Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου - Μετασχηματισμός Fourier

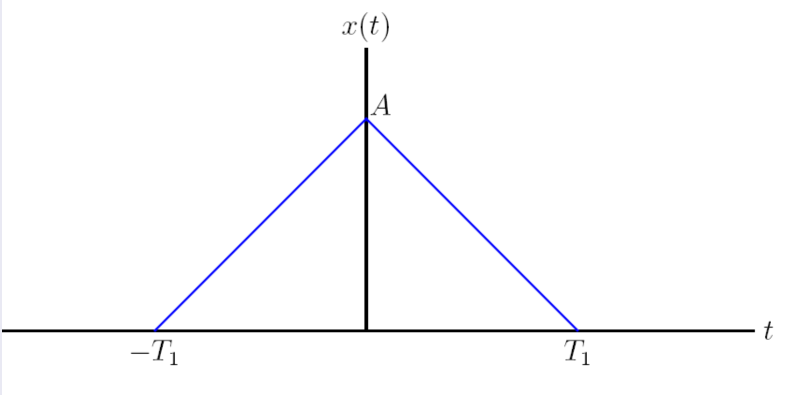
Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

Εξαγωγή (1)

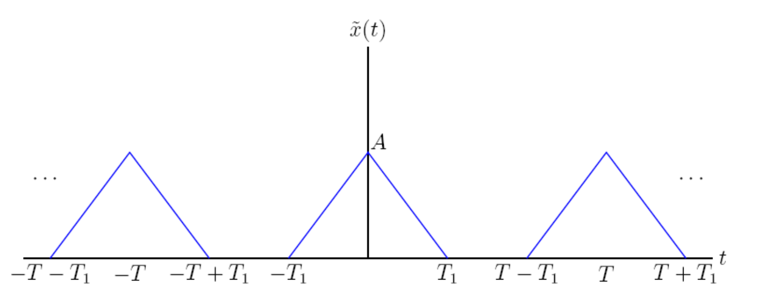
Έστω το μη περιοδικό σήμα $x(t)$ που εκτείνεται από $-T_1$ ως T_1



Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (1)

- Κατασκευάζουμε ένα περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, έτσι ώστε από το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ να μπορεί να αποκαλυφθεί το μη-περιοδικό $x(t)$



- Κατάλληλες τιμές του T ικανοποιούν τη σχέση $T \geq 2\,T_1$.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (2)

- Το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ μπορεί να παρασταθεί με την άπειρη εκθετική σειρά Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

- όπου $X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$.
- Αλλά $\tilde{x}(t) = x(t)$ για $|t| \le \frac{T}{2}$, οπότε $X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$.
- Επιπλέον όμως ισχύει ότι $x(t) = 0$ για $|t| > \frac{T}{2}$. Συνεπώς

$$X_n = \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}_{X(n\omega_0)} = \frac{1}{T}X(n\omega_0) \tag{2}$$

- όπου

$$X(n\omega_0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{3}$$

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (2)

- Το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ μπορεί να παρασταθεί με την άπειρη εκθετική σειρά Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

- όπου $X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$.
- Αλλά $\tilde{x}(t) = x(t)$ για $|t| \leq \frac{T}{2}$, οπότε $X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$.
- Επιπλέον όμως ισχύει ότι $x(t) = 0$ για $|t| > \frac{T}{2}$. Συνεπώς

$$X_n = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt}_{X(n\omega_0)} = \frac{1}{T} X(n\omega_0) \tag{2}$$

- όπου

$$X(n\omega_0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt. \tag{3}$$

Εξαγωγή (2)

- Το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ μπορεί να παρασταθεί με την άπειρη εκθετική σειρά Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

- όπου $X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$.
- Αλλά $\tilde{x}(t) = x(t)$ για $|t| \leq \frac{T}{2}$, οπότε $X_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$.
- Επιπλέον όμως ισχύει ότι $x(t) = 0$ για $|t| > \frac{T}{2}$. Συνεπώς

$$X_n = \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}_{X(n\omega_0)} = \frac{1}{T}X(n\omega_0) \tag{2}$$

- όπου

$$X(n\omega_0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{3}$$

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (2)

- Το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ μπορεί να παρασταθεί με την άπειρη εκθετική σειρά Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

- όπου $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$.
- Αλλά $\tilde{x}(t) = x(t)$ για $|t| \leq \frac{T}{2}$, οπότε $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$.
- Επιπλέον όμως ισχύει ότι $x(t) = 0$ για $|t| \geq \frac{T}{2}$. Συνεπώς

$$X_n = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt}_{X(n\omega_0)} = \frac{1}{T} X(n\omega_0) \tag{2}$$

- όπου

$$X(n\omega_0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt. \tag{3}$$

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (2)

- Το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ μπορεί να παρασταθεί με την άπειρη εκθετική σειρά Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \, e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

- όπου $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$.
- Αλλά $\tilde{x}(t) = x(t)$ για $|t| \leq \frac{T}{2}$, οπότε $X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt$.
- Επιπλέον όμως ισχύει ότι $x(t) = 0$ για $|t| \geq \frac{T}{2}$. Συνεπώς

$$X_n = \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt}_{X(n\omega_0)} = \frac{1}{T} X(n\omega_0) \tag{2}$$

- όπου

$$X(n\omega_0) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt. \tag{3}$$

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (3)

- Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) παίρνουμε

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}. \tag{4}$$

- Επειδή $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, η (4) ξαναγράφεται

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0\, X(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}. \tag{5}$$

- Αν $T \to \infty$, τότε $\omega_0 \to d\omega$, $n\omega_0 \to \omega$, $\tilde{x}(t) \to x(t)$ και το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα.

Εξαγωγή (3)

- Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) παίρνουμε

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}. \tag{4}$$

- Επειδή $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, η (4) ξαναγράφεται

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0\, X(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}. \tag{5}$$

- Αν $T \to \infty$, τότε $\omega_0 \to d\omega$, $n\omega_0 \to \omega$, $\tilde{x}(t) \to x(t)$ και το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (3)

- Αντικαθιστώντας την (2) στην (1) παίρνουμε

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}. \tag{4}$$

- Επειδή $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, η (4) ξαναγράφεται

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0\, X(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}. \tag{5}$$

- Αν $T \to \infty$, τότε $\omega_0 \to \ d\omega$, $n\omega_0 \to \ \omega$, $\tilde{x}(t) \to x(t)$ και το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα.

Εξαγωγή (4)

- Έτσι προκύπτει ο ορισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ή αλλιώς η εξίσωση σύνθεσης

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{6}$$

- ενώ η (3) μεταγράφεται ως

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{7}$$

ορίζοντας τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier ή αλλιώς την εξίσωση ανάλυσης.

- Λέμε ότι $x(t)$ και $X(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμού Fourier $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ ή $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Εξαγωγή (4)

- Έτσι προκύπτει ο ορισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ή αλλιώς η εξίσωση σύνθεσης

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{6}$$

- ενώ η (3) μεταγράφεται ως

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{7}$$

ορίζοντας τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier ή αλλιώς την εξίσωση ανάλυσης.

- Λέμε ότι $x(t)$ και $X(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμού Fourier $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ ή $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$.

Εξαγωγή (4)

- Έτσι προκύπτει ο ορισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier ή αλλιώς η εξίσωση σύνθεσης

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \tag{6}$$

- ενώ η (3) μεταγράφεται ως

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{7}$$

  ορίζοντας τον ευθύ μετασχηματισμό Fourier ή αλλιώς την εξίσωση ανάλυσης.

- Λέμε ότι $x(t)$ και $X(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμού Fourier $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ ή $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$.

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτό συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:
- Τί είδους είναι το φάσμα του μη περιοδικού σήματος $x(t)$;

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτό συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:
    1. Επέκταση σε περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου $T \geq 2T_1$.
    2. Αντικατάσταση του μη περιοδικού σήματος $x(t)$ με το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, όπου το σήμα της πρώτης περιόδου του $\tilde{x}(t)$ είναι το μη περιοδικό σήμα.
- Τί είδους είναι το φάσμα του μη περιοδικού σήματος $x(t)$;

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτό συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:
  1. Επέκταση σε περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου $T \geq 2T_1$.
  2. Αντικατάσταση του μη περιοδικού σήματος $x(t)$ με το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, όπου το σήμα της πρώτης περιόδου του $\tilde{x}(t)$ είναι το μη περιοδικό σήμα.
- Τί είδους είναι το φάσμα του μη περιοδικού σήματος $x(t)$;

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτό συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:
  1. Επέκταση σε περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου $T \geq 2T_1$.
  2. Αντικατάσταση του μη περιοδικού σήματος $x(t)$ με το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, όπου το σήμα της πρώτης περιόδου του $\tilde{x}(t)$ είναι το μη περιοδικό σήμα.
- Τί είδους είναι το φάσμα του μη περιοδικού σήματος $x(t)$;
  1. Μήπως είναι διακριτό, όπου το διάστημα μεταξύ δύο φασματικών γραμμών είναι αντιστρόφως ανάλογο της περιόδου T;

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτό συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:
  1. Επέκταση σε περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου $T \geq 2T_1$.
  2. Αντικατάσταση του μη περιοδικού σήματος $x(t)$ με το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, όπου το σήμα της πρώτης περιόδου του $\tilde{x}(t)$ είναι το μη περιοδικό σήμα.
- Τί είδους είναι το φάσμα του μη περιοδικού σήματος $x(t)$;
  1. Μήπως είναι διακριτό, όπου το διάστημα μεταξύ δύο φασματικών γραμμών είναι αντιστρόφως ανάλογο της περιόδου T;
  2. Ή μήπως είναι συνεχές, όπως υπονοούν οι εξισώσεις ορισμού του μετασχηματισμού Fourier

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτό συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:
  1. Επέκταση σε περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου $T \geq 2T_1$.
  2. Αντικατάσταση του μη περιοδικού σήματος $x(t)$ με το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, όπου το σήμα της πρώτης περιόδου του $\tilde{x}(t)$ είναι το μη περιοδικό σήμα.
- Τί είδους είναι το φάσμα του μη περιοδικού σήματος $x(t)$;
  1. Μήπως είναι διακριτό, όπου το διάστημα μεταξύ δύο φασματικών γραμμών είναι αντιστρόφως ανάλογο της περιόδου T;
  2. Ή μήπως είναι συνεχές, όπως υπονοούν οι εξισώσεις ορισμού του μετασχηματισμού Fourier

