης δυο ακολουθιών πεπερασμένης διάρκειας.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Περιοδική Συνέλιξη (2)

Κυκλική Μετατόπιση.

- Παρατηρούμε ότι τα σήματα $\tilde{x}_2[1-m]$ και $\tilde{x}_2[2-m]$ προκύπτουν από κυκλικές μετατοπίσεις δειγμάτων της πρώτης περιόδου του σήματος $\tilde{x}_2[-m]$.
- Ισχύει $\tilde{y}[n+N] = \tilde{y}[n]$, επειδή πρόκειται για περιοδική ακολουθία με περίοδο N. Για την περιοδική συνέλιξη ισχύει ανάλογη ιδιότητα, όπως και για την μη-περιοδική, δηλαδή, αν $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, και $\{c_k\}$ είναι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier των $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ και $\tilde{y}[n]$ αντιστοίχως, τότε

$$c_k = N\, a_k\, b_k. \tag{38}$$

- Η πιο σημαντική χρήση της ιδιότητας αυτής για τους συντελεστές της σειράς Fourier είναι η εφαρμογή της μαζί με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) στον υπολογισμό της μη-περιοδικής συνέλιξης δυο ακολουθιών πεπερασμένης διάρκειας.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Περιοδική Συνέλιξη (2)

Κυκλική Μετατόπιση.

- Παρατηρούμε ότι τα σήματα $\tilde{x}_2[1-m]$ και $\tilde{x}_2[2-m]$ προκύπτουν από κυκλικές μετατοπίσεις δειγμάτων της πρώτης περιόδου του σήματος $\tilde{x}_2[-m]$.
- Ισχύει $\tilde{y}[n+N] = \tilde{y}[n]$, επειδή πρόκειται για περιοδική ακολουθία με περίοδο N. Για την περιοδική συνέλιξη ισχύει ανάλογη ιδιότητα, όπως και για την μη-περιοδική, δηλαδή, αν $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, και $\{c_k\}$ είναι οι συντελεστές της διακριτής σειράς Fourier των $\tilde{x}_1[n]$, $\tilde{x}_2[n]$ και $\tilde{y}[n]$ αντιστοίχως, τότε

$$c_k = N\, a_k\, b_k. \tag{38}$$

- Η πιο σημαντική χρήση της ιδιότητας αυτής για τους συντελεστές της σειράς Fourier είναι η εφαρμογή της μαζί με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) στον υπολογισμό της μη-περιοδικής συνέλιξης δυο ακολουθιών πεπερασμένης διάρκειας.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (1)

- Έστω

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 0 \qquad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 - 1, \\ x_2[n] &= 0 \qquad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_2 - 1. \end{aligned} \tag{39}$$

- Έστω $y[n]$ η μη-περιοδική (αλλιώς γραμμική) συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$. Τότε:

$$y[n] = (x_1 * x_2)[n] = 0, \qquad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 1. \tag{40}$$

- Αν επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο $N \geq N_1 + N_2 - 1$ και ορίσουμε δυο σήματα

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &= x_1[n], \quad 0 \leq n < N \\ \tilde{x}_2[n] &= x_2[n], \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \tag{41}$$

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (1)

- Έστω

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 0 \qquad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 - 1, \\ x_2[n] &= 0 \qquad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_2 - 1. \end{aligned} \tag{39}$$

- Έστω $y[n]$ η μη-περιοδική (αλλιώς γραμμική) συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$. Τότε:

$$y[n] = (x_1 * x_2)[n] = 0, \qquad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 1. \tag{40}$$

- Αν επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο $N \geq N_1 + N_2 - 1$ και ορίσουμε δυο σήματα

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &= x_1[n], \quad 0 \leq n < N \\ \tilde{x}_2[n] &= x_2[n], \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \tag{41}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (1)

- Έστω

$$\begin{aligned} x_1[n] &= 0 \quad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 - 1, \\ x_2[n] &= 0 \quad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_2 - 1. \end{aligned} \tag{39}$$

- Έστω $y[n]$ η μη-περιοδική (αλλιώς γραμμική) συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$. Τότε:

$$y[n] = (x_1 * x_2)[n] = 0, \quad \text{εκτός του διαστήματος } 0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 1. \tag{40}$$

- Αν επιλέξουμε έναν οποιοδήποτε ακέραιο $N \geq N_1 + N_2 - 1$ και ορίσουμε δυο σήματα

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1[n] &= x_1[n], \quad 0 \leq n < N \\ \tilde{x}_2[n] &= x_2[n], \quad 0 \leq n < N \end{aligned} \tag{41}$$