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Ένα περιοδικό σήμα αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Το φάσμα ενός περιοδικού σήματος αποτελείται από γραμμές σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους. Λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος είναι διακριτό συγκροτούμενο από γραμμές.
- Ένα μη περιοδικό σήμα $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier κάνοντας τα εξής βήματα:
    1. Επέκταση σε περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ με εκλογή κατάλληλης περιόδου $T \geq 2T_1$.
    2. Αντικατάσταση του μη περιοδικού σήματος $x(t)$ με το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$, όπου το σήμα της πρώτης περιόδου του $\tilde{x}(t)$ είναι το μη περιοδικό σήμα.
- Τί είδους είναι το φάσμα του μη περιοδικού σήματος $x(t)$;
    1. Μήπως είναι διακριτό, όπου το διάστημα μεταξύ δύο φασματικών γραμμών είναι αντιστρόφως ανάλογο της περιόδου T;
    2. Ή μήπως είναι συνεχές, όπως υπονοούν οι εξισώσεις ορισμού του μετασχηματισμού Fourier;

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη περιοδικού σήματος είναι συνεχές.
- Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη περιοδικό σήμα $x(t)$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα σήματα ενέργειας. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
- Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

Παρατηρήσεις

- Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη περιοδικού σήματος είναι συνεχές.
- Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη περιοδικό σήμα $x(t)$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα σήματα ενέργειας. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
- Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη περιοδικού σήματος είναι συνεχές.
- Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη περιοδικό σήμα $x(t)$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα σήματα ενέργειας. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
  1. τα περιοδικά σήματα (σήματα ισχύος)
  2. η βηματική συνάρτηση $u(t)$.
- Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη περιοδικού σήματος είναι συνεχές.
- Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη περιοδικό σήμα $x(t)$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα σήματα ενέργειας. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
    1. τα περιοδικά σήματα (σήματα ισχύος)
    2. η βηματική συνάρτηση $u(t)$.
- Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη περιοδικού σήματος είναι συνεχές.
- Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη περιοδικό σήμα $x(t)$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα σήματα ενέργειας. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
  1. τα περιοδικά σήματα (σήματα ισχύος)
  2. η βηματική συνάρτηση $u(t)$.
- Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη περιοδικού σήματος είναι συνεχές.
- Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη περιοδικό σήμα $x(t)$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα σήματα ενέργειας. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
  1. τα περιοδικά σήματα (σήματα ισχύος)
  2. η βηματική συνάρτηση $u(t)$.
- Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Παρατηρήσεις

- Η σωστή απάντηση στο ερώτημα είναι η δεύτερη. Το φάσμα ενός μη περιοδικού σήματος είναι συνεχές.
- Η φαινομενική διαφωνία μεταξύ των δύο εναλλακτικών απαντήσεων στο ερώτημα αίρεται αν ανατρέξουμε στα βήματα υπολογισμού του φάσματος ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$. Το διακριτό φάσμα αφορά το περιοδικό σήμα $\tilde{x}(t)$ και όχι το μη περιοδικό σήμα $x(t)$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier υπόκειται στις συνθήκες Dirichlet. Επομένως υπάρχει απαίτηση για απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι τα σήματα ενέργειας. Δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις
  1. τα περιοδικά σήματα (σήματα ισχύος)
  2. η βηματική συνάρτηση $u(t)$.
- Σ' αυτές τις περιπτώσεις ο μετασχηματισμός Fourier προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$ που είναι καλώς ορισμένος και τη χρήση των ιδιοτήτων.

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση. Επομένως αναλύεται ως εξής

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j\angle X(\omega)} \tag{8}$$

- όπου $R(\omega) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$, $I(\omega) = \mathrm{Im}\{X(\omega)\}$ και

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \tag{9}$$

$$\angle X(\omega) = \arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)}. \tag{10}$$

- Μας απασχολεί η περίπτωση των πραγματικών σημάτων, δηλαδή $x(t) \in \mathbb{R}$. Τότε

$$X(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos\omega t\, dt}_{R(\omega)} - j\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin\omega t\, dt}_{-I(\omega)}. \tag{11}$$

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση. Επομένως αναλύεται ως εξής

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j\angle X(\omega)} \tag{8}$$

- όπου $R(\omega) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$, $I(\omega) = \mathrm{Im}\{X(\omega)\}$ και

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \tag{9}$$

$$\angle X(\omega) = \arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)}. \tag{10}$$

- Μας απασχολεί η περίπτωση των πραγματικών σημάτων, δηλαδή $x(t) \in \mathbb{R}$. Τότε

$$X(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t \, dt}_{R(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t \, dt}_{-I(\omega)}. \tag{11}$$

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (1)

- Ο μετασχηματισμός Fourier ενός σήματος $x(t)$ είναι γενικά μιγαδική συνάρτηση. Επομένως αναλύεται ως εξής

$$X(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = |X(\omega)|\, e^{j\angle X(\omega)} \tag{8}$$

- όπου $R(\omega) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$, $I(\omega) = \mathrm{Im}\{X(\omega)\}$ και

$$|X(\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \tag{9}$$

$$\angle X(\omega) = \arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)}. \tag{10}$$

- Μας απασχολεί η περίπτωση των πραγματικών σημάτων, δηλαδή $x(t) \in \mathbb{R}$. Τότε

$$X(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t \, dt}_{R(\omega)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t \, dt}_{-I(\omega)}. \tag{11}$$

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (2)

Αν αναλύσουμε το σήμα $x(t)$ σε συνιστώσες άρτιας και περιττής συμμετρίας στο πεδίο του χρόνου και χρησιμοποιήσουμε τις προτάσεις για το ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων άρτιας και περιττής συμμετρίας προκύπτει

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_e(t) + x_o(t)]\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)\, e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)\big(\cos\omega t - j\sin\omega t\big)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)\, \big(\cos\omega t - j\sin\omega t\big)\, dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)\, \cos\omega t\, dt}_{R_e(\omega)} - j\, \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)\, \sin\omega t\, dt}_{-I_o(\omega)} = R_e(\omega) + I_o(\omega) \quad (12) \end{aligned}$$

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (3)

- όπου $R_e(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, άλλα και η συνιστώσα άρτιας συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω, ενώ $I_o(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της περιττής συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα περιττής συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω. Διαπιστώνουμε ότι:
  1. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα άρτιας συμμετρίας ως προς t, τότε $I(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = R(\omega) = R_e(\omega)$.
  2. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας ως προς t, τότε $R(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = j\,I(\omega) = I_o(\omega)$.
  3. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς t, τότε $X(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση που έχει πραγματικό μέρος άρτιας συμμετρίας ως προς ω και φανταστικό μέρος περιττής συμμετρίας ως προς ω.
  4. Το φάσμα μέτρου $|X(\omega)|$ είναι άρτιας συμμετρίας ως προς ω, ενώ το φάσμα φάσης $\angle X(\omega)$ είναι περιττής συμμετρίας ως προς ω.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (3)

- όπου $R_e(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, άλλα και η συνιστώσα άρτιας συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω, ενώ $I_o(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της περιττής συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα περιττής συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω. Διαπιστώνουμε ότι:
  1. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα άρτιας συμμετρίας ως προς t, τότε $I(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = R(\omega) = R_e(\omega)$.
  2. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας ως προς t, τότε $R(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = j\,I(\omega) = I_o(\omega)$.
  3. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς t, τότε $X(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση που έχει πραγματικό μέρος άρτιας συμμετρίας ως προς ω και φανταστικό μέρος περιττής συμμετρίας ως προς ω.
  4. Το φάσμα μέτρου $|X(\omega)|$ είναι άρτιας συμμετρίας ως προς ω, ενώ το φάσμα φάσης $\angle X(\omega)$ είναι περιττής συμμετρίας ως προς ω.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (3)

- όπου $R_e(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, άλλα και η συνιστώσα άρτιας συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω, ενώ $I_o(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της περιττής συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα περιττής συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω. Διαπιστώνουμε ότι:
  1. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα άρτιας συμμετρίας ως προς t, τότε $I(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = R(\omega) = R_e(\omega)$.
  2. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας ως προς t, τότε $R(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = j\, I(\omega) = I_o(\omega)$.
  3. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς t, τότε $X(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση που έχει πραγματικό μέρος άρτιας συμμετρίας ως προς ω και φανταστικό μέρος περιττής συμμετρίας ως προς ω.
  4. Το φάσμα μέτρου $|X(\omega)|$ είναι άρτιας συμμετρίας ως προς ω, ενώ το φάσμα φάσης $\angle X(\omega)$ είναι περιττής συμμετρίας ως προς ω.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (3)

- όπου $R_e(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, άλλα και η συνιστώσα άρτιας συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω, ενώ $I_o(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της περιττής συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα περιττής συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω. Διαπιστώνουμε ότι:
  1. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα άρτιας συμμετρίας ως προς t, τότε $I(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = R(\omega) = R_e(\omega)$.
  2. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας ως προς t, τότε $R(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = j\,I(\omega) = I_o(\omega)$.
  3. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς t, τότε $X(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση που έχει πραγματικό μέρος άρτιας συμμετρίας ως προς ω και φανταστικό μέρος περιττής συμμετρίας ως προς ω.
  4. Το φάσμα μέτρου $|X(\omega)|$ είναι άρτιας συμμετρίας ως προς ω, ενώ το φάσμα φάσης $\angle X(\omega)$ είναι περιττής συμμετρίας ως προς ω.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (3)

- όπου $R_e(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, άλλα και η συνιστώσα άρτιας συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω, ενώ $I_o(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της περιττής συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα περιττής συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω. Διαπιστώνουμε ότι:
  1. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα άρτιας συμμετρίας ως προς t, τότε $I(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = R(\omega) = R_e(\omega)$.
  2. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας ως προς t, τότε $R(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = j\,I(\omega) = I_o(\omega)$.
  3. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς t, τότε $X(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση που έχει πραγματικό μέρος άρτιας συμμετρίας ως προς ω και φανταστικό μέρος περιττής συμμετρίας ως προς ω.
  4. Το φάσμα μέτρου $|X(\omega)|$ είναι άρτιας συμμετρίας ως προς ω, ενώ το φάσμα φάσης $\angle X(\omega)$ είναι περιττής συμμετρίας ως προς ω.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ιδιότητα συζυγούς συμμετρίας (3)

- όπου $R_e(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της άρτιας συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, άλλα και η συνιστώσα άρτιας συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω, ενώ $I_o(\omega)$ ο μετασχηματισμός Fourier της περιττής συνιστώσας του πραγματικού σήματος $x(t)$, αλλά και η συνιστώσα περιττής συμμετρίας του $X(\omega)$ ως προς ω. Διαπιστώνουμε ότι:
  1. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα άρτιας συμμετρίας ως προς t, τότε $I(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση άρτιας συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = R(\omega) = R_e(\omega)$.
  2. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας ως προς t, τότε $R(\omega) \equiv 0$ και $X(\omega)$ είναι φανταστική συνάρτηση περιττής συμμετρίας ως προς ω: $X(\omega) = j\, I(\omega) = I_o(\omega)$.
  3. Αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα που δεν έχει συμμετρία ως προς t, τότε $X(\omega)$ είναι μιγαδική συνάρτηση που έχει πραγματικό μέρος άρτιας συμμετρίας ως προς ω και φανταστικό μέρος περιττής συμμετρίας ως προς ω.
  4. Το φάσμα μέτρου $|X(\omega)|$ είναι άρτιας συμμετρίας ως προς ω, ενώ το φάσμα φάσης $\angle X(\omega)$ είναι περιττής συμμετρίας ως προς ω.