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

- τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο N και υπολογίσουμε την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\, \tilde{x}_2[n-m] \tag{42}$$

- τότε

$$y[n] = \tilde{y}[n] \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{43}$$

- Συνεπώς καταλήγουμε στον εξής αλγόριθμο υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης.
  - Παραγεμίζουμε τις ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$ με μηδενικά κατασκευάζοντας τις $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ επιλέγοντας την περίοδο N, ώστε $N \geq N_1 + N_2 - 1$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

- τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο N και υπολογίσουμε την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\,\tilde{x}_2[n-m] \tag{42}$$

- τότε

$$y[n] = \tilde{y}[n] \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{43}$$

- Συνεπώς καταλήγουμε στον εξής αλγόριθμο υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης.
  - Παραγεμίζουμε τις ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$ με μηδενικά κατασκευάζοντας τις $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ επιλέγοντας την περίοδο N, ώστε $N \geq N_1 + N_2 - 1$.
  - Για $N \geq N_1 + N_2 - 1$ η γραμμική συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$ ισούται με την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$. Οπότε αρκεί:

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

- τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο N και υπολογίσουμε την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\, \tilde{x}_2[n-m] \tag{42}$$

- τότε

$$y[n] = \tilde{y}[n] \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{43}$$

- Συνεπώς καταλήγουμε στον εξής αλγόριθμο υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης.
  - Παραγεμίζουμε τις ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$ με μηδενικά κατασκευάζοντας τις $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ επιλέγοντας την περίοδο N, ώστε $N \geq N_1 + N_2 - 1$.
  - Για $N \geq N_1 + N_2 - 1$ η γραμμική συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$ ισούται με την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$. Οπότε αρκεί:

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

- τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο N και υπολογίσουμε την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\,\tilde{x}_2[n-m] \tag{42}$$

- τότε

$$y[n] = \tilde{y}[n] \quad 0 \leq n \leq N-1. \tag{43}$$

- Συνεπώς καταλήγουμε στον εξής αλγόριθμο υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης.
  - Παραγεμίζουμε τις ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$ με μηδενικά κατασκευάζοντας τις $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ επιλέγοντας την περίοδο N, ώστε $N \geq N_1 + N_2 - 1$.
  - Για $N \geq N_1 + N_2 - 1$ η γραμμική συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$ ισούται με την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$. Οπότε αρκεί:

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

- τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο N και υπολογίσουμε την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$

$$\tilde{y}[n] = \sum_{m=<N>} \tilde{x}_1[m]\,\tilde{x}_2[n-m] \qquad (42)$$

- τότε

$$y[n] = \tilde{y}[n] \quad 0 \leq n \leq N-1. \qquad (43)$$

- Συνεπώς καταλήγουμε στον εξής αλγόριθμο υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης.
  - Παραγεμίζουμε τις ακολουθίες $x_1[n]$ και $x_2[n]$ με μηδενικά κατασκευάζοντας τις $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$ επιλέγοντας την περίοδο N, ώστε $N \geq N_1 + N_2 - 1$.
  - Για $N \geq N_1 + N_2 - 1$ η γραμμική συνέλιξη των $x_1[n]$ και $x_2[n]$ ισούται με την περιοδική συνέλιξη των $\tilde{x}_1[n]$ και $\tilde{x}_2[n]$. Οπότε αρκεί:

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

1. Υπολογισμός των DFTs $\tilde{X}_1[k]$ και $\tilde{X}_2[k]$ των $x_1[n]$ και $x_2[n]$.
2. Πολλαπλασιασμός των DFTs για τον υπολογισμό του DFT της $y[n]$

$$\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\,\tilde{X}_2[k]. \tag{44}$$

3. Υπολογισμός του αντίστροφου DFT της $\tilde{Y}[k]$. Το αποτέλεσμα είναι η επιθυμητή συνέλιξη $y[n]$.

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

1. Υπολογισμός των DFTs $\tilde{X}_1[k]$ και $\tilde{X}_2[k]$ των $x_1[n]$ και $x_2[n]$.
2. Πολλαπλασιασμός των DFTs για τον υπολογισμό του DFT της $y[n]$

$$\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\,\tilde{X}_2[k]. \tag{44}$$

3. Υπολογισμός του αντίστροφου DFT της $\tilde{Y}[k]$. Το αποτέλεσμα είναι η επιθυμητή συνέλιξη $y[n]$.

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης (2)

1. Υπολογισμός των DFTs $\tilde{X}_1[k]$ και $\tilde{X}_2[k]$ των $x_1[n]$ και $x_2[n]$.
2. Πολλαπλασιασμός των DFTs για τον υπολογισμό του DFT της $y[n]$

$$\tilde{Y}[k] = \tilde{X}_1[k]\,\tilde{X}_2[k]. \tag{44}$$

3. Υπολογισμός του αντίστροφου DFT της $\tilde{Y}[k]$. Το αποτέλεσμα είναι η επιθυμητή συνέλιξη $y[n]$.

Ιδιότητα της διαμόρφωσης

- Έστω $y[n] = x_1[n]x_2[n]$. Αν $x_1[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$ και $x_2[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega)$
- ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του σήματος $y[n]$ δίνεται από την

$$
\begin{aligned}
Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, x_2[n]\, e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, e^{j\theta n}\, d\theta \right\} e^{-j\Omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\, e^{-j(\Omega-\theta)n} \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, X_2(\Omega-\theta)\, d\theta. \qquad (45)
\end{aligned}
$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Ιδιότητα της διαμόρφωσης

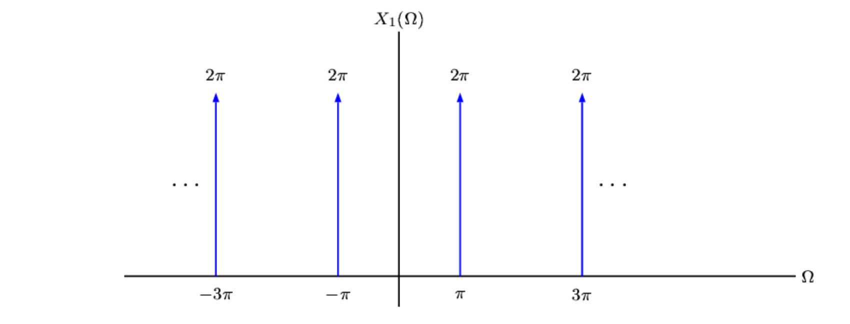
- Έστω $y[n] = x_1[n]x_2[n]$. Αν $x_1[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\Omega)$ και $x_2[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\Omega)$
- ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. του σήματος $y[n]$ δίνεται από την

$$\begin{aligned}
Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\, x_2[n]\, e^{-j\Omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, e^{j\theta n}\, d\theta \right\} e^{-j\Omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]\, e^{-j(\Omega-\theta)n} \right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, X_2(\Omega-\theta)\, d\theta. \qquad (45)
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.15 (1)

- Έστω $x_1[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n$.
- Τότε

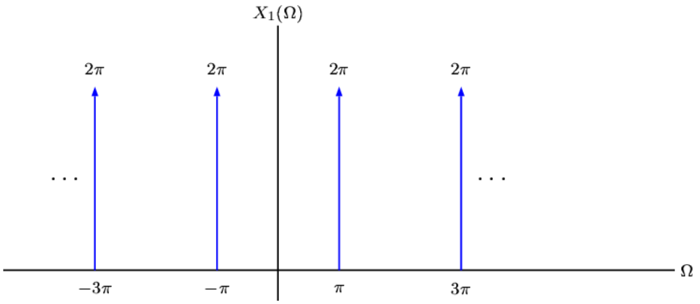
$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - (2r+1)\pi). \qquad (46)$$



Παράδειγμα 7.15 (1)

- Έστω $x_1[n] = e^{j\pi n} = (-1)^n$.
- Τότε

$$X_1(\Omega) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - (2r+1)\pi). \tag{46}$$



Παράδειγμα 7.15 (2)

- Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$ έχουμε

$$X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta) = 2\pi\, X_2(\Omega-\theta)\,\delta(\theta-\pi) = 2\pi X_2(\Omega-\pi)\,\delta(\theta-\pi) \quad (47)$$

- οπότε

$$Y(\Omega) = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega-\pi)\,\delta(\theta-\pi)\,d\theta = X_2(\Omega-\pi). \quad (48)$$

- Πολλαπλασιασμός επί $(-1)^n$ έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή χαμηλών και υψηλών φασματικών περιοχών στο φάσμα της ακολουθίας εισόδου.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου

Παράδειγμα 7.15 (2)

- Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$ έχουμε

$$X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta) = 2\pi\, X_2(\Omega-\theta)\,\delta(\theta-\pi) = 2\pi X_2(\Omega-\pi)\,\delta(\theta-\pi) \quad (47)$$

- οπότε

$$Y(\Omega) = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega-\pi)\,\delta(\theta-\pi)\,d\theta = X_2(\Omega-\pi). \quad (48)$$

- Πολλαπλασιασμός επί $(-1)^n$ έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή χαμηλών και υψηλών φασματικών περιοχών στο φάσμα της ακολουθίας εισόδου.