Παράδειγμα 5.1 (1)

- Έστω $x(t) = e^{-3t}\,u(t)$. Εφαρμόζοντας την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier (7) προκύπτει

$$X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-3t}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(3+j\omega)t}\, dt. \tag{13}$$

- Από τη Μαθηματική Ανάλυση γνωρίζουμε την εξής σημαντική ταυτότητα για $a > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt &= \int_0^{\infty} e^{-at}\cos\omega t\, dt - j\int_0^{\infty} e^{-at}\sin\omega t\, dt\\ &= \frac{a}{a^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{a+j\omega}\end{aligned} \tag{14}$$

Παράδειγμα 5.1 (1)

- Έστω $x(t) = e^{-3t}\, u(t)$. Εφαρμόζοντας την εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier (7) προκύπτει

$$X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-3t}\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(3+j\omega)t}\, dt. \tag{13}$$

- Από τη Μαθηματική Ανάλυση γνωρίζουμε την εξής σημαντική ταυτότητα για $a > 0$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}\, \cos\omega t\, dt - j\int_{0}^{\infty} e^{-at}\, \sin\omega t\, dt$$
$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{a+j\omega} \tag{14}$$

Παράδειγμα 5.1 (2)

- $$X(\omega) = \left.\frac{1}{a + j\omega}\right|_{a=3} = \frac{1}{3 + j\omega} = \frac{3 - j\omega}{9 + \omega^2} = \underbrace{\frac{3}{9 + \omega^2}}_{R(\omega)} - j\,\underbrace{\frac{\omega}{9 + \omega^2}}_{-I(\omega)} \quad (15)$$

- Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier δίνονται από τις σχέσεις

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{3^2}{(9 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(9 + \omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \omega^2}} \quad (16)$$

$$\angle X(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega}{3}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{3}\right). \quad (17)$$

Παράδειγμα 5.1 (2)

- $$X(\omega) = \left.\frac{1}{a+j\omega}\right|_{a=3} = \frac{1}{3+j\omega} = \frac{3-j\omega}{9+\omega^2} = \underbrace{\frac{3}{9+\omega^2}}_{R(\omega)} - j\underbrace{\frac{\omega}{9+\omega^2}}_{-I(\omega)} \quad (15)$$

- Το μέτρο και η φάση του μετασχηματισμού Fourier δίνονται από τις σχέσεις

$$|X(\omega)| = \sqrt{\frac{3^2}{(9+\omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(9+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}} \quad (16)$$

$$\angle X(\omega) = \arctan\left(-\frac{\omega}{3}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{3}\right). \quad (17)$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Γραμμικότητα

Έστω

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \quad y(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(\omega), \tag{18}$$

τότε για $a, b \in \mathbb{C}$

$$a\, x(t) + b\, y(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} a\, X(\omega) + b\, Y(\omega). \tag{19}$$

Η (19) αποδεικνύεται με απευθείας εφαρμογή της εξίσωσης ορισμού του μετασχηματισμού Fourier (7).

Δυαδικότητα

- Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε

$$X(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x(-\omega). \tag{20}$$

- Απόδειξη: Από την εξίσωση σύνθεσης (6) παίρνουμε

$$2\pi\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{21}$$

- Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t \to -t$, οπότε $2\pi\, x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$.
- Αν γίνουν επιπλέον οι αλλαγές μεταβλητών $\omega \to t$ και $t \to \omega$, τότε

$$2\pi\, x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{X(t)\}. \tag{22}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Δυαδικότητα

- Αν $x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε

$$X(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x(-\omega). \tag{20}$$

- Απόδειξη: Από την εξίσωση σύνθεσης (6) παίρνουμε

$$2\pi\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{21}$$

- Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t \rightarrow -t$, οπότε $2\pi\, x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$.
- Αν γίνουν επιπλέον οι αλλαγές μεταβλητών $\omega \rightarrow t$ και $t \rightarrow \omega$, τότε

$$2\pi\, x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{X(t)\}. \tag{22}$$

Δυαδικότητα

- Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε

$$X(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x(-\omega). \tag{20}$$

- Απόδειξη: Από την εξίσωση σύνθεσης (6) παίρνουμε

$$2\pi\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{21}$$

- Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t \to -t$, οπότε $2\pi\, x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$.

- Αν γίνουν επιπλέον οι αλλαγές μεταβλητών $\omega \to t$ και $t \to \omega$, τότε

$$2\pi\, x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{X(t)\}. \tag{22}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Δυαδικότητα

- Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε

$$X(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x(-\omega). \tag{20}$$

- <u>Απόδειξη:</u> Από την εξίσωση σύνθεσης (6) παίρνουμε

$$2\pi\, x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{21}$$

- Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t \to -t$, οπότε $2\pi\, x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega$.
- Αν γίνουν επιπλέον οι αλλαγές μεταβλητών $\omega \to t$ και $t \to \omega$, τότε

$$2\pi\, x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{X(t)\}. \tag{22}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Χρονική αναστροφή

Με εφαρμογή της (7) προκύπτει ότι

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \Longleftrightarrow x(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-\omega). \quad (23)$$

Κλιμάκωση στο χρόνο

Μπορεί να δειχθεί με απευθείας εφαρμογή της (7) ότι

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \Longleftrightarrow x(at) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a}). \quad (24)$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Χρονική αναστροφή

Με εφαρμογή της (7) προκύπτει ότι

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \Longleftrightarrow x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega). \tag{23}$$

Κλιμάκωση στο χρόνο

Μπορεί να δειχθεί με απευθείας εφαρμογή της (7) ότι

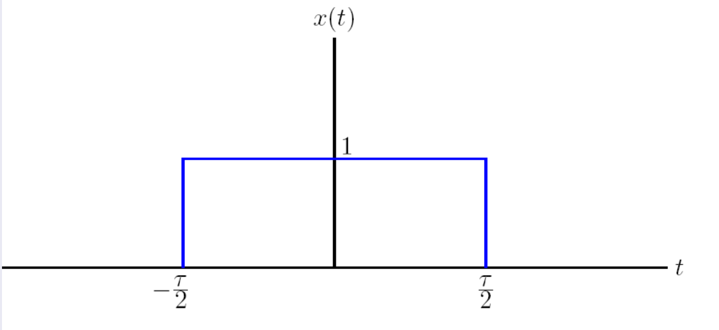
$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \Longleftrightarrow x(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a}). \tag{24}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 5.2 (1)

Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του συμμετρικού τετραγωνικού παλμού

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \tag{25}$$



Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

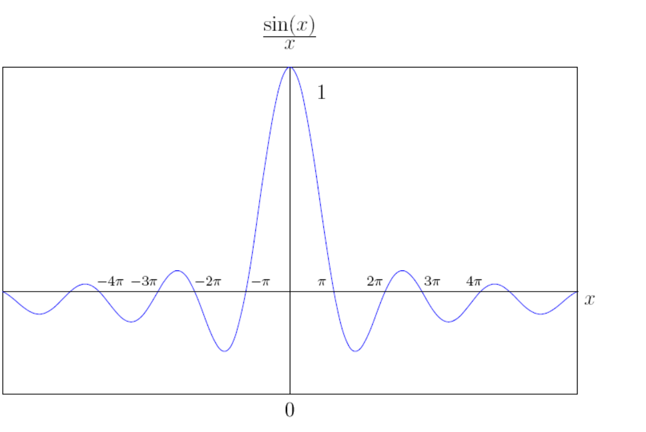
Παράδειγμα 5.2 (2)

Με εφαρμογή της (7) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{j\omega}\int_{-j\frac{\omega T}{2}}^{+j\frac{\omega T}{2}} e^{-t}\, dt \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-t}\right]_{-j\frac{\omega T}{2}}^{+j\frac{\omega T}{2}} = -\frac{1}{j\omega}[e^{-j\frac{\omega T}{2}} - e^{j\frac{\omega T}{2}}] = \frac{1}{j\omega}[e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}] \\
&= \frac{1}{j\omega}[\cos(\frac{\omega T}{2}) + j\sin(\frac{\omega T}{2}) - \cos(\frac{\omega T}{2}) + j\sin(\frac{\omega T}{2})] = \frac{2}{\omega}\sin(\frac{\omega T}{2}) \\
&= T\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} = T\,\mathrm{sinc}(\frac{\omega T}{2}) = T\, Sa(\frac{\omega T}{2}). \qquad (26)
\end{aligned}
$$

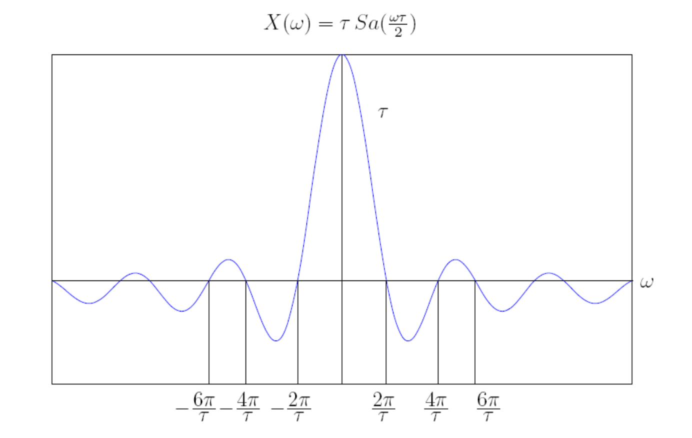
Η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ καλείται και συνάρτηση δειγματοληψίας και συμβολίζεται με $Sa(x)$.

Παράδειγμα 5.2 (2)



Συνάρτηση δειγματοληψίας $Sa(x) = \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

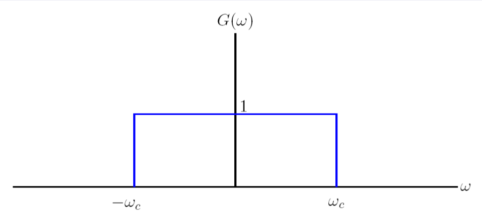
Παράδειγμα 5.2 (2)



Μετασχηματισμός Fourier του συμμετρικού τετραγωνικού παλμού στο χρόνο.