Παράδειγμα 7.15 (2)

- Στο διάστημα $\Omega \in [0, 2\pi)$ έχουμε

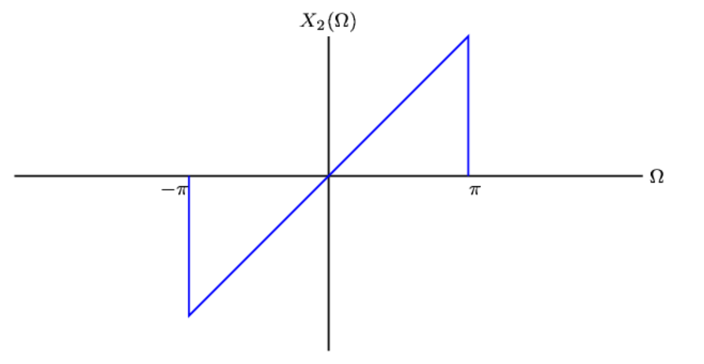
$$X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta) = 2\pi\, X_2(\Omega-\theta)\,\delta(\theta-\pi) = 2\pi X_2(\Omega-\pi)\,\delta(\theta-\pi) \quad (47)$$

- οπότε

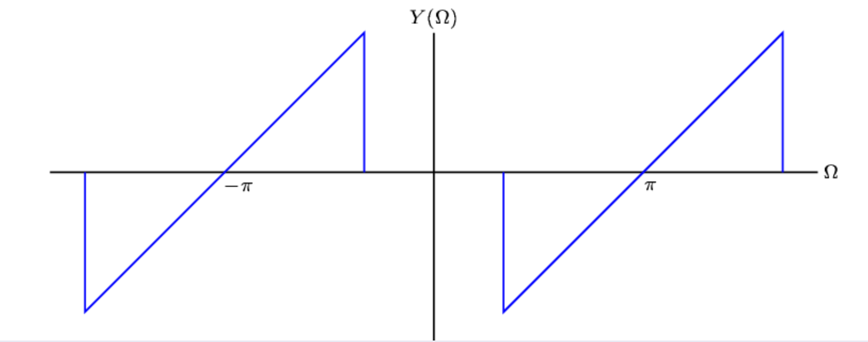
$$Y(\Omega) = \int_0^{2\pi} X_2(\Omega-\pi)\,\delta(\theta-\pi)\,d\theta = X_2(\Omega-\pi). \quad (48)$$

- Πολλαπλασιασμός επί $(-1)^n$ έχει ως αποτέλεσμα την εναλλαγή χαμηλών και υψηλών φασματικών περιοχών στο φάσμα της ακολουθίας εισόδου.

Παράδειγμα 7.15: Μετασχηματισμός Fourier $X_2(\Omega)$



Παράδειγμα 7.15: Μετασχηματισμός Fourier $Y(\Omega)$



Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ.

Δυαδικές Ιδιότητες

Διακριτή σειρά Fourier (1)

- Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συμμετρία μεταξύ της εξίσωσης ανάλυσης και της εξίσωσης σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. Ωστόσο υπάρχει τέτοια συμμετρία στον ορισμό της διακριτής σειράς Fourier. Πράγματι, έστω μια ταυτότητα μεταξύ δύο περιοδικών ακολουθιών $f[m]$ και $g[m]$ της ίδιας περιόδου N

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=<N>} g[r]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}m}. \tag{49}$$

- Αν αντικαταστήσουμε $k = m$ και $r = n$ τότε

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} g[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{50}$$

οπότε συνάγουμε ότι οι περιοδικές ακολουθίες $g[n]$ και $f[k]$ αποτελούν ένα ζεύγος διακριτής σειράς, $g[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} f[k]$.

Διακριτή σειρά Fourier (1)

- Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συμμετρία μεταξύ της εξίσωσης ανάλυσης και της εξίσωσης σύνθεσης του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. Ωστόσο υπάρχει τέτοια συμμετρία στον ορισμό της διακριτής σειράς Fourier. Πράγματι, έστω μια ταυτότητα μεταξύ δύο περιοδικών ακολουθιών $f[m]$ και $g[m]$ της ίδιας περιόδου N

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=<N>} g[r]\, e^{-jr\frac{2\pi}{N}m}. \tag{49}$$

- Αν αντικαταστήσουμε $k = m$ και $r = n$ τότε

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} g[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{50}$$

οπότε συνάγουμε ότι οι περιοδικές ακολουθίες $g[n]$ και $f[k]$ αποτελούν ένα ζεύγος διακριτής σειράς, $g[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} f[k]$.

Δυαδικές Ιδιότητες

Διακριτή σειρά Fourier (2)

- Αν θέσουμε στην (49) $m = n$ και $r = -k$ παίρνουμε

$$f[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} g[-k] \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{51}$$

οπότε $f[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]$.

- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Δυαδικές Ιδιότητες

Διακριτή σειρά Fourier (2)

- Αν θέσουμε στην (49) $m = n$ και $r = -k$ παίρνουμε

$$f[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} g[-k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{51}$$

οπότε $f[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]$.

- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
  1. Οι συντελεστές σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος, a_k, είναι περιοδική ακολουθία.
  2. Ως περιοδική ακολουθία μπορούν να επεκταθούν σε σειρά Fourier.
  3. Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής ακολουθίας a_k πρέπει να είναι οι τιμές $\frac{1}{N}x[-n]$, ανάλογες των αρχικών τιμών του σήματος, αλλά ανεστραμμένες στο χρόνο.

Διακριτή σειρά Fourier (2)

- Αν θέσουμε στην (49) $m = n$ και $r = -k$ παίρνουμε

$$f[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} g[-k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{51}$$

οπότε $f[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]$.

- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
  1. Οι συντελεστές σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος, a_k, είναι περιοδική ακολουθία.
  2. Ως περιοδική ακολουθία μπορούν να επεκταθούν σε σειρά Fourier.
  3. Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής ακολουθίας a_k πρέπει να είναι οι τιμές $\frac{1}{N}x[-n]$, ανάλογες των αρχικών τιμών του σήματος, αλλά ανεστραμμένες στο χρόνο.

Δυαδικές Ιδιότητες

Διακριτή σειρά Fourier (2)

- Αν θέσουμε στην (49) $m = n$ και $r = -k$ παίρνουμε

$$f[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} g[-k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{51}$$

οπότε $f[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]$.

- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
  1. Οι συντελεστές σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος, a_k, είναι περιοδική ακολουθία.
  2. Ως περιοδική ακολουθία μπορούν να επεκταθούν σε σειρά Fourier.
  3. Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής ακολουθίας a_k πρέπει να είναι οι τιμές $\frac{1}{N}x[-n]$, ανάλογες των αρχικών τιμών του σήματος, αλλά ανεστραμμένες στο χρόνο.

Διακριτή σειρά Fourier (2)

- Αν θέσουμε στην (49) $m = n$ και $r = -k$ παίρνουμε

$$f[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} g[-k]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \tag{51}$$

  οπότε $f[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} g[-k]$.

- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
  1. Οι συντελεστές σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος, a_k, είναι περιοδική ακολουθία.
  2. Ως περιοδική ακολουθία μπορούν να επεκταθούν σε σειρά Fourier.
  3. Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει οι συντελεστές της σειράς Fourier της περιοδικής ακολουθίας a_k πρέπει να είναι οι τιμές $\frac{1}{N} x[-n]$, ανάλογες των αρχικών τιμών του σήματος, αλλά ανεστραμμένες στο χρόνο.

Διακριτή σειρά Fourier (3)

- Πρακτικές συνέπειες της δυαδικής ιδιότητας είναι τα ζεύγη των ιδιοτήτων:

$$x[n-n_0] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_k\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} \quad (52)$$

$$e^{jM\frac{2\pi}{N}n}\, x[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_{k-M} \quad (53)$$

- και

$$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} N\, a_k\, b_k \quad (54)$$

$$x[n]y[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \sum_{\ell=<N>} a_\ell\, b_{k-\ell} \quad (55)$$

Διακριτή σειρά Fourier (3)

- Πρακτικές συνέπειες της δυαδικής ιδιότητας είναι τα ζεύγη των ιδιοτήτων:

$$x[n-n_0] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_k\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0} \tag{52}$$

$$e^{jM\frac{2\pi}{N}n}\, x[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_{k-M} \tag{53}$$

- και

$$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} N\, a_k\, b_k \tag{54}$$

$$x[n]y[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \sum_{\ell=<N>} a_\ell\, b_{k-\ell} \tag{55}$$

Δυαδικές Ιδιότητες

Διακριτή σειρά Fourier (4)

Έστω $x[n] \overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_k$. Η απόδειξη της (53) έχει ως εξής.

$$\begin{aligned}
a_k &\overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}x[-n] \quad \text{δυαδική ιδιότητα} \\
a_{k-M} &\overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}x[-n]\, e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{ιδιότητα της μετατόπισης} \\
Na_{k-M} &\overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} x[-n]\, e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} \quad \text{γραμμικότητα} \\
x[-n]\, e^{-jM\frac{2\pi}{N}n} &\overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_{(-k)-M} \quad \text{δυαδική ιδιότητα} \\
x[n]\, e^{jM\frac{2\pi}{N}n} &\overset{\mathcal{DFS}}{\longleftrightarrow} a_{k-M} \quad \text{χρονική αναστροφή} \qquad (56)
\end{aligned}$$

Γίνεται φανερό ότι αξιοποιώντας τη δυαδική ιδιότητα επιτυγχάνεται ελάττωση των υπολογισμών και διπλή αξιοποίηση του Πίνακα ιδιοτήτων της διακριτής σειράς Fourier.