Παράδειγμα 5.2 (3)

- Συνήθως όμως έχουμε το ανάποδο πρόβλημα. Μας δίνεται ένας τετραγωνικός παλμός στη συχνότητα:



Απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου.

και ζητείται να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

- Η αναλυτική μορφή του μετασχηματισμού Fourier είναι

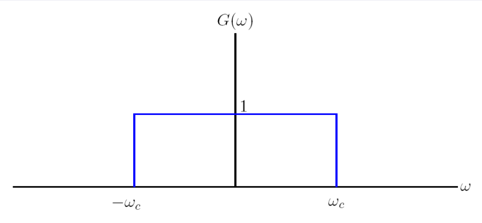
$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c. \end{cases} \tag{27}$$

- Ζητούμε το σήμα $g(t)$ που έχει τέτοιο μετασχηματισμό Fourier.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 5.2 (3)

- Συνήθως όμως έχουμε το ανάποδο πρόβλημα. Μας δίνεται ένας τετραγωνικός παλμός στη συχνότητα:



Απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου.

και ζητείται να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

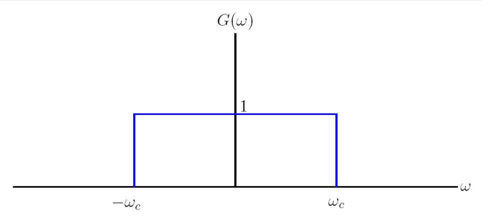
- Η αναλυτική μορφή του μετασχηματισμού Fourier είναι

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c. \end{cases} \tag{27}$$

- Ζητούμε το σήμα $g(t)$ που έχει τέτοιο μετασχηματισμό Fourier.

Παράδειγμα 5.2 (3)

- Συνήθως όμως έχουμε το ανάποδο πρόβλημα. Μας δίνεται ένας τετραγωνικός παλμός στη συχνότητα:



Απόκριση συχνότητας ενός ιδανικού κατωδιαβατού φίλτρου.

και ζητείται να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.

- Η αναλυτική μορφή του μετασχηματισμού Fourier είναι

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c. \end{cases} \tag{27}$$

- Ζητούμε το σήμα $g(t)$ που έχει τέτοιο μετασχηματισμό Fourier.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 5.2 (4)

- Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει τα εξής. Αν

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\mathcal{T}}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \mathcal{T} Sa(\frac{\omega \mathcal{T}}{2}) \tag{28}$$

τότε

$$X(t) = \mathcal{T} Sa(\frac{t\mathcal{T}}{2}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, x(-\omega) = \begin{cases} 2\pi & |\omega| < \frac{\mathcal{T}}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = H(\omega). \tag{29}$$

- Οπότε πρέπει να μετασχηματίσουμε κατάλληλα το δεξί μέλος, ώστε να παράξουμε το $G(\omega)$ από το $H(\omega)$.

Παράδειγμα 5.2 (4)

- Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει τα εξής. Αν

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \quad (28)$$

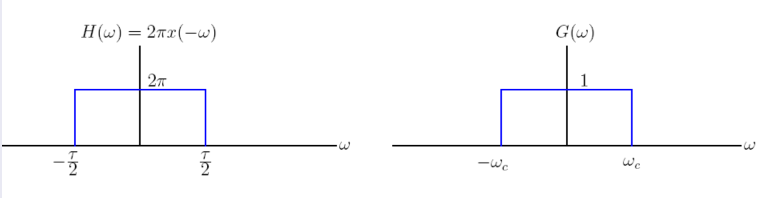
τότε

$$X(t) = \tau Sa(\frac{t\tau}{2}) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\, x(-\omega) = \begin{cases} 2\pi & |\omega| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} = H(\omega). \quad (29)$$

- Οπότε πρέπει να μετασχηματίσουμε κατάλληλα το δεξί μέλος, ώστε να παράξουμε το $G(\omega)$ από το $H(\omega)$.

Παράδειγμα 5.2 (5)

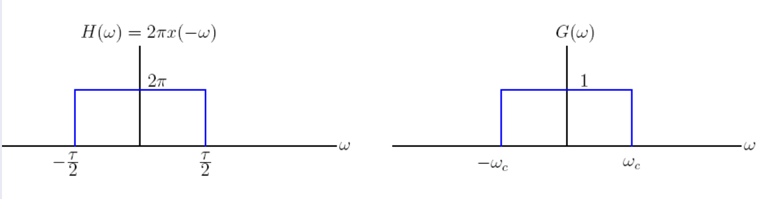
Ο μετασχηματισμός Fourier $H(\omega)$ και το επιθυμητό φάσμα $G(\omega)$ σχεδιάζονται ακολούθως:



- Αν κλιμακώσω την $H(\omega)$ ως προς ω , δηλαδή $H(\frac{\omega}{a})$ με $a > 0$, τότε εκλέγοντας $a = \frac{2\omega_c}{T}$ διαπιστώνω ότι το πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού $H(\frac{\omega}{a})$ αντιστοιχεί σε $|\omega| \leq \omega_c$, όπως επιθυμώ.
- Αν κλιμακώσω το πλάτος του $H(\frac{\omega}{a})$ κατά $\frac{1}{2\pi}$ επέρχεται ταύτιση με το μετασχηματισμό $G(\omega)$, δηλαδή $G(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{T}})$.

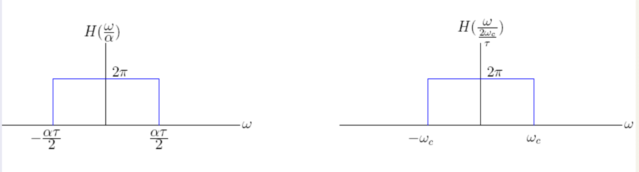
Παράδειγμα 5.2 (5)

Ο μετασχηματισμός Fourier $H(\omega)$ και το επιθυμητό φάσμα $G(\omega)$ σχεδιάζονται ακολούθως:



- Αν κλιμακώσω την $H(\omega)$ ως προς ω , δηλαδή $H(\frac{\omega}{a})$ με $a > 0$, τότε εκλέγοντας $a = \dfrac{2\omega_c}{T}$ διαπιστώνω ότι το πεδίο ορισμού του μετασχηματισμού $H(\frac{\omega}{a})$ αντιστοιχεί σε $|\omega| \leq \omega_c$, όπως επιθυμώ.
- Αν κλιμακώσω το πλάτος του $H(\frac{\omega}{a})$ κατά $\dfrac{1}{2\pi}$ επέρχεται ταύτιση με το μετασχηματισμό $G(\omega)$, δηλαδή $G(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{T}})$.

Παράδειγμα 5.2 (6)



- Το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί αναδιατυπώνεται ως εξής. Αν

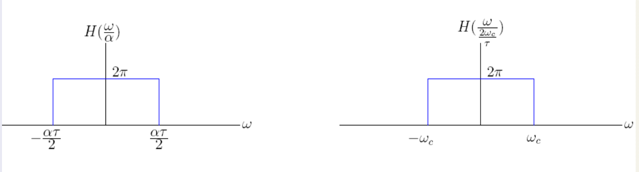
$$H(\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} h(t) = \tau Sa(\frac{t\tau}{2}) \tag{30}$$

να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}). \tag{31}$$

- Πρέπει να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της κλιμάκωσης για $\alpha = \frac{2\omega_c}{\tau}$ σε συνδυασμό με την ιδιότητα της γραμμικότητας.

Παράδειγμα 5.2 (6)



- Το πρόβλημα που πρέπει να λυθεί αναδιατυπώνεται ως εξής. Αν

$$H(\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} h(t) = \tau Sa(\frac{t\tau}{2}) \tag{30}$$

να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} H(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}). \tag{31}$$

- Πρέπει να εφαρμόσουμε την ιδιότητα της κλιμάκωσης για $a = \frac{2\omega_c}{\tau}$ σε συνδυασμό με την ιδιότητα της γραμμικότητας.

Παράδειγμα 5.2 (7)

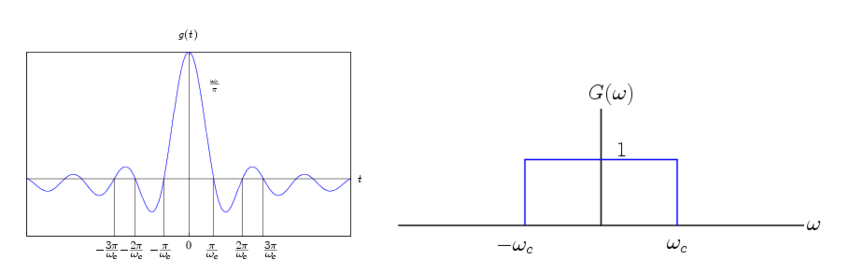
$$
\begin{aligned}
H\Big(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\Big) &\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \left|\frac{2\omega_c}{\tau}\right| h\Big(\frac{2\omega_c}{\tau}t\Big) = \left|\frac{2\omega_c}{\tau}\right| \tau\, Sa\Big(\frac{\frac{2\omega_c}{\tau}t\,\tau}{2}\Big) \\
H\Big(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\Big) &\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} 2\omega_c\, Sa(\omega_c t) \\
\frac{1}{2\pi}H\Big(\frac{\omega}{\frac{2\omega_c}{\tau}}\Big) &\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{2\omega_c}{2\pi} Sa(\omega_c t) \qquad (32)
\end{aligned}
$$

δηλαδή

$$G(\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c t). \qquad (33)$$

Παράδειγμα 5.2 (8)

Το ζεύγος $g(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} G(\omega)$ δείχνεται παραστατικά στο Σχήμα



Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 5.2 (9)

- $$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jt}\left[e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}\right] = \frac{1}{2\pi jt}[\cos(\omega_c t) + j\sin(\omega_c t) \\ &\quad - \cos(\omega_c t) + j\sin(\omega_c t)] = \frac{1}{\pi t}\sin(\omega_c t) \\ &= \frac{\omega_c t}{\pi t}\,\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} = \frac{\omega_c}{\pi}\, Sa(\omega_c t). \end{aligned} \tag{34}$$

- Επομένως καταλήξαμε στα εξής ζεύγη μετασχηματισμών:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \tau\, Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{35}$$

$$g(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\, Sa(\omega_c t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{36}$$

Παράδειγμα 5.2 (9)

- $$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jt}\,[e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}] = \frac{1}{2\pi jt}[\cos(\omega_c t) + j\sin(\omega_c t) \\ &\quad - \cos(\omega_c t) + j\sin(\omega_c t)] = \frac{1}{\pi t}\sin(\omega_c t) \\ &= \frac{\omega_c t}{\pi t}\,\frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} = \frac{\omega_c}{\pi}\, Sa(\omega_c t). \end{aligned} \tag{34}$$

- Επομένως καταλήξαμε στα εξής ζεύγη μετασχηματισμών:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \tau\, Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \tag{35}$$

$$g(t) = \frac{\omega_c}{\pi}\, Sa(\omega_c t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{36}$$

Χρονική μετατόπιση

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \Longleftrightarrow x(t-t_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(\omega). \tag{37}$$

Μετατόπιση στη συχνότητα

- $$x(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \Longleftrightarrow X(\omega-\omega_0) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{j\omega_0 t}\, x(t) \tag{38}$$

- Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \Longleftrightarrow \\ X(\omega-\omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t)\, e^{j\omega_0 t}\right] e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\, x(t)\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Χρονική μετατόπιση

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \Longleftrightarrow x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega). \tag{37}$$

Μετατόπιση στη συχνότητα

- $$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \Longleftrightarrow X(\omega-\omega_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} e^{j\omega_0 t}\, x(t) \tag{38}$$

- Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \Longleftrightarrow \\ X(\omega-\omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t)\, e^{j\omega_0 t}\right] e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\, x(t)\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Χρονική μετατόπιση

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \Longleftrightarrow x(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(\omega). \tag{37}$$

Μετατόπιση στη συχνότητα

- $$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) \Longleftrightarrow X(\omega-\omega_0) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} e^{j\omega_0 t}\, x(t) \tag{38}$$
- <u>Απόδειξη:</u>

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \Longleftrightarrow \\ X(\omega-\omega_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j(\omega-\omega_0)t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x(t)\, e^{j\omega_0 t}\right] e^{-j\omega t}\, dt = \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\, x(t)\}. \end{aligned} \tag{39}$$

Παράδειγμα 5.3: Διαμόρφωση πλάτους (AM) (amplitude modulation) (1)

- Έστω $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ ένα σήμα βασικής ζώνης.
- Ένα διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα ορίζεται ως

$$x(t) = f(t)\,\cos(\omega_0 t). \tag{40}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του σήματος $x(t)$ προκύπτει αναγνωρίζοντας ότι $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ και εφαρμόζοντας την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα και τη γραμμικότητα

$$x(t) = \frac{1}{2} f(t)\,e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t)\,e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0). \tag{41}$$

Παράδειγμα 5.3: Διαμόρφωση πλάτους (AM) (amplitude modulation) (1)

- Έστω $f(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega)$ ένα σήμα βασικής ζώνης.
- Ένα διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα ορίζεται ως

$$x(t) = f(t)\,\cos(\omega_0 t). \tag{40}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του σήματος $x(t)$ προκύπτει αναγνωρίζοντας ότι $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ και εφαρμόζοντας την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα και τη γραμμικότητα

$$x(t) = \frac{1}{2} f(t)\, e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t)\, e^{-j\omega_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0). \tag{41}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα 5.3: Διαμόρφωση πλάτους (AM) (amplitude modulation) (1)

- Έστω $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ ένα σήμα βασικής ζώνης.
- Ένα διαμορφωμένο κατά πλάτος σήμα ορίζεται ως

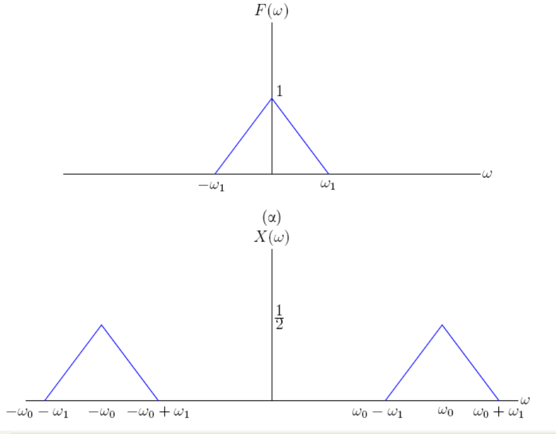
$$x(t) = f(t)\,\cos(\omega_0 t). \tag{40}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του σήματος $x(t)$ προκύπτει αναγνωρίζοντας ότι $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ και εφαρμόζοντας την ιδιότητα μετατόπισης στη συχνότητα και τη γραμμικότητα

$$x(t) = \frac{1}{2} f(t)\, e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t)\, e^{-j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0). \tag{41}$$

Παράδειγμα 5.3: Διαμόρφωση πλάτους (AM) (amplitude modulation) (2)

Δηλαδή, αν $F(\omega)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος βασικής ζώνης, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$ του διαμορφωμένου κατά πλάτος σήματος έχει τη μορφή:



Συνέλιξη στο χρόνο

- Αν

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1(t) & \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & X_1(\omega) \\ x_2(t) & \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & X_2(\omega) \end{array}\right\} \text{τότε} \quad f(t) = (x_1 * x_2)(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega) = X_1(\omega) X_2(\omega). \tag{42}$$

- Απόδειξη:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\lambda)\, x_2(t-\lambda)\, d\lambda \right] e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, x_1(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\lambda)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, x_1(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}}_{X_1(\omega)} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\lambda)\, e^{-j\omega(t-\lambda)}\, d(t-\lambda) \right]}_{X_2(\omega)} \\ &= X_1(\omega)\, X_2(\omega) \end{aligned} \tag{43}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Συνέλιξη στο χρόνο

- Αν

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1(t) & \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & X_1(\omega) \\ x_2(t) & \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} & X_2(\omega) \end{array}\right\} \text{τότε} \;\; f(t) = (x_1 * x_2)(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega). \tag{42}$$

- Απόδειξη:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\lambda)\, x_2(t-\lambda)\, d\lambda \right] e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, x_1(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\lambda)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\, x_1(\lambda)\, e^{-j\omega\lambda}}_{X_1(\omega)} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\lambda)\, e^{-j\omega(t-\lambda)}\, d(t-\lambda) \right]}_{X_2(\omega)} \\ &= X_1(\omega)\, X_2(\omega). \end{aligned} \tag{43}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Συνέλιξη στη συχνότητα

Αν $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$ και $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$, τότε

$$F(\omega) = (X_1 * X_2)(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2\pi\, x_1(t)x_2(t).$$

Μετασχηματισμός Fourier της παραγώγου σήματος

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\, X(\omega)$ και $\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n\, X(\omega)$.

Παραγώγιση στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε $t\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ και $t^n\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j^n \frac{d^n}{d\omega^n}X(\omega)$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Συνέλιξη στη συχνότητα

Αν $x_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)$ και $x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\omega)$, τότε

$$F(\omega) = (X_1 * X_2)(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2\pi\, x_1(t)x_2(t).$$

Μετασχηματισμός Fourier της παραγώγου σήματος

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\, X(\omega)$ και $\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n\, X(\omega)$.

Παραγώγιση στη συχνότητα

Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$, τότε $t\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ και $t^n\, x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j^n \frac{d^n}{d\omega^n}X(\omega)$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Συνέλιξη στη συχνότητα

Αν $x_1(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_1(\omega)$ και $x_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X_2(\omega)$, τότε

$$F(\omega) = (X_1 * X_2)(\omega) \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, x_1(t)x_2(t).$$

Μετασχηματισμός Fourier της παραγώγου σήματος

Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε $\frac{d}{dt}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega\, X(\omega)$ και $\frac{d^n}{dt^n}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n\, X(\omega)$.

Παραγώγιση στη συχνότητα

Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$, τότε $t\,x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$ και $t^n\,x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j^n\frac{d^n}{d\omega^n}X(\omega)$.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (1)

- Αν $x(t)$ είναι αιτιατό σήμα, τότε $x(t) = 0$ για $t < 0$.
- Θα δείξουμε ότι ένα αιτιατό σήμα μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του μετασχηματισμού Fourier της συνιστώσας άρτιας ή περιττής συμμετρίας του.
- Ισχύει $x(t) = x_e(t) + x_o(t), \forall t$. Αλλά λόγω της αιτιατότητας, για $t < 0$ έχουμε $x_e(t) = -x_o(t)$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες συμμετρίας για $t > 0$ προκύπτει ότι

$$x_e(t) = x_e(-t) \overset{-t<0}{=} -[x_o(-t)] = x_o(t). \tag{44}$$

- Επομένως για ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} 2x_e(t) = 2x_o(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{45}$$

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (1)

- Αν $x(t)$ είναι αιτιατό σήμα, τότε $x(t) = 0$ για $t < 0$.
- Θα δείξουμε ότι ένα αιτιατό σήμα μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του μετασχηματισμού Fourier της συνιστώσας άρτιας ή περιττής συμμετρίας του.
- Ισχύει $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$, $\forall t$. Αλλά λόγω της αιτιατότητας, για $t < 0$ έχουμε $x_e(t) = -x_o(t)$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες συμμετρίας για $t > 0$ προκύπτει ότι

$$x_e(t) = x_e(-t) \overset{-t<0}{=} -[x_o(-t)] = x_o(t). \tag{44}$$

- Επομένως για ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} 2x_e(t) = 2x_o(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{45}$$

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (1)

- Αν $x(t)$ είναι αιτιατό σήμα, τότε $x(t) = 0$ για $t < 0$.
- Θα δείξουμε ότι ένα αιτιατό σήμα μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του μετασχηματισμού Fourier της συνιστώσας άρτιας ή περιττής συμμετρίας του.
- Ισχύει $x(t) = x_e(t) + x_o(t), \forall t$. Αλλά λόγω της αιτιατότητας, για $t < 0$ έχουμε $x_e(t) = -x_o(t)$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες συμμετρίας για $t > 0$ προκύπτει ότι

$$x_e(t) = x_e(-t) \overset{-t<0}{=} -[x_o(-t)] = x_o(t). \tag{44}$$

- Επομένως για ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} 2x_e(t) = 2x_o(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{45}$$

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (1)

- Αν $x(t)$ είναι αιτιατό σήμα, τότε $x(t) = 0$ για $t < 0$.
- Θα δείξουμε ότι ένα αιτιατό σήμα μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μόνο του μετασχηματισμού Fourier της συνιστώσας άρτιας ή περιττής συμμετρίας του.
- Ισχύει $x(t) = x_e(t) + x_o(t), \forall t$. Αλλά λόγω της αιτιατότητας, για $t < 0$ έχουμε $x_e(t) = -x_o(t)$. Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες συμμετρίας για $t > 0$ προκύπτει ότι

$$x_e(t) = x_e(-t) \overset{-t<0}{=} -[x_o(-t)] = x_o(t). \tag{44}$$

- Επομένως για ένα αιτιατό σήμα $x(t)$ ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} 2x_e(t) = 2x_o(t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{45}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (2)

- Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί είτε ως μετασχηματισμός Fourier του $x_e(t)$ ή του $x_o(t)$.
- Αν όμως $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, τότε επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$R_e(\omega) = \mathcal{F}[x_e(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathrm{Re}\{X(\omega)\} \quad (46)$$

$$I_o(\omega) = -\mathcal{F}[x_o(t)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}. \quad (47)$$

- Οι (45)–(47) φανερώνουν ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier ενός αιτιατού πραγματικού σήματος δεν είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (2)

- Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί είτε ως μετασχηματισμός Fourier του $x_e(t)$ ή του $x_o(t)$.
- Αν όμως $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, τότε επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$R_e(\omega) = \mathcal{F}[x_e(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathrm{Re}\{X(\omega)\} \tag{46}$$

$$I_o(\omega) = -\mathcal{F}[x_o(t)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}. \tag{47}$$

- Οι (45)–(47) φανερώνουν ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier ενός αιτιατού πραγματικού σήματος δεν είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (2)

- Άρα ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί είτε ως μετασχηματισμός Fourier του $x_e(t)$ ή του $x_o(t)$.
- Αν όμως $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, τότε επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$
\begin{aligned}
R_e(\omega) &= \mathcal{F}[x_e(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \mathrm{Re}\{X(\omega)\} \qquad (46) \\
I_o(\omega) &= -\mathcal{F}[x_o(t)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}. \qquad (47)
\end{aligned}
$$

- Οι (45)–(47) φανερώνουν ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μετασχηματισμού Fourier ενός αιτιατού πραγματικού σήματος δεν είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις.

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (3)

Ισχύουν επίσης και οι αντίστροφες σχέσεις:

$$x_e(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_e(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} R_e(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega \qquad (48)$$

$$x_0(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I_o(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} I_0(\omega)\sin\omega t\, d\omega \qquad (49)$$

οπότε η (45) ξαναγράφεται ως

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R_e(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} I_o(\omega)\, \sin\omega t\, d\omega. \qquad (50)$$

Μετασχηματισμός Fourier συζυγών σημάτων

Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε

$$x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-\omega). \qquad (51)$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Μετασχηματισμός Fourier αιτιατού πραγματικού σήματος (3)

Ισχύουν επίσης και οι αντίστροφες σχέσεις:

$$
\begin{aligned}
x_e(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_e(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} R_e(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega & (48)\\
x_0(t) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I_o(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} I_0(\omega) \sin\omega t\, d\omega & (49)
\end{aligned}
$$

οπότε η (45) ξαναγράφεται ως

$$
x(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} R_e(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega = -\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} I_o(\omega)\, \sin\omega t\, d\omega. \tag{50}
$$

Μετασχηματισμός Fourier συζυγών σημάτων

Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ τότε

$$
x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-\omega). \tag{51}
$$

Ταυτότητα του Parseval (1)

- Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{52}$$

- Απόδειξη: Έστω $f(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$.
- Τότε

$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\omega) \tag{53}$$

$$f(t) = x(t)x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X^*(-\omega) \tag{54}$$

- Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης (7) για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $f(t)$ προκύπτει

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{55}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ταυτότητα του Parseval (1)

- Ισχύει ότι
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{52}$$
- Απόδειξη: Έστω $f(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$.
- Τότε
$$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-\omega) \tag{53}$$
$$f(t) = x(t)x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X^*(-\omega) \tag{54}$$
- Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης (7) για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $f(t)$ προκύπτει
$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-j\omega t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, e^{-j\omega t} \, dt \tag{55}$$

Ταυτότητα του Parseval (1)

- Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{52}$$

- Απόδειξη: Έστω $f(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$.
- Τότε

$$x^*(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X^*(-\omega) \tag{53}$$

$$f(t) = x(t)x^*(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X^*(-\omega) \tag{54}$$

- Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης (7) για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $f(t)$ προκύπτει

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, e^{-j\omega t} \, dt \tag{55}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ταυτότητα του Parseval (1)

- Ισχύει ότι
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega. \tag{52}$$
- Απόδειξη: Έστω $f(t) = x(t)x^*(t) = |x(t)|^2$.
- Τότε
$$x^*(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X^*(-\omega) \tag{53}$$
$$f(t) = x(t)x^*(t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{1}{2\pi} X(\omega) * X^*(-\omega) \tag{54}$$
- Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση ανάλυσης (7) για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $f(t)$ προκύπτει
$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-j\omega t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, e^{-j\omega t} \, dt \tag{55}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ταυτότητα του Parseval (2)

- ενώ από την (54) έχουμε $\forall\ \omega$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*\Big[\omega-(-\lambda)\Big]\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*(\omega+\lambda)\,d\lambda. \tag{56}$$

- Οι (55) και (56) ισχύουν ταυτοτικά για κάθε ω, άρα και για $\omega = 0$ οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\, X^*(\lambda)\, d\lambda \tag{57}$$

  που ολοκληρώνει την απόδειξη.

- Γενικότερα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, y(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\omega)\, Y(\omega)\, d\omega. \tag{58}$$

Ταυτότητα του Parseval (2)

- ενώ από την (54) έχουμε $\forall\ \omega$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*\Big[\omega-(-\lambda)\Big]\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*(\omega+\lambda)\,d\lambda. \tag{56}$$

- Οι (55) και (56) ισχύουν ταυτοτικά για κάθε ω, άρα και για $\omega = 0$ οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\,X^*(\lambda)\,d\lambda \tag{57}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

- Γενικότερα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\omega)\,Y(\omega)\,d\omega. \tag{58}$$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier

Ταυτότητα του Parseval (2)

- ενώ από την (54) έχουμε $\forall\ \omega$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*\Big[\omega-(-\lambda)\Big]\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*(\omega+\lambda)\,d\lambda. \tag{56}$$

- Οι (55) και (56) ισχύουν ταυτοτικά για κάθε ω, άρα και για $\omega = 0$ οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\,X^*(\lambda)\,d\lambda \tag{57}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

- Γενικότερα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\omega)\,Y(\omega)\,d\omega. \tag{58}$$

Ταυτότητα του Parseval (2)

- ενώ από την (54) έχουμε $\forall\ \omega$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*\Big[\omega-(-\lambda)\Big]\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)X^*(\omega+\lambda)\,d\lambda. \tag{56}$$

- Οι (55) και (56) ισχύουν ταυτοτικά για κάθε ω, άρα και για $\omega = 0$ οπότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\lambda)\,X^*(\lambda)\,d\lambda \tag{57}$$

  που ολοκληρώνει την απόδειξη.

- Γενικότερα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-\omega)\,Y(\omega)\,d\omega. \tag{58}$$

Ταυτότητα του Parseval (3)

- Αναγνωρίζουμε ότι το αριστερό μέλος της (57) είναι η ενέργεια του σήματος $W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$,
- οπότε η συνάρτηση $S(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi}$ ερμηνεύεται ως πυκνότητα φάσματος ενέργειας.

Πίνακας ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier

Πίνακας ζευγών σημάτων ενέργειας και αντιστοίχων μετασχηματισμών Fourier

Ταυτότητα του Parseval (3)

- Αναγνωρίζουμε ότι το αριστερό μέλος της (57) είναι η ενέργεια του σήματος $W = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$,
- οπότε η συνάρτηση $S(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{2\pi}$ ερμηνεύεται ως πυκνότητα φάσματος ενέργειας.

Πίνακας ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier
Πίνακας ζευγών σημάτων ενέργειας και αντιστοίχων μετασχηματισμών Fourier

Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Σκοπός

- Ως τέτοια θεωρούμε τις γενικευμένες συναρτήσεις (δηλαδή τη $\delta(t)$ και τις παραγώγους της), αλλά και σήματα, όπως τη συνάρτηση προσήμου, τη βηματική συνάρτηση, το σήμα $|t|$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ προκύπτει εξ ορισμού.
- Ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της $\delta(t)$, θα αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier στα φανταστικά εκθετικά $e^{j\omega_0 t}$ και στη βηματική συνάρτηση, για τα οποία δεν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet.
- Τούτο θα μας επιτρέψει κατ' επέκταση να αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier και στα περιοδικά σήματα στην επόμενη ενότητα.

Σκοπός

- Ως τέτοια θεωρούμε τις γενικευμένες συναρτήσεις (δηλαδή τη $\delta(t)$ και τις παραγώγους της), αλλά και σήματα, όπως τη συνάρτηση προσήμου, τη βηματική συνάρτηση, το σήμα $|t|$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ προκύπτει εξ ορισμού.
- Ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της $\delta(t)$, θα αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier στα φανταστικά εκθετικά $e^{j\omega_0 t}$ και στη βηματική συνάρτηση, για τα οποία δεν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet.
- Τούτο θα μας επιτρέψει κατ' επέκταση να αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier και στα περιοδικά σήματα στην επόμενη ενότητα.

Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Σκοπός

- Ως τέτοια θεωρούμε τις γενικευμένες συναρτήσεις (δηλαδή τη $\delta(t)$ και τις παραγώγους της), αλλά και σήματα, όπως τη συνάρτηση προσήμου, τη βηματική συνάρτηση, το σήμα $|t|$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ προκύπτει εξ ορισμού.
- Ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της $\delta(t)$, θα αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier στα φανταστικά εκθετικά $e^{j\omega_0 t}$ και στη βηματική συνάρτηση, για τα οποία δεν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet.
- Τούτο θα μας επιτρέψει κατ' επέκταση να αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier και στα περιοδικά σήματα στην επόμενη ενότητα.

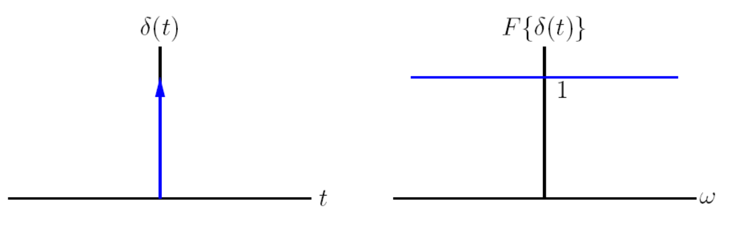
Σκοπός

- Ως τέτοια θεωρούμε τις γενικευμένες συναρτήσεις (δηλαδή τη $\delta(t)$ και τις παραγώγους της), αλλά και σήματα, όπως τη συνάρτηση προσήμου, τη βηματική συνάρτηση, το σήμα $|t|$.
- Ο μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ προκύπτει εξ ορισμού.
- Ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της $\delta(t)$, θα αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier στα φανταστικά εκθετικά $e^{j\omega_0 t}$ και στη βηματική συνάρτηση, για τα οποία δεν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet.
- Τούτο θα μας επιτρέψει κατ᾽ επέκταση να αποδώσουμε μετασχηματισμό Fourier και στα περιοδικά σήματα στην επόμενη ενότητα.

Μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ (1)

Με εφαρμογή του ορισμού προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = [e^{-j\omega t}]_{t=0} = 1. \tag{59}$$



$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{F}\{\delta(t)\}$$

Μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ (2)

- ΄Αμεσα παρεπόμενα της (59) είναι τα εξής:

$$\delta(t \pm t_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{\pm j\omega t_0} \tag{60}$$

$$e^{j\omega_0 t} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0) \tag{61}$$

$$1 \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\,\delta(\omega) \tag{62}$$

- Η εξίσωση σύνθεσης που αντιστοιχεί στην εξίσωση ανάλυσης (59) είναι

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega t\,d\omega. \tag{63}$$

Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier της $\delta(t)$ (2)

- Άμεσα παρεπόμενα της (59) είναι τα εξής:

$$\delta(t \pm t_0) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad e^{\pm j\omega t_0} \tag{60}$$

$$e^{j\omega_0 t} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi\, \delta(\omega_0 - \omega) = 2\pi\, \delta(\omega - \omega_0) \tag{61}$$

$$1 \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad 2\pi\, \delta(\omega) \tag{62}$$

- Η εξίσωση σύνθεσης που αντιστοιχεί στην εξίσωση ανάλυσης (59) είναι

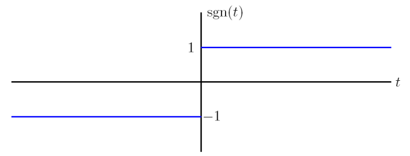
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t\, d\omega. \tag{63}$$

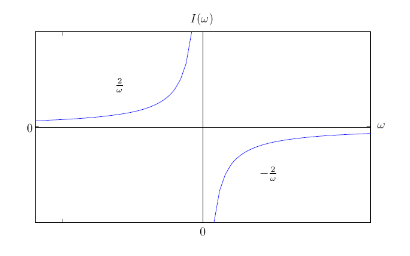
Μετασχηματισμός Fourier συνάρτησης προσήμου

Για τη συνάρτηση προσήμου ισχύει το εξής ζεύγος μετασχηματισμού

$$\operatorname{sgn}(t) = \frac{|t|}{t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{j\omega} = -j\frac{2}{\omega} = I(\omega). \tag{64}$$

Η απόδειξη της (64) στηρίζεται στην παράσταση της συνάρτησης προσήμου ως ορίου ακολουθίας συναρτήσεων $\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}\left[e^{-a|t|}\operatorname{sgn}(t)\right]$.





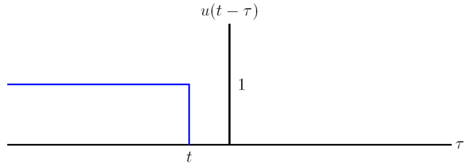
Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier βηματικής συνάρτησης

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\,2\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2}\frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \qquad (65)$$

Παράδειγμα 5.4 (1)

- Αν $x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)$ και $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$, να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $g(t)$, δηλαδή του ολοκληρώματος του σήματος $x(t)$.
- Ισχύει $g(t) = \int_{-\infty}^{t} 1\,x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = (u * x)(t)$, επειδή η $u(t-\tau)$ περιγράφει τα όρια του ολοκληρώματος.



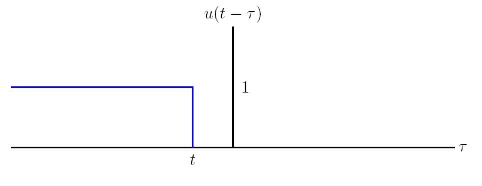
Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier βηματικής συνάρτησης

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}2\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2}\frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \qquad (65)$$

Παράδειγμα 5.4 (1)

- Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ και $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$, να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $g(t)$, δηλαδή του ολοκληρώματος του σήματος $x(t)$.
- Ισχύει $g(t) = \int_{-\infty}^{t} 1\,x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = (u * x)(t)$, επειδή η $u(t-\tau)$ περιγράφει τα όρια του ολοκληρώματος.



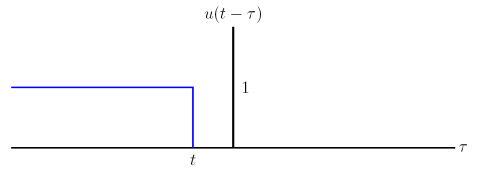
Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier βηματικής συνάρτησης

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} 2\pi\, \delta(\omega) + \frac{1}{2}\frac{2}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (65)$$

Παράδειγμα 5.4 (1)

- Αν $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$ και $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$, να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $g(t)$, δηλαδή του ολοκληρώματος του σήματος $x(t)$.
- Ισχύει $g(t) = \int_{-\infty}^{t} 1\, x(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau = (u * x)(t)$, επειδή η $u(t-\tau)$ περιγράφει τα όρια του ολοκληρώματος.



Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Παράδειγμα 5.4 (2)

$$G(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}\, X(\omega) = \pi\delta(\omega)\, X(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega} = \pi X(0)\,\delta(\omega) + \frac{X(\omega)}{j\omega}. \quad (66)$$

Μετασχηματισμός Fourier της νιοστής παραγώγου της $\delta(t)$

$$\mathcal{F}\{\delta^{(n)}t\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \triangleq (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = (j\omega)^n. \quad (67)$$

Η δυαδική ιδιότητα επιτάσσει τα ακόλουθα ζεύγη μετασχηματισμών Fourier

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}(t) &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n \\ (jt)^n &\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, \delta^{(n)}(\omega). \end{aligned} \quad (68)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε αμφότερα τα μέλη της (68) με j^n

$$-(1)^n\, t^n \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\, j^n\, \delta^{(n)}(\omega) \quad (69)$$

και τα μέλη της (69) με $(-1)^n$ παίρνουμε $t^n \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (-1)^n\, 2\pi\, j^n\, \delta^{(n)}(\omega)$.

Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = |t|$ (1)

- Έστω $x(t) = |t|$, τότε $x(t) = t\,u(t) - t\,u(-t)$. Οπότε $\mathcal{F}\{|t|\} = \mathcal{F}\{t\,u(t)\} - \mathcal{F}\{t\,u(-t)\}$.
- Αλλά

$$t \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -2\pi j\delta^{(1)}(\omega) \tag{70}$$

$$u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{71}$$

$$u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(-\omega) - \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \tag{72}$$

- οπότε

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[-2\pi j\delta^{(1)}(\omega) * \left\{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right\}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\left[-2\pi j\delta^{(1)}(\omega) * \left\{\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right\}\right] = \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = |t|$ (1)

- Έστω $x(t) = |t|$, τότε $x(t) = t\,u(t) - t\,u(-t)$. Οπότε $\mathcal{F}\{|t|\} = \mathcal{F}\{t\,u(t)\} - \mathcal{F}\{t\,u(-t)\}$.
- Αλλά

$$t \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -2\pi\, j\delta^{(1)}(\omega) \tag{70}$$

$$u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{71}$$

$$u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(-\omega) - \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \tag{72}$$

- οπότε

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[-2\pi\, j\delta^{(1)}(\omega) * \left\{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right\}\right] - \frac{1}{2\pi}\left[-2\pi j\delta^{(1)}(\omega) * \left\{\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right\}\right] =$$

Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = |t|$ (1)

- Έστω $x(t) = |t|$, τότε $x(t) = t\,u(t) - t\,u(-t)$. Οπότε $\mathcal{F}\{|t|\} = \mathcal{F}\{t\,u(t)\} - \mathcal{F}\{t\,u(-t)\}$.
- Αλλά

$$t \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -2\pi\, j\delta^{(1)}(\omega) \tag{70}$$

$$u(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{71}$$

$$u(-t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\delta(-\omega) - \frac{1}{j\omega} = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega} \tag{72}$$

- οπότε

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[-2\pi\, j\delta^{(1)}(\omega) * \left\{\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right\}\right] \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\left[-2\pi j\delta^{(1)}(\omega) * \left\{\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}\right\}\right] = \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = |t|$ (2)

- $$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2\pi} 2\pi j\, \delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2\pi} 2\pi j\, \delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} \\ &= -2j\, \delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} = -2\delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{\omega} \\ &= -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(\xi)\, \frac{1}{\omega - \xi}\, d\xi \\ &= -2 \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\omega - \xi} \right] \Bigg|_{\xi=0} = -2 \frac{-(-1)}{(\omega - \xi)^2} = -2 \frac{1}{\omega^2}. \end{aligned} \tag{73}$$

- Άρα $|t| \xleftrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{2}{\omega^2}$.

Μετασχηματισμός Fourier ειδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier του $x(t) = |t|$ (2)

- $$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi}2\pi j\,\delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{2\pi}2\pi j\,\delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} \\
&= -2j\,\delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{j\omega} = -2\delta^{(1)}(\omega) * \frac{1}{\omega} \\
&= -2\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(\xi)\,\frac{1}{\omega-\xi}\,d\xi \\
&= -2\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\omega-\xi}\right]\Bigg|_{\xi=0} = -2\frac{-(-1)}{(\omega-\xi)^2} = -2\frac{1}{\omega^2}. \qquad (73)
\end{aligned}$$
- ΄Αρα $|t| \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} -\frac{2}{\omega^2}$.

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier των $\cos(\omega_0 t)$ και $\sin(\omega_0 t)$ (1)

- Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος και κατά συνέπεια δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα. Άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier.
- Είναι γνωστές οι ταυτότητες $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ και $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$.
- Οπότε, επειδή αποδώσαμε ήδη μετασχηματισμό Fourier στο φανταστικό εκθετικό $e^{j\omega_0 t}$ ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$, κατ' εφαρμογή της γραμμικότητας, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} &= \frac{1}{2}\left\{2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right\} \\ &= \pi\left\{\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right\} \qquad (74) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = j\pi\left\{\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right\}. \qquad (75)$$

Μετασχηματισμός Fourier των $\cos(\omega_0 t)$ και $\sin(\omega_0 t)$ (1)

- Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος και κατά συνέπεια δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα. Άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier.
- Είναι γνωστές οι ταυτότητες $\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ και $\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$.
- Οπότε, επειδή αποδώσαμε ήδη μετασχηματισμό Fourier στο φανταστικό εκθετικό $e^{j\omega_0 t}$ ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$, κατ' εφαρμογή της γραμμικότητας, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \frac{1}{2}\left\{2\pi\, \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi\, \delta(\omega + \omega_0)\right\} \\ &= \pi\left\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right\} \qquad (74) \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\} = j\pi\left\{\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right\}. \qquad (75)$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier των $\cos(\omega_0 t)$ και $\sin(\omega_0 t)$ (1)

- Τα περιοδικά σήματα είναι σήματα ισχύος και κατά συνέπεια δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμα. Άρα δεν μπορεί να εφαρμοστεί η εξίσωση ορισμού του μετασχηματισμού Fourier.
- Είναι γνωστές οι ταυτότητες $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$ και $\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)$.
- Οπότε, επειδή αποδώσαμε ήδη μετασχηματισμό Fourier στο φανταστικό εκθετικό $e^{j\omega_0 t}$ ως παρεπόμενο του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$, κατ᾽ εφαρμογή της γραμμικότητας, θα έχουμε

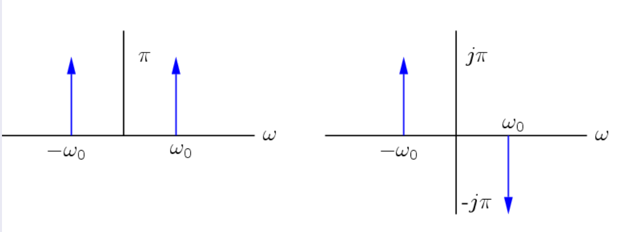
$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} &= \frac{1}{2}\left\{2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)\right\} \\
&= \pi\left\{\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right\} \qquad (74)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = j\pi\left\{\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right\}. \qquad (75)$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier των $\cos(\omega_0 t)$ και $\sin(\omega_0 t)$ (2)

Δηλαδή, οι μετασχηματισμοί Fourier των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι φάσματα γραμμικά:



Μετασχηματισμός Fourier των $\cos(\omega_0\, t)$ και $\sin(\omega_0\, t)$.

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (1)

- Το $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε εκθετική σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{j\, n\, \omega_0\, t}.$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος θα προκύψει ως συνέπεια της απόδοσης μετασχηματισμού Fourier στο φανταστικό εκθετικό $e^{j\, n\, \omega_0\, t}$:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{j\, n\, \omega_0\, t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \mathcal{F}\left\{ e^{j\, n\, \omega_0\, t} \right\} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \delta(\omega - n\omega_0) \qquad (76) \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (1)

- Το $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε εκθετική σειρά Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{j\,n\,\omega_0\,t}.$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού σήματος θα προκύψει ως συνέπεια της απόδοσης μετασχηματισμού Fourier στο φανταστικό εκθετικό $e^{j\,n\,\omega_0\,t}$:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, e^{j\,n\,\omega_0\,t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \mathcal{F}\left\{ e^{j\,n\,\omega_0\,t} \right\} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \tag{76}$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (2)

- όπου a_n οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier, ήτοι

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\, dt = \frac{1}{T}\,\underbrace{\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\}}_{X_T(\omega)}\Big|_{n\omega_0} = \frac{1}{T}\, X_T(n\,\omega_0) \qquad (77)
\end{aligned}
$$

- και $\hat{x}(t)$ είναι το σήμα της πρώτης περιόδου, δηλαδή

$$
\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}
$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (2)

- όπου a_n οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier, ήτοι

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\, dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(t)\, e^{-j\,n\,\omega_0\,t}\, dt = \frac{1}{T} \underbrace{\mathcal{F}\{\hat{x}(t)\}}_{X_T(\omega)}\Big|_{n\omega_0} = \frac{1}{T} X_T(n\,\omega_0) \end{aligned} \quad (77)$$

- και $\hat{x}(t)$ είναι το σήμα της πρώτης περιόδου, δηλαδή

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (3)

- Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0). \tag{78}$$

- Αξίζει να σχολιαστεί ότι

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (3)

- Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0). \tag{78}$$

- Αξίζει να σχολιαστεί ότι
  - τα σήματα ενέργειας είναι υπαρκτά,

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (3)

- Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0). \tag{78}$$

- Αξίζει να σχολιαστεί ότι
  1. τα σήματα ενέργειας είναι υπαρκτά,
  2. ενώ τα περιοδικά σήματα είναι καθαρώς μαθηματική αφαίρεση.

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (3)

- Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0). \tag{78}$$

- Αξίζει να σχολιαστεί ότι
  1. τα σήματα ενέργειας είναι υπαρκτά,
  2. ενώ τα περιοδικά σήματα είναι καθαρώς μαθηματική αφαίρεση.

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (3)

- Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0). \tag{78}$$

- Αξίζει να σχολιαστεί ότι
  1. τα σήματα ενέργειας είναι υπαρκτά,
  2. ενώ τα περιοδικά σήματα είναι καθαρώς μαθηματική αφαίρεση.

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (3)

- Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0). \tag{78}$$

- Αξίζει να σχολιαστεί ότι
  1. τα σήματα ενέργειας είναι υπαρκτά,
  2. ενώ τα περιοδικά σήματα είναι καθαρώς μαθηματική αφαίρεση.

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικού σήματος $x(t)$ (3)

- Συνοψίζουμε

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0). \tag{78}$$

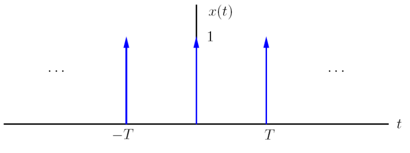
- Αξίζει να σχολιαστεί ότι
  1. τα σήματα ενέργειας είναι υπαρκτά,
  2. ενώ τα περιοδικά σήματα είναι καθαρώς μαθηματική αφαίρεση.

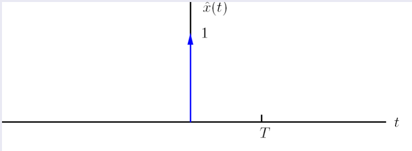
Παράδειγμα 5.5 (1)

Έστω η περιοδική παλμοσειρά $\delta(t - nT)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT). \tag{79}$$

Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο T και θεμελιώδη συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Η περιοδική παλμοσειρά και το σήμα της πρώτης περιόδου σχεδιάζονται ακολούθως:





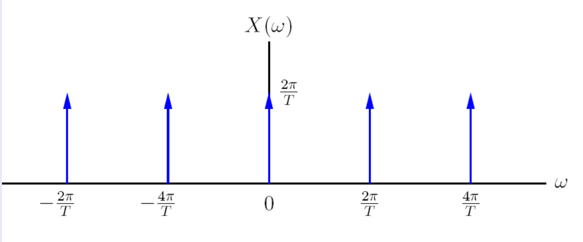
Παράδειγμα 5.5 (2)

- Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος της πρώτης περιόδου είναι

$$X_T(\omega) = \int_0^T \delta(t)\, e^{-j\,\omega\,t}\, dt = e^{-j\,\omega\,t}\Big|_{t=0} = 1. \tag{80}$$

- οπότε $X_T(n\omega_0) = 1$ και

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - n\omega_0). \tag{81}$$



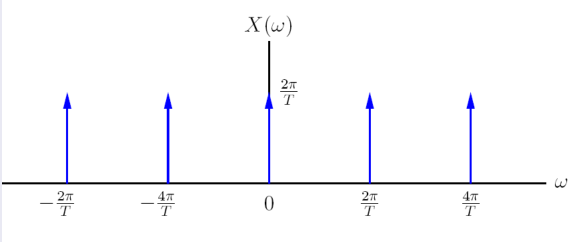
Παράδειγμα 5.5 (2)

- Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος της πρώτης περιόδου είναι

$$X_T(\omega) = \int_0^T \delta(t)\, e^{-j\,\omega\,t}\, dt = e^{-j\,\omega\,t}\Big|_{t=0} = 1. \qquad (80)$$

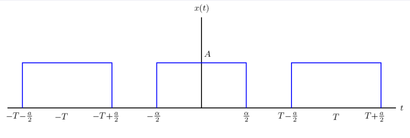
- οπότε $X_T(n\omega_0) = 1$ και

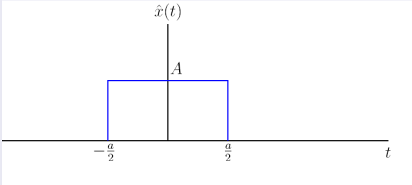
$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - n\omega_0). \qquad (81)$$



Παράδειγμα 5.6 (1)

Έστω περιοδικό τρένο ορθογωνίων παλμών $x(t)$ με περίοδο T και το συναφές σήμα πρώτης περιόδου $\hat{x}(t)$, όπως σχεδιάζονται ακολούθως:





Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Παράδειγμα 5.6 (2)

- Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού τρένου ορθογώνιων παλμών δίνεται από την

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0) \tag{82}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier του $\hat{x}(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= A \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{A}{j\omega} - \left[e^{-j\omega t} \right]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{A}{j\omega} \left[-e^{-j\omega(a/2)} + e^{j\omega(a/2)} \right] \\ &= \frac{2A}{\omega} \sin(\frac{\omega a}{2}) = \frac{Aa}{\frac{\omega a}{2}} \sin\frac{\omega a}{2} = AaSa(\frac{\omega a}{2}). \end{aligned} \tag{83}$$

Παράδειγμα 5.6 (2)

- Ο μετασχηματισμός Fourier του περιοδικού τρένου ορθογώνιων παλμών δίνεται από την

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0) \tag{82}$$

- Ο μετασχηματισμός Fourier του $\hat{x}(t)$ είναι:

$$\begin{aligned} X_T(\omega) &= A \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{A}{j\omega} - \left[e^{-j\omega t} \right]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{A}{j\omega} \left[- e^{-j\omega(a/2)} + e^{j\omega(a/2)} \right] \\ &= \frac{2A}{\omega} \sin(\frac{\omega a}{2}) = \frac{Aa}{\frac{\omega a}{2}} \sin \frac{\omega a}{2} = AaSa(\frac{\omega a}{2}). \end{aligned} \tag{83}$$

Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων

Παράδειγμα 5.6 (3)

- Άρα

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\, a\, Sa(\frac{n\pi a}{T})\, \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}). \tag{84}$$

- Συνάγουμε ότι τα φάσματα των περιοδικών σημάτων είναι τα ίδια είτε αν υπολογιστούν μέσω της σειράς Fourier είτε μέσω του μετασχηματισμού Fourier.

Πίνακας μετασχηματισμών Fourier ειδικών σημάτων και σημάτων ισχύος

Παράδειγμα 5.6 (3)

- Άρα
$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\, a\, Sa(\frac{n\pi a}{T})\, \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T}). \qquad (84)$$
- Συνάγουμε ότι τα φάσματα των περιοδικών σημάτων είναι τα ίδια είτε αν υπολογιστούν μέσω της σειράς Fourier είτε μέσω του μετασχηματισμού Fourier.

Πίνακας μετασχηματισμών Fourier ειδικών σημάτων και σημάτων ισχύος