Δυαδικές Ιδιότητες

Παράδειγμα 7.16

- Έστω
$$x[n] = \frac{1}{N}\frac{\sin[(\frac{2\pi n}{N})(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{2\pi n}{2N})}. \tag{57}$$
- Αναγνωρίζουμε ότι πρόκειται για την ακολουθία των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier μιας περιοδικής τετραγωνικής παλμοσειράς διάρκειας $2N_1 + 1$ και περιόδου N.
- Άρα οι συντελεστές της σειράς Fourier της $x[n]$ θα είναι $\frac{1}{N}$ επί τα δείγματα της τετραγωνικής παλμοσειράς ανεστραμμένα στο χρόνο. Λόγω συμμετρίας δεν επέρχεται καμιά μεταβολή.

Συντελεστές σειράς Fourier της ακολουθίας $x[n]$ που ορίζεται στην (57) για $N_1 = 4$ και $N = 12$.

Παράδειγμα 7.16

- Έστω

$$x[n] = \frac{1}{N} \frac{\sin[(\frac{2\pi n}{N})(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{2\pi n}{2N})}. \quad (57)$$

- Αναγνωρίζουμε ότι πρόκειται για την ακολουθία των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier μιας περιοδικής τετραγωνικής παλμοσειράς διάρκειας $2N_1 + 1$ και περιόδου N.
- Άρα οι συντελεστές της σειράς Fourier της $x[n]$ θα είναι $\frac{1}{N}$ επί τα δείγματα της τετραγωνικής παλμοσειράς ανεστραμμένα στο χρόνο. Λόγω συμμετρίας δεν επέρχεται καμιά μεταβολή.

Συντελεστές σειράς Fourier της ακολουθίας $x[n]$ που ορίζεται στην (57) για $N_1 = 4$ και $N = 12$.

Δυαδικές Ιδιότητες

Παράδειγμα 7.16

- Έστω
$$x[n] = \frac{1}{N}\frac{\sin[(\frac{2\pi n}{N})(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{2\pi n}{2N})}. \tag{57}$$
- Αναγνωρίζουμε ότι πρόκειται για την ακολουθία των συντελεστών της διακριτής σειράς Fourier μιας περιοδικής τετραγωνικής παλμοσειράς διάρκειας $2N_1 + 1$ και περιόδου N.
- Άρα οι συντελεστές της σειράς Fourier της $x[n]$ θα είναι $\frac{1}{N}$ επί τα δείγματα της τετραγωνικής παλμοσειράς ανεστραμμένα στο χρόνο. Λόγω συμμετρίας δεν επέρχεται καμιά μεταβολή.

Συντελεστές σειράς Fourier της ακολουθίας $x[n]$ που ορίζεται στην (57) για $N_1 = 4$ και $N = 12$.

Δυαδικές Ιδιότητες

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (1)

Υπάρχει επίσης δυαδικότητα μεταξύ του μετασχηματισμού Fourier Δ.Χ. και της σειράς Fourier Σ.Χ., όπως προκύπτει από την αντιπαραβολή των εξισώσεων ορισμού των.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (2)

- Έστω $f(u)$ περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής με περίοδο 2π και $g[m]$ μη-περιοδική ακολουθία που σχετίζεται με την $f(u)$ δια της σχέσεως

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m]\, e^{-jum}. \tag{58}$$

- Αν $u = \Omega$ και $m = n$, τότε $f(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της $g[n]$, δηλαδή $g[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} f(\Omega)$, οπότε

$$g[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(u)\, e^{jum}\, du. \tag{59}$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (2)

- Έστω $f(u)$ περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής με περίοδο 2π και $g[m]$ μη-περιοδική ακολουθία που σχετίζεται με την $f(u)$ δια της σχέσεως

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m]\, e^{-jum}. \tag{58}$$

- Αν $u = \Omega$ και $m = n$, τότε $f(\Omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. της $g[n]$, δηλαδή $g[n] \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} f(\Omega)$, οπότε

$$g[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(u)\, e^{jum}\, du. \tag{59}$$

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (3)

- Έστω $u = t$ και $m = -k$. Τότε

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]\, e^{jtk}. \qquad (60)$$

- Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi = T_0$, άρα $\omega_0 = 1$. Επομένως η $g[-k]$ είναι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier Σ.Χ. της $f(t)$, δηλαδή $f(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} g[-k]$.
- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και πάλι τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Δυαδικές Ιδιότητες

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (3)

- Έστω $u = t$ και $m = -k$. Τότε

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]\, e^{jtk}. \tag{60}$$

- Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi = T_0$, άρα $\omega_0 = 1$. Επομένως η $g[-k]$ είναι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier Σ.Χ. της $f(t)$, δηλαδή $f(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} g[-k]$.
- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και πάλι τα αποτελέσματα της ανάλυσης.

Δυαδικές Ιδιότητες

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (3)

- Έστω $u = t$ και $m = -k$. Τότε

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]\, e^{jtk}. \tag{60}$$

- Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi = T_0$, άρα $\omega_0 = 1$. Επομένως η $g[-k]$ είναι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier Σ.Χ. της $f(t)$, δηλαδή $f(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} g[-k]$.
- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και πάλι τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
  1. Το $x[n]$ είναι σήμα διακριτού χρόνου με μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$.
  2. Ο $X(\Omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς Ω με περίοδο 2π, άρα επεκτάσιμη σε σειρά Fourier Σ.Χ. με $\omega_0 = 1$.
  3. Οι συντελεστές Fourier Σ.Χ. της $X(\Omega)$ θα είναι η αρχική ακολουθία ανεστραμμένη στο χρόνο.

Δυαδικές Ιδιότητες

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (3)

- Έστω $u = t$ και $m = -k$. Τότε

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]\, e^{jtk}. \tag{60}$$

- Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi = T_0$, άρα $\omega_0 = 1$. Επομένως η $g[-k]$ είναι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier Σ.Χ. της $f(t)$, δηλαδή $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} g[-k]$.
- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και πάλι τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
    1. Το $x[n]$ είναι σήμα διακριτού χρόνου με μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$.
    2. Ο $X(\Omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς Ω με περίοδο 2π, άρα επεκτάσιμη σε σειρά Fourier Σ.Χ. με $\omega_0 = 1$.
    3. Οι συντελεστές Fourier Σ.Χ. της $X(\Omega)$ θα είναι η αρχική ακολουθία ανεστραμμένη στο χρόνο.

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (3)

- Έστω $u = t$ και $m = -k$. Τότε

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]\, e^{jtk}. \tag{60}$$

- Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi = T_0$, άρα $\omega_0 = 1$. Επομένως η $g[-k]$ είναι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier Σ.Χ. της $f(t)$, δηλαδή $f(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} g[-k]$.
- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και πάλι τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
    1. Το $x[n]$ είναι σήμα διακριτού χρόνου με μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$.
    2. Ο $X(\Omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς Ω με περίοδο 2π, άρα επεκτάσιμη σε σειρά Fourier Σ.Χ. με $\omega_0 = 1$.
    3. Οι συντελεστές Fourier Σ.Χ. της $X(\Omega)$ θα είναι η αρχική ακολουθία ανεστραμμένη στο χρόνο.

Δυαδικές Ιδιότητες

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (3)

- Έστω $u = t$ και $m = -k$. Τότε

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[-k]\, e^{jtk}. \tag{60}$$

- Η $f(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $2\pi = T_0$, άρα $\omega_0 = 1$. Επομένως η $g[-k]$ είναι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier Σ.Χ. της $f(t)$, δηλαδή $f(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} g[-k]$.
- Ας προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε και πάλι τα αποτελέσματα της ανάλυσης.
    1. Το $x[n]$ είναι σήμα διακριτού χρόνου με μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$.
    2. Ο $X(\Omega)$ είναι περιοδική συνάρτηση ως προς Ω με περίοδο 2π, άρα επεκτάσιμη σε σειρά Fourier Σ.Χ. με $\omega_0 = 1$.
    3. Οι συντελεστές Fourier Σ.Χ. της $X(\Omega)$ θα είναι η αρχική ακολουθία ανεστραμμένη στο χρόνο.

Δυαδικές Ιδιότητες

Μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. και σειρά Fourier Σ.Χ. (4)

Πρακτική συνέπεια της δυαδικής ιδιότητας είναι τα ζεύγη των ιδιοτήτων για την περιοδική συνέλιξη στη σειρά Fourier Σ.Χ. και της διαμόρφωσης στο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ.

$$\int_{2\pi} x_1(r)\, x_2(t-r)\, dr \quad \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi a_k b_k \tag{61}$$

$$a[n]b[n] \quad \overset{\mathcal{FT}-\mathcal{DT}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\theta)\, X_2(\Omega-\theta)\, d\theta. \tag{62}$$

Παράδειγμα 7.17 (1)

- (α) Έστω περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με περίοδο 2π και συντελεστές σειράς Fourier Σ.Χ.

$$a_k = \begin{cases} 1 & |k| \leq N_1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{63}$$

- Το σήμα διακριτού χρόνου a_k είναι ένας μη-περιοδικός τετραγωνικός παλμός. Από τον μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. του τετραγωνικού παλμού συνάγουμε ότι το αρχικό σήμα δεν είναι άλλο από το

$$x(t) = \frac{\sin(N_1 + \frac{1}{2})t}{\sin(t/2)} \tag{64}$$

συνέπεια της δυαδικότητας.

Παράδειγμα 7.17 (1)

- (α) Έστω περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $x(t)$ με περίοδο 2π και συντελεστές σειράς Fourier Σ.Χ.

$$a_k = \begin{cases} 1 & |k| \leq N_1 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{63}$$

- Το σήμα διακριτού χρόνου a_k είναι ένας μη-περιοδικός τετραγωνικός παλμός. Από τον μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. του τετραγωνικού παλμού συνάγουμε ότι το αρχικό σήμα δεν είναι άλλο από το

$$x(t) = \frac{\sin(N_1 + \frac{1}{2})t}{\sin(t/2)} \tag{64}$$

συνεπεία της δυαδικότητας.

Παράδειγμα 7.17 (2)

- (β) Αν δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$, που ορίζεται στο διάστημα $-\pi \leq \Omega \leq \pi$,

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \tag{65}$$

- τότε ο $X(\Omega)$ ως συνεχής περιοδικός τετραγωνικός παλμός θα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Σ.Χ. με συντελεστές

$$\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\Big|_{T_1=W,\omega_0=1} = \frac{\sin(k\,W)}{k\pi}. \tag{66}$$

- Ως συνέπεια της δυαδικότητας το σήμα $x[n]$ που έχει το δοσμένο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. θα είναι

$$x[n] = \frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wn), \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{67}$$

Παράδειγμα 7.17 (2)

- (β) Αν δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$, που ορίζεται στο διάστημα $-\pi \leq \Omega \leq \pi$,

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \tag{65}$$

- τότε ο $X(\Omega)$ ως συνεχής περιοδικός τετραγωνικός παλμός θα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Σ.Χ. με συντελεστές

$$\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\Big|_{T_1=W,\omega_0=1} = \frac{\sin(k\,W)}{k\pi}. \tag{66}$$

- Ως συνέπεια της δυαδικότητας το σήμα $x[n]$ που έχει το δοσμένο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. θα είναι

$$x[n] = \frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wn), \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{67}$$

Δυαδικές Ιδιότητες

Παράδειγμα 7.17 (2)

- (β) Αν δίδεται ο μετασχηματισμός Fourier Δ.Χ. $X(\Omega)$, που ορίζεται στο διάστημα $-\pi \leq \Omega \leq \pi$,

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < W \\ 0 & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \tag{65}$$

- τότε ο $X(\Omega)$ ως συνεχής περιοδικός τετραγωνικός παλμός θα επεκτείνεται σε σειρά Fourier Σ.Χ. με συντελεστές

$$\frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}\Big|_{T_1=W,\omega_0=1} = \frac{\sin(k\,W)}{k\pi}. \tag{66}$$

- Ως συνέπεια της δυαδικότητας το σήμα $x[n]$ που έχει το δοσμένο μετασχηματισμό Fourier Δ.Χ. θα είναι

$$x[n] = \frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wn), \quad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{67}$$

Δυαδικές Ιδιότητες

Πίνακας Δυαδικών Ιδιοτήτων

Εργαλείο	Πεδίο Χρόνου	Πεδίο Συχνότητας
CT-FS	$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$ περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \, e^{-jk\omega_0 t} dt$ μη-περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής
CT-FT	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \, e^{j\omega t} \, d\omega$ μη-περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-j\omega t} \, dt$ μη-περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής
DFS	$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$ περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής	$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \, e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$ περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής
DT-FT	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) \, e^{j\Omega n} \, d\Omega$ μη-περιοδική συνάρτηση διακριτής μεταβλητής	$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \, e^{-j\Omega n}$ περιοδική συνάρτηση συνεχούς μεταβλητής

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης