ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΧΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Σήματα-Συστήματα

Ενότητα **4**: Ανάλυση Fourier για σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου – Περιοδικά σήματα (Σειρά Fourier)

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ανάλυση Fourier για περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Ιούνιος 2013

Περιεχόμενα

Ανασκόπηση

- Αναπαριστώντας την είσοδο σ' ένα Γ.Χ.Α. σύστημα συνεχούς χρόνου σαν ολοκλήρωμα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων (δηλαδή, συναρτήσεων $\delta(t-\tau)$) με βάρη εξαγάγαμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης ως τη σχέση που συνδέει την είσοδο (διέγερση) με την έξοδο (απόκριση) του Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Η έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε μια αυθαίρετη είσοδο μπορεί να υπολογιστεί από τις αποκρίσεις του συστημάτος σε συναρτήσεις μετατοπισμένων ώσεων.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε συνάρτηση μοναδιαίας ώσης (δηλαδή, η κρουστική απόκριση), είναι μια πολύ σημαντική έννοια.
- Η ανάλυση ήταν αποτέλεσμα της αρχής της υπέρθεσης, όπου θεωρήσαμε τις συναρτήσεις μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων ως στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Εισαγωγή

Ανασκόπηση

- Αναπαριστώντας την είσοδο σ' ένα Γ.Χ.Α. σύστημα συνεχούς χρόνου σαν ολοκλήρωμα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων (δηλαδή, συναρτήσεων $\delta(t-\tau)$) με βάρη εξαγάγαμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης ως τη σχέση που συνδέει την είσοδο (διέγερση) με την έξοδο (απόκριση) του Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Η έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε μια αυθαίρετη είσοδο μπορεί να υπολογιστεί από τις αποκρίσεις του συστημάτος σε συναρτήσεις μετατοπισμένων ώσεων.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε συνάρτηση μοναδιαίας ώσης (δηλαδή, η κρουστική απόκριση), είναι μια πολύ σημαντική έννοια.
- Η ανάλυση ήταν αποτέλεσμα της αρχής της υπέρθεσης, όπου θεωρήσαμε τις συναρτήσεις μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων ως στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Εισαγωγή

Ανασκόπηση

- Αναπαριστώντας την είσοδο σ᾽ ένα Γ.Χ.Α. σύστημα συνεχούς χρόνου σαν ολοκλήρωμα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων (δηλαδή, συναρτήσεων $\delta(t-\tau)$) με βάρη εξαγάγαμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης ως τη σχέση που συνδέει την είσοδο (διέγερση) με την έξοδο (απόκριση) του Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Η έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε μια αυθαίρετη είσοδο μπορεί να υπολογιστεί από τις αποκρίσεις του συστημάτος σε συναρτήσεις μετατοπισμένων ώσεων.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε συνάρτηση μοναδιαίας ώσης (δηλαδή, η κρουστική απόκριση), είναι μια πολύ σημαντική έννοια.
- Η ανάλυση ήταν αποτέλεσμα της αρχής της υπέρθεσης, όπου θεωρήσαμε τις συναρτήσεις μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων ως στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Εισαγωγή

Ανασκόπηση

- Αναπαριστώντας την είσοδο σ᾽ ένα Γ.Χ.Α. σύστημα συνεχούς χρόνου σαν ολοκλήρωμα μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων (δηλαδή, συναρτήσεων $\delta(t-\tau)$) με βάρη εξαγάγαμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης ως τη σχέση που συνδέει την είσοδο (διέγερση) με την έξοδο (απόκριση) του Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Η έξοδος ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε μια αυθαίρετη είσοδο μπορεί να υπολογιστεί από τις αποκρίσεις του συστημάτος σε συναρτήσεις μετατοπισμένων ώσεων.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σε συνάρτηση μοναδιαίας ώσης (δηλαδή, η κρουστική απόκριση), είναι μια πολύ σημαντική έννοια.
- Η ανάλυση ήταν αποτέλεσμα της αρχής της υπέρθεσης, όπου θεωρήσαμε τις συναρτήσεις μετατοπισμένων μοναδιαίων ώσεων ως στοιχειώδεις συναρτήσεις.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Εισαγωγή

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
  1. Για τα περιοδικά σήματα θα προκύψει η ανάπτυξη σε σειρά Fourier.
  2. Για τα μη-περιοδικά σήματα θα προκύψει ο μετασχηματισμός Fourier
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
    1. Για τα περιοδικά σήματα θα προκύψει η ανάπτυξη σε σειρά Fourier,
    2. Για τα μη-περιοδικά σήματα θα προκύψει ο μετασχηματισμός Fourier
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
    1. Για τα περιοδικά σήματα θα προκύψει η ανάπτυξη σε σειρά Fourier,
    2. Για τα μη-περιοδικά σήματα θα προκύψει ο μετασχηματισμός Fourier
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
  1. Για τα περιοδικά σήματα θα προκύψει η ανάπτυξη σε σειρά Fourier,
  2. Για τα μη-περιοδικά σήματα θα προκύψει ο μετασχηματισμός Fourier
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Εισαγωγή

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
  1. Για τα περιοδικά σήματα θα προκύψει η ανάπτυξη σε σειρά Fourier,
  2. Για τα μη-περιοδικά σήματα θα προκύψει ο μετασχηματισμός Fourier
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Εισαγωγή

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
  1. Για τα περιοδικά σήματα θα προκύψει η ανάπτυξη σε σειρά Fourier,
  2. Για τα μη-περιοδικά σήματα θα προκύψει ο μετασχηματισμός Fourier
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Εισαγωγή

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(1)

- Να αναπτύξουμε μια εναλλακτική αναπαράσταση των σημάτων Σ.Χ. συναρτήσει άλλων στοιχειωδών σημάτων και να εξάγουμε μια άλλη μαθηματική περιγραφή ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Σημείο εκκίνησης θα είναι πάλι η αναπαράσταση ενός σήματος σαν άθροισμα ή ολοκλήρωμα με βάρη στοιχειωδών σημάτων, δηλαδή σαν γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών σημάτων.
- Στοιχειώδη σήματα: φανταστικά εκθετικά.
    1. Για τα περιοδικά σήματα θα προκύψει η ανάπτυξη σε σειρά Fourier,
    2. Για τα μη-περιοδικά σήματα θα προκύψει ο μετασχηματισμός Fourier
- Πρέπει να δικαιολογήσουμε ότι η επιλογή των φανταστικών εκθετικών, και γενικότερα των μιγαδικών εκθετικών, ως στοιχειωδών σημάτων δεν είναι αυθαίρετη.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(2)

- Πράγματι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα μιγαδικό εκθετικό, έχει μια απλή μορφή και επομένως μας προσφέρει άλλη μια δυνατότητα για να αναλύσουμε τις ιδιότητες ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Θα δείξουμε ότι:
- Δηλαδή, θα αποδώσουμε στον ποιοτικό όρο στοιχειώδες ή βασικό σήμα μια πιό "μαθηματική" χροιά. Εκείνη, της συνάρτησης βάσης.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(2)

- Πράγματι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα μιγαδικό εκθετικό, έχει μια απλή μορφή και επομένως μας προσφέρει άλλη μια δυνατότητα για να αναλύσουμε τις ιδιότητες ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Θα δείξουμε ότι:
    1. Τα μιγαδικά εκθετικά είναι ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) των Γ.Χ.Α. συστημάτων. Ο επιμελής φοιτητής στο άκουσμα του όρου ιδιοσυνάρτηση θα είναι σε θέση να ανακαλέσει από τη μνήμη του το γνώριμο όρο του ιδιοδιανύσματος ενός τετραγωνικού πίνακα από τη Γραμμική Άλγεβρα.
    2. Μια συλλογή M συνημιτόνων ή ημιτόνων ή φανταστικών εκθετικών συγκροτεί μια βάση στο διανυσματικό χώρο των περιοδικών σημάτων $x(t)$ σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου, ας πούμε για $t \in [0, T]$.
- Δηλαδή, θα αποδώσουμε στον ποιοτικό όρο στοιχειώδες ή βασικό σήμα μια πιό "μαθηματική" χροιά. Εκείνη, της συνάρτησης βάσης.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(2)

- Πράγματι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα μιγαδικό εκθετικό, έχει μια απλή μορφή και επομένως μας προσφέρει άλλη μια δυνατότητα για να αναλύσουμε τις ιδιότητες ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Θα δείξουμε ότι:
  1. Τα μιγαδικά εκθετικά είναι ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) των Γ.Χ.Α. συστημάτων. Ο επιμελής φοιτητής στο άκουσμα του όρου ιδιοσυνάρτηση θα είναι σε θέση να ανακαλέσει από τη μνήμη του το γνώριμο όρο του ιδιοδιανύσματος ενός τετραγωνικού πίνακα από τη Γραμμική Άλγεβρα.
  2. Μια συλλογή M συνημιτόνων ή ημιτόνων ή φανταστικών εκθετικών συγκροτεί μια βάση στο διανυσματικό χώρο των περιοδικών σημάτων $x(t)$ σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου, ας πούμε για $t \in [0, T]$.
- Δηλαδή, θα αποδώσουμε στον ποιοτικό όρο στοιχειώδες ή βασικό σήμα μια πιό "μαθηματική" χροιά. Εκείνη, της συνάρτησης βάσης.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(2)

- Πράγματι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα μιγαδικό εκθετικό, έχει μια απλή μορφή και επομένως μας προσφέρει άλλη μια δυνατότητα για να αναλύσουμε τις ιδιότητες ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Θα δείξουμε ότι:
  1. Τα μιγαδικά εκθετικά είναι ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) των Γ.Χ.Α. συστημάτων. Ο επιμελής φοιτητής στο άκουσμα του όρου ιδιοσυνάρτηση θα είναι σε θέση να ανακαλέσει από τη μνήμη του το γνώριμο όρο του ιδιοδιανύσματος ενός τετραγωνικού πίνακα από τη Γραμμική Άλγεβρα.
  2. Μια συλλογή M συνημιτόνων ή ημιτόνων ή φανταστικών εκθετικών συγκροτεί μια βάση στο διανυσματικό χώρο των περιοδικών σημάτων $x(t)$ σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου, ας πούμε για $t \in [0, T]$.
- Δηλαδή, θα αποδώσουμε στον ποιοτικό όρο στοιχειώδες ή βασικό σήμα μια πιό "μαθηματική" χροιά. Εκείνη, της συνάρτησης βάσης.

Αντικειμενικοί σκοποί ενότητας(2)

- Πράγματι η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα μιγαδικό εκθετικό, έχει μια απλή μορφή και επομένως μας προσφέρει άλλη μια δυνατότητα για να αναλύσουμε τις ιδιότητες ενός Γ.Χ.Α. συστήματος.
- Θα δείξουμε ότι:
  1. Τα μιγαδικά εκθετικά είναι ιδιοσυναρτήσεις (eigenfunctions) των Γ.Χ.Α. συστημάτων. Ο επιμελής φοιτητής στο άκουσμα του όρου ιδιοσυνάρτηση θα είναι σε θέση να ανακαλέσει από τη μνήμη του το γνώριμο όρο του ιδιοδιανύσματος ενός τετραγωνικού πίνακα από τη Γραμμική Άλγεβρα.
  2. Μια συλλογή M συνημιτόνων ή ημιτόνων ή φανταστικών εκθετικών συγκροτεί μια βάση στο διανυσματικό χώρο των περιοδικών σημάτων $x(t)$ σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου, ας πούμε για $t \in [0, T]$.
- Δηλαδή, θα αποδώσουμε στον ποιοτικό όρο στοιχειώδες ή βασικό σήμα μια πιό "μαθηματική" χροιά. Εκείνη, της συνάρτησης βάσης.

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (1)

- Βασικά είναι τα σήματα που πληρούν τις εξής δύο προδιαγραφές.
  1. Χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουν μια ευρεία και χρήσιμη τάξη σημάτων.
  2. Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα βασικό σήμα είναι απλή.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α συστήματος στο $x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$ είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau \\ &= e^{st} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \right\}}_{H(s)} = H(s)\, e^{st}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Λέμε ότι το μιγαδικό εκθετικό e^{st} είναι μια ιδιοσυνάρτηση του Γ.Χ.Α. συστήματος και η τιμή $H(s)$ είναι η ιδιοτιμή (eigenvalue) που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση e^{st}.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (1)

- Βασικά είναι τα σήματα που πληρούν τις εξής δύο προδιαγραφές.
  1. Χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουν μια ευρεία και χρήσιμη τάξη σημάτων.
  2. Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα βασικό σήμα είναι απλή.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α συστήματος στο $x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$ είναι

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau \\
&= e^{st} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \right\}}_{H(s)} = H(s)\, e^{st}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Λέμε ότι το μιγαδικό εκθετικό e^{st} είναι μια ιδιοσυνάρτηση του Γ.Χ.Α. συστήματος και η τιμή $H(s)$ είναι η ιδιοτιμή (eigenvalue) που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση e^{st}.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (1)

- Βασικά είναι τα σήματα που πληρούν τις εξής δύο προδιαγραφές.
  1. Χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουν μια ευρεία και χρήσιμη τάξη σημάτων.
  2. Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα βασικό σήμα είναι απλή.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α συστήματος στο $x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$ είναι

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau \\
&= e^{st} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \right\}}_{H(s)} = H(s)\, e^{st}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Λέμε ότι το μιγαδικό εκθετικό e^{st} είναι μια ιδιοσυνάρτηση του Γ.Χ.Α. συστήματος και η τιμή $H(s)$ είναι η ιδιοτιμή (eigenvalue) που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση e^{st}.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

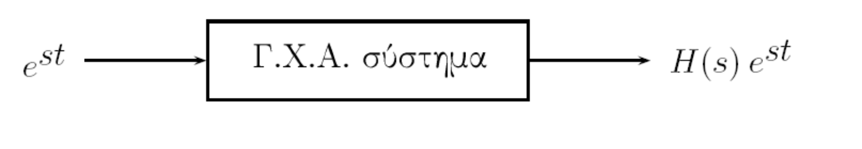
Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (1)

- Βασικά είναι τα σήματα που πληρούν τις εξής δύο προδιαγραφές.
  1. Χρησιμοποιούνται για να κατασκευάσουν μια ευρεία και χρήσιμη τάξη σημάτων.
  2. Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α. συστήματος σ' ένα βασικό σήμα είναι απλή.
- Η απόκριση ενός Γ.Χ.Α συστήματος στο $x(t) = e^{st}$, $s \in \mathbb{C}$ είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau \\ &= e^{st} \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \right\}}_{H(s)} = H(s)\, e^{st}. \end{aligned} \tag{1}$$

Λέμε ότι το μιγαδικό εκθετικό e^{st} είναι μια ιδιοσυνάρτηση του Γ.Χ.Α. συστήματος και η τιμή $H(s)$ είναι η ιδιοτιμή (eigenvalue) που αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση e^{st}.

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (2)



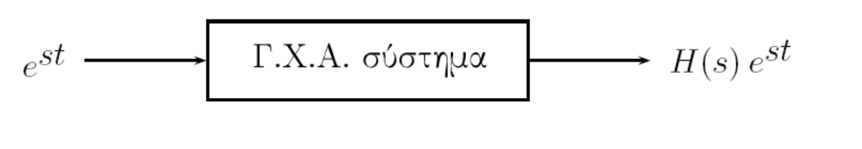
- Ας υποτεθεί ότι το σήμα που διεγείρει το Γ.Χ.Α. σύστημα αναλύεται σε

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \, e^{s_k \, t} \tag{2}$$

- Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (1) για καθεμιά συνιστώσα του αθροίσματος (2) παίρνουμε τις αποκρίσεις $a_k \, H(s_k) \, e^{s_k \, t}$, $k = 1, 2, 3$.
- Οπότε εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης, η πλήρης απόκριση του Γ.Χ.Α. συστήματος στη διέγερση $x(t)$ που δίνεται από την (2) είναι $y(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \, H(s_k) \, e^{s_k t}$.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (2)



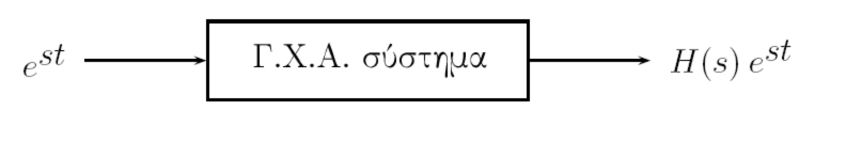
- Ας υποτεθεί ότι το σήμα που διεγείρει το Γ.Χ.Α. σύστημα αναλύεται σε

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \, e^{s_k \, t} \tag{2}$$

- Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (1) για καθεμιά συνιστώσα του αθροίσματος (2) παίρνουμε τις αποκρίσεις $a_k \, H(s_k) \, e^{s_k \, t}$, $k = 1, 2, 3$.
- Οπότε εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης, η πλήρης απόκριση του Γ.Χ.Α. συστήματος στη διέγερση $x(t)$ που δίνεται από την (2) είναι $y(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \, H(s_k) \, e^{s_k \, t}$.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (2)



- Ας υποτεθεί ότι το σήμα που διεγείρει το Γ.Χ.Α. σύστημα αναλύεται σε

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \, e^{s_k \, t} \tag{2}$$

- Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (1) για καθεμιά συνιστώσα του αθροίσματος (2) παίρνουμε τις αποκρίσεις $a_k \, H(s_k) \, e^{s_k \, t}$, $k = 1, 2, 3$.
- Οπότε εφαρμόζοντας την αρχή της υπέρθεσης, η πλήρης απόκριση του Γ.Χ.Α. συστήματος στη διέγερση $x(t)$ που δίνεται από την (2) είναι $y(t) = \sum_{k=1}^{3} a_k \, H(s_k) \, e^{s_k t}$.

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (3)

- Δηλαδή, αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές $H(s_k)$, τότε η απόκριση σ' ένα γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών εκθετικών μπορεί να υπολογιστεί απευθείας.
- Θα μελετήσουμε την αναπαράσταση περιοδικών σημάτων με όρους της σειράς Fourier (αθροίσματα φανταστικών εκθετικών). Θα μας απασχολήσει η ανάλυση ενός περιοδικού σήματος ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών.
- Επέκταση της ανάλυσης Fourier σε μη-περιοδικά σήματα (μετασχηματισμός Fourier), όπου θα χρησιμοποιηθούν ολοκληρώματα φανταστικών εκθετικών, θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.
- Γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier στο μετασχηματισμό Laplace (ολοκληρώματα μιγαδικών εκθετικών) θα επιχειρηθεί στο μεθεπόμενο κεφάλαιο.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (3)

- Δηλαδή, αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές $H(s_k)$, τότε η απόκριση σ' ένα γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών εκθετικών μπορεί να υπολογιστεί απευθείας.
- Θα μελετήσουμε την αναπαράσταση περιοδικών σημάτων με όρους της σειράς Fourier (αθροίσματα φανταστικών εκθετικών). Θα μας απασχολήσει η ανάλυση ενός περιοδικού σήματος ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών.
- Επέκταση της ανάλυσης Fourier σε μη-περιοδικά σήματα (μετασχηματισμός Fourier), όπου θα χρησιμοποιηθούν ολοκληρώματα φανταστικών εκθετικών, θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.
- Γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier στο μετασχηματισμό Laplace (ολοκληρώματα μιγαδικών εκθετικών) θα επιχειρηθεί στο μεθεπόμενο κεφάλαιο.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (3)

- Δηλαδή, αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές $H(s_k)$, τότε η απόκριση σ' ένα γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών εκθετικών μπορεί να υπολογιστεί απευθείας.
- Θα μελετήσουμε την αναπαράσταση περιοδικών σημάτων με όρους της σειράς Fourier (αθροίσματα φανταστικών εκθετικών). Θα μας απασχολήσει η ανάλυση ενός περιοδικού σήματος ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών.
- Επέκταση της ανάλυσης Fourier σε μη-περιοδικά σήματα (μετασχηματισμός Fourier), όπου θα χρησιμοποιηθούν ολοκληρώματα φανταστικών εκθετικών, θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.
- Γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier στο μετασχηματισμό Laplace (ολοκληρώματα μιγαδικών εκθετικών) θα επιχειρηθεί στο μεθεπόμενο κεφάλαιο.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Βασικά σήματα: Μιγαδικά εκθετικά (3)

- Δηλαδή, αν γνωρίζουμε τις ιδιοτιμές $H(s_k)$, τότε η απόκριση σ' ένα γραμμικό συνδυασμό μιγαδικών εκθετικών μπορεί να υπολογιστεί απευθείας.
- Θα μελετήσουμε την αναπαράσταση περιοδικών σημάτων με όρους της σειράς Fourier (αθροίσματα φανταστικών εκθετικών). Θα μας απασχολήσει η ανάλυση ενός περιοδικού σήματος ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών.
- Επέκταση της ανάλυσης Fourier σε μη-περιοδικά σήματα (μετασχηματισμός Fourier), όπου θα χρησιμοποιηθούν ολοκληρώματα φανταστικών εκθετικών, θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.
- Γενίκευση του μετασχηματισμού Fourier στο μετασχηματισμό Laplace (ολοκληρώματα μιγαδικών εκθετικών) θα επιχειρηθεί στο μεθεπόμενο κεφάλαιο.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Ιστορική αναδρομή (1)

- Η ιδέα χρησιμοποίησης τριγωνομετρικών αθροισμάτων για την περιγραφή περιοδικών φαινομένων αποδίδεται στους αρχαίους Βαβυλωνίους.
- Ο L. Euler το 1748 χρησιμοποίησε τριγωνομετρικά αθροίσματα κατά τη μελέτη της κίνησης μιας παλλόμενης χορδής.
- Ο D. Bernoulli το 1753 ισχυρίστηκε ότι όλες οι φυσικές κινήσεις μιας παλλόμενης χορδής θα μπορούσαν να περιγραφούν ως άθροισμα αρμονικών.
- Το 1759, η κριτική του Euler, αλλά κυρίως του J. L. Lagrange, συνέτεινε στην εγκατάληψη των τριγωνομετρικών σειρών. Ο Lagrange δεν μπορούσε να φανταστεί πώς ένα περιοδικό σήμα με ασυνέχειες (π.χ. ένας περιοδικός τετραγωνικός παλμός) θα μπορούσε να αναλυθεί ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, δηλαδή ως τριγωνομετρική σειρά.

Ιστορική αναδρομή (1)

- Η ιδέα χρησιμοποίησης τριγωνομετρικών αθροισμάτων για την περιγραφή περιοδικών φαινομένων αποδίδεται στους αρχαίους Βαβυλωνίους.
- Ο L. Euler το 1748 χρησιμοποίησε τριγωνομετρικά αθροίσματα κατά τη μελέτη της κίνησης μιας παλλόμενης χορδής.
- Ο D. Bernoulli το 1753 ισχυρίστηκε ότι όλες οι φυσικές κινήσεις μιας παλλόμενης χορδής θα μπορούσαν να περιγραφούν ως άθροισμα αρμονικών.
- Το 1759, η κριτική του Euler, αλλά κυρίως του J. L. Lagrange, συνέτεινε στην εγκατάληψη των τριγωνομετρικών σειρών. Ο Lagrange δεν μπορούσε να φανταστεί πώς ένα περιοδικό σήμα με ασυνέχειες (π.χ. ένας περιοδικός τετραγωνικός παλμός) θα μπορούσε να αναλυθεί ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, δηλαδή ως τριγωνομετρική σειρά.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Ιστορική αναδρομή (1)

- Η ιδέα χρησιμοποίησης τριγωνομετρικών αθροισμάτων για την περιγραφή περιοδικών φαινομένων αποδίδεται στους αρχαίους Βαβυλωνίους.
- Ο L. Euler το 1748 χρησιμοποίησε τριγωνομετρικά αθροίσματα κατά τη μελέτη της κίνησης μιας παλλόμενης χορδής.
- Ο D. Bernoulli το 1753 ισχυρίστηκε ότι όλες οι φυσικές κινήσεις μιας παλλόμενης χορδής θα μπορούσαν να περιγραφούν ως άθροισμα αρμονικών.
- Το 1759, η κριτική του Euler, αλλά κυρίως του J. L. Lagrange, συνέτεινε στην εγκατάλειψη των τριγωνομετρικών σειρών. Ο Lagrange δεν μπορούσε να φανταστεί πώς ένα περιοδικό σήμα με ασυνέχειες (π.χ. ένας περιοδικός τετραγωνικός παλμός) θα μπορούσε να αναλυθεί ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, δηλαδή ως τριγωνομετρική σειρά.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Ιστορική αναδρομή (1)

- Η ιδέα χρησιμοποίησης τριγωνομετρικών αθροισμάτων για την περιγραφή περιοδικών φαινομένων αποδίδεται στους αρχαίους Βαβυλωνίους.
- Ο L. Euler το 1748 χρησιμοποίησε τριγωνομετρικά αθροίσματα κατά τη μελέτη της κίνησης μιας παλλόμενης χορδής.
- Ο D. Bernoulli το 1753 ισχυρίστηκε ότι όλες οι φυσικές κινήσεις μιας παλλόμενης χορδής θα μπορούσαν να περιγραφούν ως άθροισμα αρμονικών.
- Το 1759, η κριτική του Euler, αλλά κυρίως του J. L. Lagrange, συνέτεινε στην εγκατάληψη των τριγωνομετρικών σειρών. Ο Lagrange δεν μπορούσε να φανταστεί πώς ένα περιοδικό σήμα με ασυνέχειες (π.χ. ένας περιοδικός τετραγωνικός παλμός) θα μπορούσε να αναλυθεί ως άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων σε συχνότητες που είναι ακέραια πολλαπλάσια μιας θεμελιώδους, δηλαδή ως τριγωνομετρική σειρά.

Ιστορική αναδρομή (2)

- Μισό αιώνα αργότερα, ο J. B. Fourier ξαναχρησιμοποίησε τέτοιες σειρές στη μελέτη του προβλήματος της διάδοσης θερμότητας και επεξέτεινε τη θεωρία και για την ανάλυση μη-περιοδικών σημάτων μέσω του ομώνυμου μετασχηματισμού.
- Η εργασία του Fourier υποβλήθηκε προς δημοσίευση για πρώτη φορά το 1807. Συνάντησε όμως την αρνητική κριτική του Lagrange και παρά τη θετική αντιμετώπισή της από τους Lacroix, Monge και Laplace, δημοσιεύτηκε μετά 15 ολόκληρα χρόνια.
- Η αλήθεια είναι πως η αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας είχε κάποιες ελλείψεις τις οποίες συμπλήρωσε αργότερα ο P. L. Dirichlet το 1829. Οι συνθήκες Dirichlet περιγράφουν σήματα που σπανίως απαντώνται στην πράξη.

Ιστορική αναδρομή (2)

- Μισό αιώνα αργότερα, ο J. B. Fourier ξαναχρησιμοποίησε τέτοιες σειρές στη μελέτη του προβλήματος της διάδοσης θερμότητας και επεξέτεινε τη θεωρία και για την ανάλυση μη-περιοδικών σημάτων μέσω του ομώνυμου μετασχηματισμού.
- Η εργασία του Fourier υποβλήθηκε προς δημοσίευση για πρώτη φορά το 1807. Συνάντησε όμως την αρνητική κριτική του Lagrange και παρά τη θετική αντιμετώπισή της από τους Lacroix, Monge και Laplace, δημοσιεύτηκε μετά 15 ολόκληρα χρόνια.
- Η αλήθεια είναι πως η αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας είχε κάποιες ελλείψεις τις οποίες συμπλήρωσε αργότερα ο P. L. Dirichlet το 1829. Οι συνθήκες Dirichlet περιγράφουν σήματα που σπανίως απαντώνται στην πράξη.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Ιστορική αναδρομή (2)

- Μισό αιώνα αργότερα, ο J. B. Fourier ξαναχρησιμοποίησε τέτοιες σειρές στη μελέτη του προβλήματος της διάδοσης θερμότητας και επεξέτεινε τη θεωρία και για την ανάλυση μη-περιοδικών σημάτων μέσω του ομώνυμου μετασχηματισμού.
- Η εργασία του Fourier υποβλήθηκε προς δημοσίευση για πρώτη φορά το 1807. Συνάντησε όμως την αρνητική κριτική του Lagrange και παρά τη θετική αντιμετώπισή της από τους Lacroix, Monge και Laplace, δημοσιεύτηκε μετά 15 ολόκληρα χρόνια.
- Η αλήθεια είναι πως η αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας είχε κάποιες ελλείψεις τις οποίες συμπλήρωσε αργότερα ο P. L. Dirichlet το 1829. Οι συνθήκες Dirichlet περιγράφουν σήματα που σπανίως απαντώνται στην πράξη.

Ιστορική αναδρομή (3)

- Στα μέσα της δεκαετίας του 1960, η "ανακάλυψη" του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier από τους Cooley και Tuckey αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον για την ανάλυση Fourier, επειδή, μειώνοντας το υπολογιστικό κόστος, προσέφερε τη δυνατότητα ενσωμάτωσης της ανάλυσης σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, π.χ. κωδικοποίηση, ανάλυση φάσματος, επεξεργασία εικόνας, ομιλίας κ.ο.κ.
- Διαπιστώθηκε αργότερα ότι η ανακάλυψη των Cooley-Tuckey δεν ήταν αποκλειστική. Ο Gauss και αργότερα απ' αυτόν, ο Lanczos είχαν τεράστια συμβολή στην ανάλυση Fourier διακριτών σημάτων και συστημάτων πολύ πριν τους Cooley και Tuckey.

Απόκριση Γ.Χ.Α. συστήματος Σ.Χ. σε μιγαδικά εκθετικά

Ιστορική αναδρομή (3)

- Στα μέσα της δεκαετίας του 1960, η "ανακάλυψη" του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier από τους Cooley και Tuckey αναζωπύρωσε το ενδιαφέρον για την ανάλυση Fourier, επειδή, μειώνοντας το υπολογιστικό κόστος, προσέφερε τη δυνατότητα ενσωμάτωσης της ανάλυσης σε πολλές πρακτικές εφαρμογές, π.χ. κωδικοποίηση, ανάλυση φάσματος, επεξεργασία εικόνας, ομιλίας κ.ο.κ.
- Διαπιστώθηκε αργότερα ότι η ανακάλυψη των Cooley-Tuckey δεν ήταν αποκλειστική. Ο Gauss και αργότερα απ' αυτόν, ο Lanczos είχαν τεράστια συμβολή στην ανάλυση Fourier διακριτών σημάτων και συστημάτων πολύ πριν τους Cooley και Tuckey.

Περιοδικά σήματα - Αρμονικές

- Ένα περιοδικό σήμα ικανοποιεί τη σχέση $\exists T \neq 0$: $x(t+T) = x(t), \forall t$.
- Περιοδικά σήματα είναι οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις $x(t) = \cos \omega_0 t$ ή $x(t) = \sin \omega_0 t$ και τα φανταστικά εκθετικά $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, όπου ω_0 είναι η θεμελιώδης (κυκλική) συχνότητα μετρούμενη σε rad/sec και $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ είναι η θεμελιώδης περίοδος μετρούμενη σε sec.
- Ως αρμονικές ορίζουμε τα σήματα $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, των οποίων η θεμελιώδης συχνότητα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ω_0.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Περιοδικά σήματα - Αρμονικές

- Ένα περιοδικό σήμα ικανοποιεί τη σχέση $\exists T \neq 0$: $x(t+T) = x(t), \forall t$.
- Περιοδικά σήματα είναι οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις $x(t) = \cos \omega_0 t$ ή $x(t) = \sin \omega_0 t$ και τα φανταστικά εκθετικά $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, όπου ω_0 είναι η θεμελιώδης (κυκλική) συχνότητα μετρούμενη σε rad/sec και $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ είναι η θεμελιώδης περίοδος μετρούμενη σε sec.
- Ως αρμονικές ορίζουμε τα σήματα $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, των οποίων η θεμελιώδης συχνότητα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ω_0.

Περιοδικά σήματα - Αρμονικές

- Ένα περιοδικό σήμα ικανοποιεί τη σχέση $\exists T \neq 0$: $x(t+T) = x(t), \forall t$.
- Περιοδικά σήματα είναι οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις $x(t) = \cos \omega_0 t$ ή $x(t) = \sin \omega_0 t$ και τα φανταστικά εκθετικά $x(t) = e^{j\omega_0 t}$, όπου ω_0 είναι η θεμελιώδης (κυκλική) συχνότητα μετρούμενη σε rad/sec και $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ είναι η θεμελιώδης περίοδος μετρούμενη σε sec.
- Ως αρμονικές ορίζουμε τα σήματα $\phi_k(t) = e^{jk\,\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, των οποίων η θεμελιώδης συχνότητα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της ω_0.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Πρόβλημα

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο T_0 ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{j\,k\omega_0\,t} \tag{3}$$

- Για $k = 0$ έχουμε το σταθερό όρο ή όρο dc
- Για $k = \pm 1$ προκύπτουν οι βασικές συνιστώσες που έχουν περίοδο T_0 (πρώτες αρμονικές)
- Για $k = \pm 2$: έχουμε τις συνιστώσες ημίσειας περιόδου (διπλάσιας συχνότητας), δηλαδή τις δεύτερες αρμονικές κ.ο.κ., ενώ
- Για $k = \pm N$ προκύπτουν οι Nιοστές αρμονικές.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Πρόβλημα

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο T_0 ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{j\,k\omega_0\,t} \tag{3}$$

- Για $k = 0$ έχουμε το σταθερό όρο ή όρο dc
- Για $k = \pm 1$ προκύπτουν οι βασικές συνιστώσες που έχουν περίοδο T_0 (πρώτες αρμονικές)
- Για $k = \pm 2$: έχουμε τις συνιστώσες ημίσειας περιόδου (διπλάσιας συχνότητας), δηλαδή τις δεύτερες αρμονικές κ.ο.κ., ενώ
- Για $k = \pm N$ προκύπτουν οι Nιοστές αρμονικές.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Πρόβλημα

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο T_0 ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{j\,k\omega_0\,t} \tag{3}$$

- Για $k = 0$ έχουμε το σταθερό όρο ή όρο dc
- Για $k = \pm 1$ προκύπτουν οι βασικές συνιστώσες που έχουν περίοδο T_0 (πρώτες αρμονικές)
- Για $k = \pm 2$: έχουμε τις συνιστώσες ημίσειας περιόδου (διπλάσιας συχνότητας), δηλαδή τις δεύτερες αρμονικές κ.ο.κ., ενώ
- Για $k = \pm N$ προκύπτουν οι Nοστές αρμονικές.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Πρόβλημα

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο T_0 ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{j\,k\omega_0\,t} \tag{3}$$

- Για $k = 0$ έχουμε το σταθερό όρο ή όρο dc
- Για $k = \pm 1$ προκύπτουν οι βασικές συνιστώσες που έχουν περίοδο T_0 (πρώτες αρμονικές)
- Για $k = \pm 2$: έχουμε τις συνιστώσες ημίσειας περιόδου (διπλάσιας συχνότητας), δηλαδή τις δεύτερες αρμονικές κ.ο.κ., ενώ
- Για $k = \pm N$ προκύπτουν οι Nιοστές αρμονικές.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Πρόβλημα

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ με περίοδο T_0 ως γραμμικού συνδυασμού αρμονικών

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{j\,k\omega_0\,t} \tag{3}$$

- Για $k = 0$ έχουμε το σταθερό όρο ή όρο dc
- Για $k = \pm 1$ προκύπτουν οι βασικές συνιστώσες που έχουν περίοδο T_0 (πρώτες αρμονικές)
- Για $k = \pm 2$: έχουμε τις συνιστώσες ημίσειας περιόδου (διπλάσιας συχνότητας), δηλαδή τις δεύτερες αρμονικές κ.ο.κ., ενώ
- Για $k = \pm N$ προκύπτουν οι Nιοστές αρμονικές.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Σειρά Fourier

- Αντικειμενικός μας σκοπός: Πώς θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_k στην (3);
- Θα αντιμετωπίσουμε την (3) σ' ένα ευρύτερο πλαίσιο ως αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος σαν γραμμικού συνδυασμού βασικών σημάτων, όπου τα βασικά σήματα θα αντιστοιχούν σε συναρτήσεις βάσης. Όμως οι συναρτήσεις βάσης προϋποθέτουν ένα διανυσματικό χώρο (vector space).

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Σειρά Fourier

- Αντικειμενικός μας σκοπός: Πώς θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_k στην (3);
- Θα αντιμετωπίσουμε την (3) σ' ένα ευρύτερο πλαίσιο ως αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος σαν γραμμικού συνδυασμού βασικών σημάτων, όπου τα βασικά σήματα θα αντιστοιχούν σε συναρτήσεις βάσης. Όμως οι συναρτήσεις βάσης προϋποθέτουν ένα διανυσματικό χώρο (vector space).

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παράδειγμα 4.1

- Έστω $x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k \, e^{jk\,2\pi\,t}$ με $a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$, $a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$ και $a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$.
- Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \\ &\quad + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t. \end{aligned}$$

Υπέρθεση αρμονικών

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παράδειγμα 4.1

- Έστω $x(t) = \sum_{k=-3}^{3} a_k \, e^{jk\,2\pi\,t}$ με $a_0 = 1$, $a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}$, $a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}$ και $a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$.
- Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \\ &\quad + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t. \end{aligned}$$

Υπέρθεση αρμονικών

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βαθμωτό πεδίο (scalar field) $\mathcal{K}$

Είναι ένα σύνολο αριθμών που είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Έστω $x, y, z \in \mathcal{K}$. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- αντιμεταθετική (commutative) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- προσεταιριστική (associative) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- επιμεριστική (distributive) ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (null element), που συμβολίζεται με $0 \in \mathcal{K}$ για την πρόσθεση και $1 \in \mathcal{K}$ για τον πολλαπλασιασμό, ώστε $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$.
- Όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ έχουν έναν αντίστροφο που ανήκει στο $\mathcal{K}$ ως προς την πρόσθεση (που συνήθως αποκαλείται αντίθετος) και όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ εκτός του 0 έχουν έναν αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα πεδίων: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και $\mathbb{Q}$.

Βαθμωτό πεδίο (scalar field) $\mathcal{K}$

Είναι ένα σύνολο αριθμών που είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Έστω $x, y, z \in \mathcal{K}$. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- αντιμεταθετική (commutative) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- προσεταιριστική (associative) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- επιμεριστική (distributive) ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (null element), που συμβολίζεται με $0 \in \mathcal{K}$ για την πρόσθεση και $1 \in \mathcal{K}$ για τον πολλαπλασιασμό, ώστε $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$.
- Όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ έχουν έναν αντίστροφο που ανήκει στο $\mathcal{K}$ ως προς την πρόσθεση (που συνήθως αποκαλείται αντίθετος) και όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ εκτός του 0 έχουν έναν αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα πεδίων: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και $\mathbb{Q}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βαθμωτό πεδίο (scalar field) $\mathcal{K}$

Είναι ένα σύνολο αριθμών που είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Έστω $x, y, z \in \mathcal{K}$. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- αντιμεταθετική (commutative) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- προσεταιριστική (associative) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- επιμεριστική (distributive) ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (null element), που συμβολίζεται με $0 \in \mathcal{K}$ για την πρόσθεση και $1 \in \mathcal{K}$ για τον πολλαπλασιασμό, ώστε $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$.
- Όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ έχουν έναν αντίστροφο που ανήκει στο $\mathcal{K}$ ως προς την πρόσθεση (που συνήθως αποκαλείται αντίθετος) και όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ εκτός του 0 έχουν έναν αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα πεδίων: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και $\mathbb{Q}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βαθμωτό πεδίο (scalar field) $\mathcal{K}$

Είναι ένα σύνολο αριθμών που είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Έστω $x, y, z \in \mathcal{K}$. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- αντιμεταθετική (commutative) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- προσεταιριστική (associative) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- επιμεριστική (distributive) ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (null element), που συμβολίζεται με $0 \in \mathcal{K}$ για την πρόσθεση και $1 \in \mathcal{K}$ για τον πολλαπλασιασμό, ώστε $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$.
- Όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ έχουν έναν αντίστροφο που ανήκει στο $\mathcal{K}$ ως προς την πρόσθεση (που συνήθως αποκαλείται αντίθετος) και όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ εκτός του 0 έχουν έναν αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα πεδίων: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και $\mathbb{Q}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βαθμωτό πεδίο (scalar field) $\mathcal{K}$

Είναι ένα σύνολο αριθμών που είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό. Έστω $x, y, z \in \mathcal{K}$. Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- αντιμεταθετική (commutative) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$
- προσεταιριστική (associative) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- επιμεριστική (distributive) ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο (null element), που συμβολίζεται με $0 \in \mathcal{K}$ για την πρόσθεση και $1 \in \mathcal{K}$ για τον πολλαπλασιασμό, ώστε $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$.
- Όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ έχουν έναν αντίστροφο που ανήκει στο $\mathcal{K}$ ως προς την πρόσθεση (που συνήθως αποκαλείται αντίθετος) και όλα τα στοιχεία του $\mathcal{K}$ εκτός του 0 έχουν έναν αντίστροφο ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Παραδείγματα πεδίων: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ και $\mathbb{Q}$.

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται διανύσματα για τα οποία ορίζονται:
    1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
    2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται **διανύσματα** για τα οποία ορίζονται:
    1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
    2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται διανύσματα για τα οποία ορίζονται:
  1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
  2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}: \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}: (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}: \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται διανύσματα για τα οποία ορίζονται:
    1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
    2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται διανύσματα για τα οποία ορίζονται:
  1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
  2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται διανύσματα για τα οποία ορίζονται:
  1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
  2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται διανύσματα για τα οποία ορίζονται:
  1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
  2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Υπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (1)

- Είναι ένα σύνολο στοιχείων $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$ που λέγονται διανύσματα για τα οποία ορίζονται:
  1. η πρόσθεση δύο διανυσμάτων που δίνει διάνυσμα και
  2. ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών που δίνει διάνυσμα.
- Το $\mathcal{S}$ είναι κλειστό ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος επί ένα πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών.
- Η διανυσματική πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος μ' έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό εξ αριστερών έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
- Αντιμεταθετική $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Προσεταιριστική $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathcal{S}$: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος $\vec{0}$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (2)

- Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}\ \exists \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.
- Για το ουδέτερο στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $1 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $1\,\vec{x} = \vec{x}$
- Επιμεριστικές ιδιότητες: $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}, a, b \in \mathbb{R}$: $a\,(b\,\vec{x}) = (a\,b)\,\vec{x}$, $(a+b)\vec{x} = (a\vec{x}) + (b\,\vec{x})$ και $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}, a \in \mathbb{R}$: $a\,(\vec{x} + \vec{y}) = (a\vec{x}) + (a\,\vec{y})$.
- Τυπικό παράδειγμα ενός διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των πραγματικών διανυσμάτων στήλης μεγέθους $n \times 1$, $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και ^{T} είναι ο τελεστής αναστροφής.
- Είναι προφανές ότι αντίστοιχα ορίζεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο $\mathbb{C}$.
- Συγκροτούν διανυσματικούς χώρους
  1. οι συνεχείς συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$
  2. οι συνεχείς συναρτήσεις $\phi(s)$ για $s = a + jb \in \mathbb{C}$, όταν $s \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (2)

- Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}\ \exists \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.
- Για το ουδέτερο στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $1 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $1\,\vec{x} = \vec{x}$
- Επιμεριστικές ιδιότητες: $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$, $a, b \in \mathbb{R}$: $a\,(b\,\vec{x}) = (a\,b)\,\vec{x}$, $(a+b)\vec{x} = (a\vec{x}) + (b\,\vec{x})$ και $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}$: $a\,(\vec{x} + \vec{y}) = (a\vec{x}) + (a\,\vec{y})$.
- Τυπικό παράδειγμα ενός διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των πραγματικών διανυσμάτων στήλης μεγέθους $n \times 1$, $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και ^{T} είναι ο τελεστής αναστροφής.
- Είναι προφανές ότι αντίστοιχα ορίζεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο $\mathbb{C}$.
- Συγκροτούν διανυσματικούς χώρους
  1. οι συνεχείς συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$
  2. οι συνεχείς συναρτήσεις $\phi(s)$ για $s = a + jb \in \mathbb{C}$, όταν $s \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$.

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (2)

- Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}\ \exists \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.
- Για το ουδέτερο στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $1 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $1\, \vec{x} = \vec{x}$
- Επιμεριστικές ιδιότητες: $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$, $a, b \in \mathbb{R}$: $a\,(b\,\vec{x}) = (a\,b)\,\vec{x}$, $(a+b)\vec{x} = (a\vec{x}) + (b\,\vec{x})$ και $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbb{R}$: $a\,(\vec{x} + \vec{y}) = (a\vec{x}) + (a\,\vec{y})$.
- Τυπικό παράδειγμα ενός διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των πραγματικών διανυσμάτων στήλης μεγέθους $n \times 1$, $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και ^{T} είναι ο τελεστής αναστροφής.
- Είναι προφανές ότι αντίστοιχα ορίζεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο $\mathbb{C}$.
- Συγκροτούν διανυσματικούς χώρους
  1. οι συνεχείς συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$
  2. οι συνεχείς συναρτήσεις $\phi(s)$ για $s = a + jb \in \mathbb{C}$, όταν $s \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (2)

- Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}\ \exists \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.
- Για το ουδέτερο στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $1 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $1\,\vec{x} = \vec{x}$
- Επιμεριστικές ιδιότητες: $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}, a, b \in \mathbb{R}$: $a\,(b\,\vec{x}) = (a\,b)\,\vec{x}$, $(a+b)\vec{x} = (a\vec{x}) + (b\,\vec{x})$ και $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}, a \in \mathbb{R}$: $a\,(\vec{x} + \vec{y}) = (a\vec{x}) + (a\,\vec{y})$.
- Τυπικό παράδειγμα ενός διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των πραγματικών διανυσμάτων στήλης μεγέθους $n \times 1$, $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και ^{T} είναι ο τελεστής αναστροφής.
- Είναι προφανές ότι αντίστοιχα ορίζεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο $\mathbb{C}$.
- Συγκροτούν διανυσματικούς χώρους
  1. οι συνεχείς συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$
  2. οι συνεχείς συναρτήσεις $\phi(s)$ για $s = a + jb \in \mathbb{C}$, όταν $s \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (2)

- Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}\ \exists \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.
- Για το ουδέτερο στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $1 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $1\,\vec{x} = \vec{x}$
- Επιμεριστικές ιδιότητες: $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}, a, b \in \mathbb{R}$: $a\,(b\,\vec{x}) = (a\,b)\,\vec{x}$, $(a+b)\vec{x} = (a\vec{x}) + (b\,\vec{x})$ και $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}, a \in \mathbb{R}$: $a\,(\vec{x} + \vec{y}) = (a\vec{x}) + (a\,\vec{y})$.
- Τυπικό παράδειγμα ενός διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των πραγματικών διανυσμάτων στήλης μεγέθους $n \times 1$, $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και ^{T} είναι ο τελεστής αναστροφής.
- Είναι προφανές ότι αντίστοιχα ορίζεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο $\mathbb{C}$.
- Συγκροτούν διανυσματικούς χώρους
  1. οι συνεχείς συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$
  2. οι συνεχείς συναρτήσεις $\phi(s)$ για $s = a + jb \in \mathbb{C}$, όταν $s \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$ στο πεδίο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ (2)

- Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}\ \exists \vec{y} \in \mathcal{S}$: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$.
- Για το ουδέτερο στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλασιασμού $1 \in \mathbb{R}$ ισχύει $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}$: $1\,\vec{x} = \vec{x}$
- Επιμεριστικές ιδιότητες: $\forall \vec{x} \in \mathcal{S}, a, b \in \mathbb{R}$: $a\,(b\,\vec{x}) = (a\,b)\,\vec{x}$, $(a+b)\vec{x} = (a\vec{x}) + (b\,\vec{x})$ και $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{S}, a \in \mathbb{R}$: $a\,(\vec{x} + \vec{y}) = (a\vec{x}) + (a\,\vec{y})$.
- Τυπικό παράδειγμα ενός διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ των πραγματικών διανυσμάτων στήλης μεγέθους $n \times 1$, $\vec{x} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ και ^{T} είναι ο τελεστής αναστροφής.
- Είναι προφανές ότι αντίστοιχα ορίζεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο πεδίο $\mathbb{C}$.
- Συγκροτούν διανυσματικούς χώρους
  1. οι συνεχείς συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$
  2. οι συνεχείς συναρτήσεις $\phi(s)$ για $s = a + jb \in \mathbb{C}$, όταν $s \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:
  1. το $\mathbb{R}^3$
  2. ένα οποιοδήποτε επίπεδο δια της αρχής (των αξόνων) $\mathbf{0} = (0,0,0)^T$
  3. μια οποιαδήποτε ευθεία δια της αρχής
  4. η αρχή.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:
  1. το $\mathbb{R}^3$
  2. ένα οποιοδήποτε επίπεδο δια της αρχής (των αξόνων) $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$
  3. μια οποιαδήποτε ευθεία δια της αρχής
  4. η αρχή.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:
  1. το $\mathbb{R}^3$
  2. ένα οποιοδήποτε επίπεδο δια της αρχής (των αξόνων) $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$
  3. μια οποιαδήποτε ευθεία δια της αρχής
  4. η αρχή.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:
  1. το $\mathbb{R}^3$
  2. ένα οποιοδήποτε επίπεδο δια της αρχής (των αξόνων) $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$
  3. μια οποιαδήποτε ευθεία δια της αρχής
  4. η αρχή.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Διανυσματικός υποχώρος

- Ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ ενός διανυσματικού χώρου $\mathcal{S}$ είναι ένας διανυσματικός υποχώρος (ή για συντομία απλώς υποχώρος) του $\mathcal{S}$, εάν ο περιορισμός των πράξεων στο $\mathcal{M}$, καθιστά το σύνολο $\mathcal{M}$ διανυσματικό χώρο.
- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ υποχώρος του $\mathcal{S}$ είναι $\vec{0} \in \mathcal{M}$.
- Η τομή δύο υποχώρων είναι επίσης υποχώρος.
- Για παράδειγμα υποχώροι του τρισδιάστατου Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ είναι οι εξής:
  1. το $\mathbb{R}^3$
  2. ένα οποιοδήποτε επίπεδο δια της αρχής (των αξόνων) $\mathbf{0} = (0, 0, 0)^T$
  3. μια οποιαδήποτε ευθεία δια της αρχής
  4. η αρχή.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Γραμμικός συνδυασμός (1)

- Ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι ένα (διανυσματικό) άθροισμα της μορφής

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n \quad \text{όπου } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

- Τα διανύσματα $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n = \vec{0} \tag{4}$$

- Τα διανύσματα $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα αν η (4) αληθεύει μόνο όταν $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Γραμμικός συνδυασμός (1)

- Ένας **γραμμικός συνδυασμός** διανυσμάτων $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι ένα (διανυσματικό) άθροισμα της μορφής

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n \quad \text{όπου } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

- Τα διανύσματα $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα** αν υπάρχουν a_1, a_2, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n = \vec{0} \tag{4}$$

- Τα διανύσματα $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα αν η (4) αληθεύει μόνο όταν $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Γραμμικός συνδυασμός (1)

- Ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι ένα (διανυσματικό) άθροισμα της μορφής

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n \quad \text{όπου } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

- Τα διανύσματα $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n = \vec{0} \tag{4}$$

- Τα διανύσματα $\vec{x}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα αν η (4) αληθεύει μόνο όταν $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Γραμμικός συνδυασμός (2)

- Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$. Παράγον σύνολο (span) του $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών αυτών των διανυσμάτων, δηλαδή

$$\mathrm{span}(\mathcal{X}) = \{\vec{y} : \vec{y} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

- Ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχηματίσει έναν **αυθαίρετο υποχώρο ενός διανυσματικού χώρου**, επειδή το $\mathrm{span}(\mathcal{X})$ είναι υποχώρος του $\mathcal{S}$.
- Αναγνωρίζουμε ότι η (3) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ συγκροτούν ένα διανυσματικό χώρο (άρα και οι συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις αν μελετηθούν σε ένα διάστημα μιας περιόδου) εμπίπτει στη συζήτησή μας περί υποχώρων.
- Εφεξής $\mathcal{S}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t (δηλαδή σημάτων) για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο $\mathbb{R}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Γραμμικός συνδυασμός (2)

- Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$. Παράγον σύνολο (span) του $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών αυτών των διανυσμάτων, δηλαδή

$$\mathrm{span}(\mathcal{X}) = \{\vec{y} : \vec{y} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

- Ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχηματίσει έναν **αυθαίρετο υποχώρο ενός διανυσματικού χώρου**, επειδή το $\mathrm{span}(\mathcal{X})$ είναι υποχώρος του $\mathcal{S}$.

- Αναγνωρίζουμε ότι η (3) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ συγκροτούν ένα διανυσματικό χώρο (άρα και οι συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις αν μελετηθούν σε ένα διάστημα μιας περιόδου) εμπίπτει στη συζήτησή μας περί υποχώρων.

- Εφεξής $\mathcal{S}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t (δηλαδή σημάτων) για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο $\mathbb{R}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Γραμμικός συνδυασμός (2)

- Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$. Παράγον σύνολο (span) του $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών αυτών των διανυσμάτων, δηλαδή

$$\mathrm{span}(\mathcal{X}) = \{\vec{y} : \vec{y} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

- Ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχηματίσει έναν **αυθαίρετο υποχώρο ενός διανυσματικού χώρου**, επειδή το $\mathrm{span}(\mathcal{X})$ είναι υποχώρος του $\mathcal{S}$.
- Αναγνωρίζουμε ότι η (3) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ συγκροτούν ένα διανυσματικό χώρο (άρα και οι συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις αν μελετηθούν σε ένα διάστημα μιας περιόδου) εμπίπτει στη συζήτησή μας περί υποχώρων.
- Εφεξής $\mathcal{S}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t (δηλαδή σημάτων) για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο $\mathbb{R}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Γραμμικός συνδυασμός (2)

- Έστω $\mathcal{X} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$. Παράγον σύνολο (span) του $\mathcal{X}$ είναι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών αυτών των διανυσμάτων, δηλαδή

$$\mathrm{span}(\mathcal{X}) = \{\vec{y} : \vec{y} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \ldots + a_n\vec{x}_n, \quad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

- Ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχηματίσει έναν **αυθαίρετο υποχώρο ενός διανυσματικού χώρου**, επειδή το $\mathrm{span}(\mathcal{X})$ είναι υποχώρος του $\mathcal{S}$.
- Αναγνωρίζουμε ότι η (3) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ συγκροτούν ένα διανυσματικό χώρο (άρα και οι συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις αν μελετηθούν σε ένα διάστημα μιας περιόδου) εμπίπτει στη συζήτησή μας περί υποχώρων.
- Εφεξής $\mathcal{S}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των συνεχών συναρτήσεων μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t (δηλαδή σημάτων) για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο $\mathbb{R}$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Εσωτερικό γινόμενο

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$, δηλαδή $< x(t), y(t) >: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που παράγει τη βαθμωτή τιμή

$$< x(t), y(t) >= \int_{t_1}^{t_2} x(t)\; y(t)\; dt.$$

- Περιγράφει πόσο μοιάζουν δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$, κατ' αναλογία με την προβολή ενός διανύσματος σ' ένα άλλο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Εσωτερικό γινόμενο

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$, δηλαδή $< x(t), y(t) >: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που παράγει τη βαθμωτή τιμή

$$< x(t), y(t) > = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, y(t)\, dt.$$

- Περιγράφει πόσο μοιάζουν δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$, κατ' αναλογία με την προβολή ενός διανύσματος σ' ένα άλλο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Εσωτερικό γινόμενο

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$, δηλαδή $< x(t), y(t) >: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που παράγει τη βαθμωτή τιμή

$$< x(t), y(t) >= \int_{t_1}^{t_2} x(t)\ y(t)\ dt.$$

- Περιγράφει πόσο μοιάζουν δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$, κατ᾽ αναλογία με την προβολή ενός διανύσματος σ᾽ ένα άλλο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:
  1. $< x(t), y(t) > = < y(t), x(t) >$
  2. $< c\,x(t), y(t) > = c < y(t), x(t) >, c \in \mathbb{R}$
  3. $< x(t) + y(t), z(t) > = < x(t), z(t) > + < y(t), z(t) >$
  4. $< x(t), x(t) > \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός σήματος με τον εαυτό του λέγεται ενέργεια του σήματος.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Εσωτερικό γινόμενο

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$, δηλαδή $< x(t), y(t) >: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που παράγει τη βαθμωτή τιμή

$$< x(t), y(t) > = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\; y(t)\; dt.$$

- Περιγράφει πόσο μοιάζουν δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$, κατ᾽ αναλογία με την προβολή ενός διανύσματος σ᾽ ένα άλλο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:
  1. $< x(t), y(t) > = < y(t), x(t) >$
  2. $< c\, x(t), y(t) > = c < y(t), x(t) >, c \in \mathbb{R}$
  3. $< x(t) + y(t), z(t) > = < x(t), z(t) > + < y(t), z(t) >$
  4. $< x(t), x(t) > \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός σήματος με τον εαυτό του λέγεται ενέργεια του σήματος.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Εσωτερικό γινόμενο

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$, δηλαδή $< x(t), y(t) >: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$, που παράγει τη βαθμωτή τιμή

$$< x(t), y(t) >= \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, y(t)\, dt.$$

- Περιγράφει πόσο μοιάζουν δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$, κατ᾽ αναλογία με την προβολή ενός διανύσματος σ᾽ ένα άλλο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:
  1. $< x(t), y(t) > = < y(t), x(t) >$
  2. $< c\, x(t), y(t) > = \; c < y(t), x(t) >, c \in \mathbb{R}$
  3. $< x(t) + y(t), z(t) > = < x(t), z(t) > + < y(t), z(t) >$
  4. $< x(t), x(t) > \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός σήματος με τον εαυτό του λέγεται ενέργεια του σήματος.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Εσωτερικό γινόμενο

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$, δηλαδή $< x(t), y(t) >: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που παράγει τη βαθμωτή τιμή

$$< x(t), y(t) >= \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, y(t)\, dt.$$

- Περιγράφει πόσο μοιάζουν δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$, κατ' αναλογία με την προβολή ενός διανύσματος σ' ένα άλλο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:
  1. $< x(t), y(t) > = < y(t), x(t) >$
  2. $< c\, x(t), y(t) > = \; c < y(t), x(t) >, c \in \mathbb{R}$
  3. $< x(t) + y(t), z(t) > = < x(t), z(t) > + < y(t), z(t) >$
  4. $< x(t), x(t) > \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός σήματος με τον εαυτό του λέγεται ενέργεια του σήματος.

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Εσωτερικό γινόμενο

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$, δηλαδή $< x(t), y(t) >: \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, που παράγει τη βαθμωτή τιμή

$$< x(t), y(t) >= \int_{t_1}^{t_2} x(t)\ y(t)\ dt.$$

- Περιγράφει πόσο μοιάζουν δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$, κατ' αναλογία με την προβολή ενός διανύσματος σ' ένα άλλο στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
- Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:
  1. $< x(t), y(t) > = < y(t), x(t) >$
  2. $< c\,x(t), y(t) > = \ c < y(t), x(t) >, c \in \mathbb{R}$
  3. $< x(t) + y(t), z(t) > = < x(t), z(t) > + < y(t), z(t) >$
  4. $< x(t), x(t) > \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$. Το εσωτερικό γινόμενο ενός σήματος με τον εαυτό του λέγεται ενέργεια του σήματος.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόλυτη τιμή ή μέτρο

- Είναι η τετραγωνική ρίζα της ενέργειας ενός σήματος

$$|x(t)| = \sqrt{< x(t), x(t) >} = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt}$$

- για την οποία ισχύουν τα εξής

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόλυτη τιμή ή μέτρο

- Είναι η τετραγωνική ρίζα της ενέργειας ενός σήματος

$$|x(t)| = \sqrt{< x(t), x(t) >} = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt}$$

- για την οποία ισχύουν τα εξής
  1. $|x(t)| \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει για $x(t)$ ταυτοτικώς μηδενικό για $t \in [t_1, t_2]$
  2. $|a\, x(t)| = |a|\, |x(t)|, \forall a \in \mathbb{R}$ (ομοιογένεια)
  3. $|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$ (τριγωνική ανισότητα).

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόλυτη τιμή ή μέτρο

- Είναι η τετραγωνική ρίζα της ενέργειας ενός σήματος

$$|x(t)| = \sqrt{< x(t), x(t) >} = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt}$$

- για την οποία ισχύουν τα εξής
  1. $|x(t)| \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει για $x(t)$ ταυτοτικώς μηδενικό για $t \in [t_1, t_2]$
  2. $|a\, x(t)| = |a|\, |x(t)|, \forall a \in \mathbb{R}$ (ομοιογένεια)
  3. $|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$ (τριγωνική ανισότητα).

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόλυτη τιμή ή μέτρο

- Είναι η τετραγωνική ρίζα της ενέργειας ενός σήματος

$$|x(t)| = \sqrt{< x(t), x(t) >} = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt}$$

- για την οποία ισχύουν τα εξής
  1. $|x(t)| \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει για $x(t)$ ταυτοτικώς μηδενικό για $t \in [t_1, t_2]$
  2. $|a\, x(t)| \;=\; |a|\; |x(t)|$, $\forall a \in \mathbb{R}$ (ομοιογένεια)
  3. $|x(t) + y(t)| \;\leq\; |x(t)| + |y(t)|$ (τριγωνική ανισότητα).

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόλυτη τιμή ή μέτρο

- Είναι η τετραγωνική ρίζα της ενέργειας ενός σήματος

$$|x(t)| = \sqrt{< x(t), x(t) >} = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt}$$

- για την οποία ισχύουν τα εξής
  1. $|x(t)| \geq 0$, με την ισότητα να ισχύει για $x(t)$ ταυτοτικώς μηδενικό για $t \in [t_1, t_2]$
  2. $|a\, x(t)| = |a|\, |x(t)|, \forall a \in \mathbb{R}$ (ομοιογένεια)
  3. $|x(t) + y(t)| \leq |x(t)| + |y(t)|$ (τριγωνική ανισότητα).

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόσταση δύο σημάτων

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων που λαμβάνει τη βαθμωτή τιμή

$$d(x(t), y(t)) \;=\; |x(t) - y(t)| \;=\; \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - y(t)\right)^2 \, dt}.$$

- Περιγράφει πόσο διαφέρουν δύο συναρτήσεις. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

Εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών συναρτήσεων

$$< x(s), y(s) > = \int_{s_1}^{s_2} x(s)\, y^*(s)\, ds$$

όπου * είναι ο τελεστής μιγαδικής συζυγίας.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόσταση δύο σημάτων

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων που λαμβάνει τη βαθμωτή τιμή

$$d(x(t), y(t)) \;=\; |x(t) - y(t)| \;=\; \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - y(t)\right)^2 \, dt}.$$

- Περιγράφει πόσο διαφέρουν δύο συναρτήσεις. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
  1. $d(x(t), y(t)) \;\geq\; 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = y(t)$
  2. $d(x(t), y(t)) = d(y(t), x(t))$ (αντισυμμετρική)
  3. $d(x(t), y(t)) \;\leq\; d(x(t), z(t)) + d(z(t), y(t))$ (τριγωνική ανισότητα).

Εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών συναρτήσεων

$$< x(s), y(s) >= \int_{s_1}^{s_2} x(s)\, y^*(s)\, ds$$

όπου * είναι ο τελεστής μιγαδικής συζυγίας.

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόσταση δύο σημάτων

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων που λαμβάνει τη βαθμωτή τιμή

$$d(x(t), y(t)) = |x(t) - y(t)| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - y(t)\right)^2 dt}.$$

- Περιγράφει πόσο διαφέρουν δύο συναρτήσεις. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
  1. $d(x(t), y(t)) \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = y(t)$
  2. $d(x(t), y(t)) = d(y(t), x(t))$ (αντισυμμετρική)
  3. $d(x(t), y(t)) \leq d(x(t), z(t)) + d(z(t), y(t))$ (τριγωνική ανισότητα).

Εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών συναρτήσεων

$$< x(s), y(s) >= \int_{s_1}^{s_2} x(s)\, y^*(s)\, ds$$

όπου * είναι ο τελεστής μιγαδικής συζυγίας.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόσταση δύο σημάτων

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων που λαμβάνει τη βαθμωτή τιμή

$$d(x(t), y(t)) = |x(t) - y(t)| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - y(t)\right)^2 dt}.$$

- Περιγράφει πόσο διαφέρουν δύο συναρτήσεις. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
  1. $d(x(t), y(t)) \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = y(t)$
  2. $d(x(t), y(t)) = d(y(t), x(t))$ (αντισυμμετρική)
  3. $d(x(t), y(t)) \leq d(x(t), z(t)) + d(z(t), y(t))$ (τριγωνική ανισότητα).

Εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών συναρτήσεων

$$< x(s), y(s) >= \int_{s_1}^{s_2} x(s)\, y^*(s)\, ds$$

όπου * είναι ο τελεστής μιγαδικής συζυγίας.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Συναρτήσεις σε διανυσματικούς χώρους: Απόσταση δύο σημάτων

- Είναι συνάρτηση δύο σημάτων που λαμβάνει τη βαθμωτή τιμή

$$d(x(t), y(t)) = |x(t) - y(t)| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - y(t)\right)^2 \, dt}.$$

- Περιγράφει πόσο διαφέρουν δύο συναρτήσεις. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
  1. $d(x(t), y(t)) \geq 0$, όπου η ισότητα ισχύει αν $x(t) = y(t)$
  2. $d(x(t), y(t)) = d(y(t), x(t))$ (αντισυμμετρική)
  3. $d(x(t), y(t)) \leq d(x(t), z(t)) + d(z(t), y(t))$ (τριγωνική ανισότητα).

Εσωτερικό γινόμενο μιγαδικών συναρτήσεων

$$< x(s), y(s) >= \int_{s_1}^{s_2} x(s)\, y^*(s)\, ds$$

όπου * είναι ο τελεστής μιγαδικής συζυγίας.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (1)

- Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathcal{S}$ είναι βάση στο $\mathcal{S}$.
- Οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathcal{S}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που συγκροτούν τη βάση (εφεξής διανύσματα βάσης).
- Κάθε διανυσματικός χώρος διαθέτει μια βάση, μολονότι δεν είναι μοναδική εν γένει.
- Ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης ορίζει τη διάσταση (dimension) του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση είναι μοναδική.
- Γωνία δύο σημάτων:

$$\angle(x(t), y(t)) = \frac{<x(t), y(t)>}{|x(t)|\,|y(t)|} \quad |x(t)| \neq 0, |y(t)| \neq 0.$$

- Επομένως δύο σήματα λέγονται ορθογώνια αν $<x(t), y(t)> = 0$.

Βάση διανυσματικού χώρου (1)

- Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathcal{S}$ είναι βάση στο $\mathcal{S}$.
- Οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathcal{S}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που συγκροτούν τη βάση (εφεξής διανύσματα βάσης).
- Κάθε διανυσματικός χώρος διαθέτει μια βάση, μολονότι δεν είναι μοναδική εν γένει.
- Ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης ορίζει τη διάσταση (dimension) του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση είναι μοναδική.
- Γωνία δύο σημάτων:

$$\angle(x(t), y(t)) = \frac{< x(t), y(t) >}{|x(t)|\,|y(t)|} \quad |x(t)| \neq 0, |y(t)| \neq 0.$$

- Επομένως δύο σήματα λέγονται ορθογώνια αν $< x(t), y(t) >= 0$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (1)

- Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathcal{S}$ είναι βάση στο $\mathcal{S}$.
- Οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathcal{S}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που συγκροτούν τη βάση (εφεξής διανύσματα βάσης).
- Κάθε διανυσματικός χώρος διαθέτει μια βάση, μολονότι δεν είναι μοναδική εν γένει.
- Ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης ορίζει τη διάσταση (dimension) του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση είναι μοναδική.
- Γωνία δύο σημάτων:

$$\angle(x(t), y(t)) = \frac{< x(t), y(t) >}{|x(t)|\,|y(t)|} \qquad |x(t)| \neq 0, |y(t)| \neq 0.$$

- Επομένως δύο σήματα λέγονται ορθογώνια αν $< x(t), y(t) >= 0$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (1)

- Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathcal{S}$ είναι βάση στο $\mathcal{S}$.
- Οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathcal{S}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που συγκροτούν τη βάση (εφεξής διανύσματα βάσης).
- Κάθε διανυσματικός χώρος διαθέτει μια βάση, μολονότι δεν είναι μοναδική εν γένει.
- Ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης ορίζει τη διάσταση (dimension) του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση είναι μοναδική.
- Γωνία δύο σημάτων:

$$\angle(x(t), y(t)) = \frac{< x(t), y(t) >}{|x(t)|\,|y(t)|} \quad |x(t)| \neq 0, |y(t)| \neq 0.$$

- Επομένως δύο σήματα λέγονται ορθογώνια αν $< x(t), y(t) >= 0$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (1)

- Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathcal{S}$ είναι βάση στο $\mathcal{S}$.
- Οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathcal{S}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που συγκροτούν τη βάση (εφεξής διανύσματα βάσης).
- Κάθε διανυσματικός χώρος διαθέτει μια βάση, μολονότι δεν είναι μοναδική εν γένει.
- Ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης ορίζει τη διάσταση (dimension) του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση είναι μοναδική.
- Γωνία δύο σημάτων:

$$\angle(x(t), y(t)) = \frac{< x(t), y(t) >}{|x(t)|\,|y(t)|} \quad |x(t)| \neq 0, |y(t)| \neq 0.$$

- Επομένως δύο σήματα λέγονται ορθογώνια αν $< x(t), y(t) >= 0$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (1)

- Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων που παράγουν το διανυσματικό χώρο $\mathcal{S}$ είναι βάση στο $\mathcal{S}$.
- Οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathcal{S}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που συγκροτούν τη βάση (εφεξής διανύσματα βάσης).
- Κάθε διανυσματικός χώρος διαθέτει μια βάση, μολονότι δεν είναι μοναδική εν γένει.
- Ο αριθμός των διανυσμάτων βάσης ορίζει τη διάσταση (dimension) του διανυσματικού χώρου. Η διάσταση είναι μοναδική.
- Γωνία δύο σημάτων:

$$\angle(x(t), y(t)) = \frac{< x(t), y(t) >}{|x(t)|\,|y(t)|} \quad |x(t)| \neq 0, |y(t)| \neq 0.$$

- Επομένως δύο σήματα λέγονται ορθογώνια αν $< x(t), y(t) >= 0$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (2)

- Αν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Μια συλλογή n συναρτήσεων $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, που είναι ανά δύο ορθογώνιες και επιπλέον έχουν μοναδιαίο μέτρο, δηλαδή

$$< \varphi_i(t), \varphi_j(t) >= \delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  όπου δ_{ij} είναι δέλτα Kronecker, συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση.
- Η απαίτηση για μοναδιαίο μέτρο συνεπάγεται μια κλιμάκωση (κανονικοποίηση), η οποία μπορεί εύκολα να ικανοποιηθεί γενικώς.
- Η απαίτηση για ορθογωνιότητα μπορεί να απαλυνθεί μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt.
- Επομένως η μόνη δεσμευτική ιδιότητα που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις βάσης είναι η γραμμική ανεξαρτησία.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (2)

- Αν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Μια συλλογή n συναρτήσεων $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, που είναι ανά δύο ορθογώνιες και επιπλέον έχουν μοναδιαίο μέτρο, δηλαδή

$$< \varphi_i(t), \varphi_j(t) >= \delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  όπου δ_{ij} είναι δέλτα Kronecker, συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση.
- Η απαίτηση για μοναδιαίο μέτρο συνεπάγεται μια κλιμάκωση (κανονικοποίηση), η οποία μπορεί εύκολα να ικανοποιηθεί γενικώς.
- Η απαίτηση για ορθογωνιότητα μπορεί να απαλυνθεί μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt.
- Επομένως η μόνη δεσμευτική ιδιότητα που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις βάσης είναι η γραμμική ανεξαρτησία.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (2)

- Αν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Μια συλλογή n συναρτήσεων $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, που είναι ανά δύο ορθογώνιες και επιπλέον έχουν μοναδιαίο μέτρο, δηλαδή

$$< \varphi_i(t), \varphi_j(t) >= \delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  όπου δ_{ij} είναι δέλτα Kronecker, συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση.
- Η απαίτηση για μοναδιαίο μέτρο συνεπάγεται μια κλιμάκωση (κανονικοποίηση), η οποία μπορεί εύκολα να ικανοποιηθεί γενικώς.
- Η απαίτηση για ορθογωνιότητα μπορεί να απαλυνθεί μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt.
- Επομένως η μόνη δεσμευτική ιδιότητα που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις βάσης είναι η γραμμική ανεξαρτησία.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (2)

- Αν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Μια συλλογή n συναρτήσεων $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, που είναι ανά δύο ορθογώνιες και επιπλέον έχουν μοναδιαίο μέτρο, δηλαδή

$$< \varphi_i(t), \varphi_j(t) >= \delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  όπου δ_{ij} είναι δέλτα Kronecker, συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση.
- Η απαίτηση για μοναδιαίο μέτρο συνεπάγεται μια κλιμάκωση (κανονικοποίηση), η οποία μπορεί εύκολα να ικανοποιηθεί γενικώς.
- Η απαίτηση για ορθογωνιότητα μπορεί να απαλυνθεί μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt.
- Επομένως η μόνη δεσμευτική ιδιότητα που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις βάσης είναι η γραμμική ανεξαρτησία.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Βάση διανυσματικού χώρου (2)

- Αν τα μη-μηδενικά διανύσματα $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνια, τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Μια συλλογή n συναρτήσεων $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, που είναι ανά δύο ορθογώνιες και επιπλέον έχουν μοναδιαίο μέτρο, δηλαδή

$$< \varphi_i(t), \varphi_j(t) >= \delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

  όπου δ_{ij} είναι δέλτα Kronecker, συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση.
- Η απαίτηση για μοναδιαίο μέτρο συνεπάγεται μια κλιμάκωση (κανονικοποίηση), η οποία μπορεί εύκολα να ικανοποιηθεί γενικώς.
- Η απαίτηση για ορθογωνιότητα μπορεί να απαλυνθεί μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt.
- Επομένως η μόνη δεσμευτική ιδιότητα που πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις βάσης είναι η γραμμική ανεξαρτησία.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παραδείγματα βάσεων

- Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις σε διάστημα μιας περιόδου με κατάλληλη κανονικοποίηση συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση που αξιοποιείται στην επέκταση σε σειρά Fourier.
- Για τις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, άθροισμα, διαφόριση και ολοκλήρωση οδηγούν πάλι σε συνημιτοειδείς συναρτήσεις. Τούτο συνάδει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός βασικού σήματος.
- Τα φανταστικά εκθετικά σε διάστημα μιας περιόδου, με κατάλληλη κανονικοποίηση, συγκροτούν επίσης μια ορθοκανονική βάση.
- Εκτός από τη σειρά Fourier άλλες διάσημες σειρές είναι οι:

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παραδείγματα βάσεων

- Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις σε διάστημα μιας περιόδου με κατάλληλη κανονικοποίηση συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση που αξιοποιείται στην επέκταση σε σειρά Fourier.
- Για τις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, άθροισμα, διαφόριση και ολοκλήρωση οδηγούν πάλι σε συνημιτοειδείς συναρτήσεις. Τούτο συνάδει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός βασικού σήματος.
- Τα φανταστικά εκθετικά σε διάστημα μιας περιόδου, με κατάλληλη κανονικοποίηση, συγκροτούν επίσης μια ορθοκανονική βάση.
- Εκτός από τη σειρά Fourier άλλες διάσημες σειρές είναι οι:

Παραδείγματα βάσεων

- Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις σε διάστημα μιας περιόδου με κατάλληλη κανονικοποίηση συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση που αξιοποιείται στην επέκταση σε σειρά Fourier.
- Για τις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, άθροισμα, διαφόριση και ολοκλήρωση οδηγούν πάλι σε συνημιτοειδείς συναρτήσεις. Τούτο συνάδει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός βασικού σήματος.
- Τα φανταστικά εκθετικά σε διάστημα μιας περιόδου, με κατάλληλη κανονικοποίηση, συγκροτούν επίσης μια ορθοκανονική βάση.
- Εκτός από τη σειρά Fourier άλλες διάσημες σειρές είναι οι:

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παραδείγματα βάσεων

- Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις σε διάστημα μιας περιόδου με κατάλληλη κανονικοποίηση συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση που αξιοποιείται στην επέκταση σε σειρά Fourier.
- Για τις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, άθροισμα, διαφόριση και ολοκλήρωση οδηγούν πάλι σε συνημιτοειδείς συναρτήσεις. Τούτο συνάδει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός βασικού σήματος.
- Τα φανταστικά εκθετικά σε διάστημα μιας περιόδου, με κατάλληλη κανονικοποίηση, συγκροτούν επίσης μια ορθοκανονική βάση.
- Εκτός από τη σειρά Fourier άλλες διάσημες σειρές είναι οι:
  1. σειρές Legendre που χρησιμοποιούν τα πολυώνυμα Legendre ως συναρτήσεις βάσης
  2. σειρές Laguerre που χρησιμοποιούν τα ομώνυμα πολυώνυμα ως συναρτήσεις βάσης
  3. σειρές Walsh που χρησιμοποιούν τις ομώνυμες συναρτήσεις ως συναρτήσεις βάσης.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παραδείγματα βάσεων

- Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις σε διάστημα μιας περιόδου με κατάλληλη κανονικοποίηση συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση που αξιοποιείται στην επέκταση σε σειρά Fourier.
- Για τις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, άθροισμα, διαφόριση και ολοκλήρωση οδηγούν πάλι σε συνημιτοειδείς συναρτήσεις. Τούτο συνάδει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός βασικού σήματος.
- Τα φανταστικά εκθετικά σε διάστημα μιας περιόδου, με κατάλληλη κανονικοποίηση, συγκροτούν επίσης μια ορθοκανονική βάση.
- Εκτός από τη σειρά Fourier άλλες διάσημες σειρές είναι οι:
    1. σειρές Legendre που χρησιμοποιούν τα πολυώνυμα Legendre ως συναρτήσεις βάσης
    2. σειρές Laguerre που χρησιμοποιούν τα ομώνυμα πολυώνυμα ως συναρτήσεις βάσης
    3. σειρές Walsh που χρησιμοποιούν τις ομώνυμες συναρτήσεις ως συναρτήσεις βάσης.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παραδείγματα βάσεων

- Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις σε διάστημα μιας περιόδου με κατάλληλη κανονικοποίηση συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση που αξιοποιείται στην επέκταση σε σειρά Fourier.
- Για τις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, άθροισμα, διαφόριση και ολοκλήρωση οδηγούν πάλι σε συνημιτοειδείς συναρτήσεις. Τούτο συνάδει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός βασικού σήματος.
- Τα φανταστικά εκθετικά σε διάστημα μιας περιόδου, με κατάλληλη κανονικοποίηση, συγκροτούν επίσης μια ορθοκανονική βάση.
- Εκτός από τη σειρά Fourier άλλες διάσημες σειρές είναι οι:
  1. σειρές Legendre που χρησιμοποιούν τα πολυώνυμα Legendre ως συναρτήσεις βάσης
  2. σειρές Laguerre που χρησιμοποιούν τα ομώνυμα πολυώνυμα ως συναρτήσεις βάσης
  3. σειρές Walsh που χρησιμοποιούν τις ομώνυμες συναρτήσεις ως συναρτήσεις βάσης.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παραδείγματα βάσεων

- Οι συνημιτονοειδείς συναρτήσεις σε διάστημα μιας περιόδου με κατάλληλη κανονικοποίηση συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση που αξιοποιείται στην επέκταση σε σειρά Fourier.
- Για τις συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, άθροισμα, διαφόριση και ολοκλήρωση οδηγούν πάλι σε συνημιτοειδείς συναρτήσεις. Τούτο συνάδει με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά ενός βασικού σήματος.
- Τα φανταστικά εκθετικά σε διάστημα μιας περιόδου, με κατάλληλη κανονικοποίηση, συγκροτούν επίσης μια ορθοκανονική βάση.
- Εκτός από τη σειρά Fourier άλλες διάσημες σειρές είναι οι:
    1. σειρές Legendre που χρησιμοποιούν τα πολυώνυμα Legendre ως συναρτήσεις βάσης
    2. σειρές Laguerre που χρησιμοποιούν τα ομώνυμα πολυώνυμα ως συναρτήσεις βάσης
    3. σειρές Walsh που χρησιμοποιούν τις ομώνυμες συναρτήσεις ως συναρτήσεις βάσης.

Θεώρημα επέκτασης σε σειρά (1)

- Θα θεμελιώσουμε μια γενική θεωρία επέκτασης ενός σήματος σε σειρά, της οποίας μερική περίπτωση θα είναι η επέκταση σε σειρά Fourier για την εύρεση των συντελεστών a_k στη (3).
- Έστω

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \varphi_n(t) \tag{5}$$

όταν οι συναρτήσεις $\{\varphi_n(t)\}$ συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση στο διανυσματικό χώρο των σημάτων $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$. Θέλουμε να βρούμε μια προσέγγιση $\hat{x}(t)$ της $x(t)$ χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλήθος όρων $M < \infty$ στην (5)

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \, \varphi_n(t). \tag{6}$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Θεώρημα επέκτασης σε σειρά (1)

- Θα θεμελιώσουμε μια γενική θεωρία επέκτασης ενός σήματος σε σειρά, της οποίας μερική περίπτωση θα είναι η επέκταση σε σειρά Fourier για την εύρεση των συντελεστών a_k στη (3).
- Έστω

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, \varphi_n(t) \tag{5}$$

όταν οι συναρτήσεις $\{\varphi_n(t)\}$ συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση στο διανυσματικό χώρο των σημάτων $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$. Θέλουμε να βρούμε μια προσέγγιση $\hat{x}(t)$ της $x(t)$ χρησιμοποιώντας πεπερασμένο πλήθος όρων $M < \infty$ στην (5)

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \, \varphi_n(t). \tag{6}$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Θεώρημα επέκτασης σε σειρά (2)

- Ας υποτεθεί ότι το M έχει επιλεχθεί. Ποιά είναι η καλύτερη προσέγγιση (6) της (5);
- Πρέπει να οριστεί το κριτήριο καλύτερης προσέγγισης. Ένα τέτοιο θα μπορούσε να ήταν η απόσταση μεταξύ των $x(t)$ και $\hat{x}(t)$

$$I = d(x(t), \hat{x}(t)) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} \left[x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \, \varphi_n(t)\right]^2 dt}. \tag{7}$$

- Οπότε πρέπει να βρούμε τα $\hat{a}_n$, $n = -M, \ldots, M$, ώστε να ελαχιστοποιείται το I.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Θεώρημα επέκτασης σε σειρά (2)

- Ας υποτεθεί ότι το M έχει επιλεχθεί. Ποιά είναι η καλύτερη προσέγγιση (6) της (5);
- Πρέπει να οριστεί το κριτήριο καλύτερης προσέγγισης. Ένα τέτοιο θα μπορούσε να ήταν η απόσταση μεταξύ των $x(t)$ και $\hat{x}(t)$

$$I = d(x(t), \hat{x}(t)) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \, \varphi_n(t)]^2 \, dt}. \tag{7}$$

- Οπότε πρέπει να βρούμε τα $\hat{a}_n$, $n = -M, \dots, M$, ώστε να ελαχιστοποιείται το I.

Θεώρημα επέκτασης σε σειρά (2)

- Ας υποτεθεί ότι το M έχει επιλεχθεί. Ποιά είναι η καλύτερη προσέγγιση (6) της (5);
- Πρέπει να οριστεί το κριτήριο καλύτερης προσέγγισης. Ένα τέτοιο θα μπορούσε να ήταν η απόσταση μεταξύ των $x(t)$ και $\hat{x}(t)$

$$I = d(x(t), \hat{x}(t)) = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \, \varphi_n(t)]^2 \, dt}. \tag{7}$$

- Οπότε πρέπει να βρούμε τα $\hat{a}_n$, $n = -M, \ldots, M$, ώστε να ελαχιστοποιείται το I.

Απόδειξη θεωρήματος επέκτασης σε σειρά (1)

- Αρκεί

$$\hat{a}_n : \quad \frac{\partial I^2}{\partial \hat{a}_n} = 0 \qquad n = -M, \ldots, M.$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt - 2\sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,\varphi_n(t)\,dt + \\ &\quad + \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} \hat{a}_n \hat{a}_m \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\,\varphi_m(t)\,dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt - 2\sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \int_{t_1}^{t_2} x(t)\varphi_n(t)\,dt + \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} \hat{a}_n \hat{a}_m \delta_{nm} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt - 2\sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n < x(t), \varphi_n(t) > + \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n^2. \end{aligned}$$

Απόδειξη θεωρήματος επέκτασης σε σειρά (1)

- Αρκεί

$$\hat{a}_n : \quad \frac{\partial I^2}{\partial \hat{a}_n} = 0 \qquad n = -M, \ldots, M.$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt - 2 \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, \varphi_n(t)\, dt + \\ &+ \sum_{n=-M}^{M} \sum_{m=-M}^{M} \hat{a}_n \hat{a}_m \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\, \varphi_m(t)\, dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt - 2 \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \int_{t_1}^{t_2} x(t) \varphi_n(t)\, dt + \sum_{n=-M}^{M} \sum_{m=-M}^{M} \hat{a}_n \hat{a}_m \delta_{nm} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt - 2 \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n < x(t), \varphi_n(t) > + \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n^2. \end{aligned}$$

Απόδειξη θεωρήματος επέκτασης σε σειρά (2)

- Οπότε

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial I^2}{\partial \hat{a}_n}\right|_{\hat{a}_{n,opt}} &= 0 \Leftrightarrow -2 < x(t), \varphi_n(t) > +2\hat{a}_{n,opt} = 0 \Leftrightarrow \\
\hat{a}_{n,opt} &= < x(t), \varphi_n(t) > \qquad n = -M, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

- Το μικρότερο σφάλμα προσέγγισης είναι

$$
I_{min}^2 = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_{n,opt}^2.
$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Απόδειξη θεωρήματος επέκτασης σε σειρά (2)

- Οπότε

$$\left.\frac{\partial I^2}{\partial \hat{a}_n}\right|_{\hat{a}_{n,opt}} = 0 \Leftrightarrow -2 < x(t), \varphi_n(t) > +2\hat{a}_{n,opt} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\hat{a}_{n,opt} = < x(t), \varphi_n(t) > \qquad n = -M, \ldots, M.$$

- Το μικρότερο σφάλμα προσέγγισης είναι

$$I_{min}^2 = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_{n,opt}^2.$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Απόδειξη θεωρήματος επέκτασης σε σειρά (3)

- Επειδή οι συναρτήσεις $\{\varphi_n(t)\}$ συγκροτούν μια ορθοκανονική βάση, το $x(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης, οπότε

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n,opt} &= <x(t), \varphi_n(t)> = <\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \varphi_m(t),\ \varphi_n(t)> \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m <\varphi_m(t), \varphi_n(t)> = a_n \quad \forall n \end{aligned} \tag{8}$$

όπου κάναμε χρήση της $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \delta_{mn} = a_n, \forall n$. Η (8) ορίζει το πεπερασμένο των συντελεστών.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Ανασκόπηση θεωρήματος επέκτασης σε σειρά

- Έστω $\mathcal{S}$ ο διανυσματικός χώρος των σημάτων $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο πεδίο $\mathbb{R}$ και $\{\varphi_n(t)\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{S}$. Αν $x(t)$ αναπτύσσεται ως $x(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \, \varphi_n(t)$ όπου N συνήθως είναι άπειρο, θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό με πεπερασμένο πλήθος $(2M+1)$ συναρτήσεων ορθοκανονικής βάσης, ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα I^2 να είναι ελάχιστο. Τότε αρκεί:
- οι συντελεστές της προσέγγισης να εκλεγούν

$$\hat{a}_n = a_n =< x(t), \varphi_n(t) > \qquad n = -M, \ldots, M \tag{9}$$

- οπότε η προσέγγιση δίνεται από την $\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} a_n \, \varphi_n(t)$
- και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$I^2 = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \, dt - \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \tag{10}$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Ανασκόπηση θεωρήματος επέκτασης σε σειρά

- Έστω $\mathcal{S}$ ο διανυσματικός χώρος των σημάτων $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο πεδίο $\mathbb{R}$ και $\{\varphi_n(t)\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{S}$. Αν $x(t)$ αναπτύσσεται ως $x(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \, \varphi_n(t)$ όπου N συνήθως είναι άπειρο, θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό με πεπερασμένο πλήθος $(2M+1)$ συναρτήσεων ορθοκανονικής βάσης, ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα I^2 να είναι ελάχιστο. Τότε αρκεί:
- οι συντελεστές της προσέγγισης να εκλεγούν

$$\hat{a}_n = a_n = < x(t), \varphi_n(t) > \qquad n = -M, \ldots, M \tag{9}$$

- οπότε η προσέγγιση δίνεται από την $\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} a_n \, \varphi_n(t)$
- και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$I^2 = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) \, dt - \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \tag{10}$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Ανασκόπηση θεωρήματος επέκτασης σε σειρά

- Έστω $\mathcal{S}$ ο διανυσματικός χώρος των σημάτων $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο πεδίο $\mathbb{R}$ και $\{\varphi_n(t)\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{S}$. Αν $x(t)$ αναπτύσσεται ως $x(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n\, \varphi_n(t)$ όπου N συνήθως είναι άπειρο, θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό με πεπερασμένο πλήθος $(2M+1)$ συναρτήσεων ορθοκανονικής βάσης, ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα I^2 να είναι ελάχιστο. Τότε αρκεί:
- οι συντελεστές της προσέγγισης να εκλεγούν

$$\hat{a}_n = a_n = < x(t), \varphi_n(t) > \quad n = -M, \ldots, M \tag{9}$$

- οπότε η προσέγγιση δίνεται από την $\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} a_n\, \varphi_n(t)$
- και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$I^2 = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt - \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \tag{10}$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Ανασκόπηση θεωρήματος επέκτασης σε σειρά

- Έστω $\mathcal{S}$ ο διανυσματικός χώρος των σημάτων $x(t)$ για $t \in [t_1, t_2]$ πάνω στο πεδίο $\mathbb{R}$ και $\{\varphi_n(t)\}$ μία ορθοκανονική βάση του $\mathcal{S}$. Αν $x(t)$ αναπτύσσεται ως $x(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \varphi_n(t)$ όπου N συνήθως είναι άπειρο, θέλουμε να προσεγγίσουμε το $x(t)$ ως γραμμικό συνδυασμό με πεπερασμένο πλήθος $(2M+1)$ συναρτήσεων ορθοκανονικής βάσης, ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα I^2 να είναι ελάχιστο. Τότε αρκεί:
- οι συντελεστές της προσέγγισης να εκλεγούν

$$\hat{a}_n = a_n =< x(t), \varphi_n(t) > \quad n = -M, \ldots, M \tag{9}$$

- οπότε η προσέγγιση δίνεται από την $\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} a_n \varphi_n(t)$
- και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης είναι

$$I^2 = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt - \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \tag{10}$$

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παρατηρήσεις

- Ο δεύτερος όρος της (10) ερμηνεύεται ως

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \hat{x}^2(t)dt &= \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} a_n a_m \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\varphi_m(t)\, dt \\ &= \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} a_n\, a_m\, \delta_{nm} = \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \end{aligned} \tag{11}$$

- Ανισότητα Bessel: $I^2 \geq 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt \geq \sum_{n=-M}^{M} a_n^2$.
- Ταυτότητα Parseval: Αν $M = N = \infty$, τότε η ενέργεια του σήματος δίνεται από την

$$W = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^2. \tag{12}$$

- Οι συναρτήσεις βάσης καλούνται πλήρεις, όταν $\lim_{M\to\infty} \eta_M = \lim_{M\to\infty}\left(1 - \frac{1}{W}\sum_{n=-M}^{M} a_n^2\right) = 0, \forall x(t)$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παρατηρήσεις

- Ο δεύτερος όρος της (10) ερμηνεύεται ως

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \hat{x}^2(t)dt &= \sum_{n=-M}^{M} \sum_{m=-M}^{M} a_n a_m \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\varphi_m(t)\, dt \\
&= \sum_{n=-M}^{M} \sum_{m=-M}^{M} a_n\, a_m\, \delta_{nm} = \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \qquad (11)
\end{aligned}$$

- Ανισότητα Bessel: $I^2 \geq 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt \geq \sum_{n=-M}^{M} a_n^2$.
- Ταυτότητα Parseval: Αν $M = N = \infty$, τότε η ενέργεια του σήματος δίνεται από την

$$W = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^2. \qquad (12)$$

- Οι συναρτήσεις βάσης καλούνται πλήρεις, όταν $\lim_{M\to\infty} \eta_M = \lim_{M\to\infty}(1 - \frac{1}{W}\sum_{n=-M}^{M} a_n^2) = 0, \forall x(t)$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παρατηρήσεις

- Ο δεύτερος όρος της (10) ερμηνεύεται ως

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \hat{x}^2(t)dt &= \sum_{n=-M}^{M} \sum_{m=-M}^{M} a_n a_m \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\varphi_m(t)\, dt \\ &= \sum_{n=-M}^{M} \sum_{m=-M}^{M} a_n\, a_m\, \delta_{nm} = \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \qquad (11) \end{aligned}$$

- Ανισότητα Bessel: $I^2 \geq 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt \geq \sum_{n=-M}^{M} a_n^2$.
- Ταυτότητα Parseval: Αν $M = N = \infty$, τότε η ενέργεια του σήματος δίνεται από την

$$W = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^2. \qquad (12)$$

- Οι συναρτήσεις βάσης καλούνται πλήρεις, όταν $\lim_{M\to\infty} \eta_M = \lim_{M\to\infty}\left(1 - \frac{1}{W}\sum_{n=-M}^{M} a_n^2\right) = 0, \forall x(t)$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Παρατηρήσεις

- Ο δεύτερος όρος της (10) ερμηνεύεται ως

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \hat{x}^2(t)dt &= \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} a_n a_m \int_{t_1}^{t_2} \varphi_n(t)\varphi_m(t)\, dt \\ &= \sum_{n=-M}^{M}\sum_{m=-M}^{M} a_n\, a_m\, \delta_{nm} = \sum_{n=-M}^{M} a_n^2. \qquad (11)\end{aligned}$$

- Ανισότητα Bessel: $I^2 \geq 0 \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt \geq \sum_{n=-M}^{M} a_n^2$.
- Ταυτότητα Parseval: Αν $M = N = \infty$, τότε η ενέργεια του σήματος δίνεται από την

$$W = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^2. \qquad (12)$$

- Οι συναρτήσεις βάσης καλούνται πλήρεις, όταν $\lim_{M\to\infty} \eta_M = \lim_{M\to\infty}(1 - \frac{1}{W}\sum_{n=-M}^{M} a_n^2) = 0, \forall x(t)$.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Θεώρημα ορθογωνικής αρχής (Wiener-Kolmogorov)

- Αν οι συντελεστές $\hat{a}_n$ καθιστούν ελάχιστο το σφάλμα προσέγγισης

$$I = \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \varphi_n(t) \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

δηλαδή, αν η απόσταση του $x(t)$ από την προσέγγισή του $\hat{x}(t)$ είναι ελάχιστη, τότε το σήμα σφάλματος

$$e(t) = x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \varphi_n(t) \tag{13}$$

είναι ορθογώνιο προς όλες τις συναρτήσεις $\varphi_n(t)$.

- Ισχύει και το αντίστροφο: Αν το σήμα σφάλματος είναι ορθογώνιο προς όλες τις $\varphi_n(t)$, τότε η απόσταση του $x(t)$ από το $\hat{x}(t)$ είναι ελάχιστη.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Θεώρημα ορθογωνικής αρχής (Wiener-Kolmogorov)

- Αν οι συντελεστές $\hat{a}_n$ καθιστούν ελάχιστο το σφάλμα προσέγγισης

$$I = \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \varphi_n(t) \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

  δηλαδή, αν η απόσταση του $x(t)$ από την προσέγγισή του $\hat{x}(t)$ είναι ελάχιστη, τότε το σήμα σφάλματος

$$e(t) = x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \varphi_n(t) \tag{13}$$

  είναι ορθογώνιο προς όλες τις συναρτήσεις $\varphi_n(t)$.
- Ισχύει και το αντίστροφο: Αν το σήμα σφάλματος είναι ορθογώνιο προς όλες τις $\varphi_n(t)$, τότε η απόσταση του $x(t)$ από το $\hat{x}(t)$ είναι ελάχιστη.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Απόδειξη ευθέος

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \hat{a}_m} I^2 &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{a}_m}\left[\int_{t_1}^{t_2} (x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \varphi_n(t))^2 \, dt\right] = 0 \\
&\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \varphi_n(t)] \varphi_m(t) \, dt = 0 \quad m = -M, \ldots, M \\
&\Rightarrow < x(t) - \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \varphi_n(t), \varphi_m(t) >= 0 \quad m = -M, \ldots, M \quad (14)
\end{aligned}$$

Στην απόδειξη δεν έγινε χρήση ότι οι συναρτήσεις $\{\varphi_n(t)\}_{n=-M}^{M}$ συγκροτούν ορθοκανονική βάση. ΄Αρα το θεώρημα της ορθογωνικής αρχής έχει γενική ισχύ.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Άφιξη στην "Καβαφική Ιθάκη"

Αν έχουμε ένα διανυσματικό χώρο σημάτων $\mathcal{S}$ και θέλουμε να κάνουμε γραμμική επέκταση ενός σήματος $x(t) \in \mathcal{S}$

$$x(t) = \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \, \varphi_n(t). \tag{15}$$

Αν οι συναρτήσεις $\varphi_n(t)$

- συγκροτούν μια πλήρη ή μη-πλήρη ορθοκανονική βάση, κάθε συντελεστής υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την (9) και ο υπολογισμός είναι ανεξάρτητος από εκείνους για τους άλλους συντελεστές
- δεν συγκροτούν ορθοκανονική βάση, για να βρεθούν οι συντελεστές αρκεί να επιλυθεί το σύστημα εξισώσεων (14), οπότε ο υπολογισμός καθενός συντελεστή δεν γίνεται ανεξάρτητα από τους άλλους.

Προαπαιτούμενα για την εξαγωγή της σειράς Fourier

Άφιξη στην "Καβαφική Ιθάκη"

Αν έχουμε ένα διανυσματικό χώρο σημάτων $\mathcal{S}$ και θέλουμε να κάνουμε γραμμική επέκταση ενός σήματος $x(t) \in \mathcal{S}$

$$x(t) = \sum_{n=-M}^{M} \hat{a}_n \, \varphi_n(t). \tag{15}$$

Αν οι συναρτήσεις $\varphi_n(t)$

- συγκροτούν μια πλήρη ή μη-πλήρη ορθοκανονική βάση, κάθε συντελεστής υπολογίζεται χρησιμοποιώντας την (9) και ο υπολογισμός είναι ανεξάρτητος από εκείνους για τους άλλους συντελεστές
- δεν συγκροτούν ορθοκανονική βάση, για να βρεθούν οι συντελεστές αρκεί να επιλυθεί το σύστημα εξισώσεων (14), οπότε ο υπολογισμός καθενός συντελεστή δεν γίνεται ανεξάρτητα από τους άλλους.

Συναρτήσεις βάσης των σειρών Fourier (1)

- Έστω οι συναρτήσεις $\hat{\phi}_k(t) = \cos k\omega_0 t$ και $\hat{z}_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, όπου $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$. Εκλέγουμε ως διάστημα $[t_1, t_2]$ για τον ορισμό του διανυσματικού χώρου, το διάστημα μιας περιόδου T
- οπότε αν $k \neq n$

$$< \hat{\phi}_k(t), \hat{\phi}_n(t) > = \int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega_0 t \ \cos n\omega_0 t \ dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{T/2}^{T/2} \left\{ \cos\left[(k+n)\omega_0 t\right] + \cos\left[(k-n)\omega_0 t\right] \right\} dt$$

$$= \frac{1}{2(k+n)\omega_0} \sin\left[(k+n)\omega_0 t\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} +$$

$$+ \frac{1}{2(k-n)\omega_0} \sin\left[(k-n)\omega_0 t\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} = 0$$

Συναρτήσεις βάσης των σειρών Fourier (1)

- Έστω οι συναρτήσεις $\hat{\phi}_k(t) = \cos k\omega_0 t$ και $\hat{z}_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, όπου $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$. Εκλέγουμε ως διάστημα $[t_1, t_2]$ για τον ορισμό του διανυσματικού χώρου, το διάστημα μιας περιόδου T
- οπότε αν $k \neq n$

$$
\begin{aligned}
< \hat{\phi}_k(t), \hat{\phi}_n(t) > &= \int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega_0 t \;\; \cos n\omega_0 t \; dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{T/2}^{T/2} \left\{ \cos \left[(k+n)\omega_0 t \right] + \cos \left[(k-n)\omega_0 t \right] \right\} dt \\
&= \frac{1}{2(k+n)\omega_0} \sin \left[(k+n)\omega_0 t \right] \Big|_{-T/2}^{T/2} + \\
&\quad + \frac{1}{2(k-n)\omega_0} \sin \left[(k-n)\omega_0 t \right] \Big|_{-T/2}^{T/2} = 0
\end{aligned}
$$

Συναρτήσεις βάσης των σειρών Fourier (2)

- ενώ για $k = n$

$$< \hat{\phi}_k(t), \hat{\phi}_k(t) >= \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(k\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \Big[1+\cos 2k\omega_0 t\Big] dt = \frac{T}{2}.$$

- Αν εκλέξω τις συναρτήσεις $\varphi_k(t)$ ως

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega_0 t = \sqrt{\frac{2}{T}}\hat{\phi}_k(t) \tag{16}$$

τότε αυτές είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης στο διάστημα μιας περιόδου.

- Μπορεί να δειχτεί ότι είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης και οι

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega_0 t. \tag{17}$$

Συναρτήσεις βάσης των σειρών Fourier (2)

- ενώ για $k = n$

$$< \hat{\phi}_k(t), \hat{\phi}_k(t) >= \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(k\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \left[1+\cos 2k\omega_0 t\right] dt = \frac{T}{2}.$$

- Αν εκλέξω τις συναρτήσεις $\varphi_k(t)$ ως

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos k\omega_0 t = \sqrt{\frac{2}{T}}\hat{\phi}_k(t) \qquad (16)$$

τότε αυτές είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης στο διάστημα μιας περιόδου.

- Μπορεί να δειχτεί ότι είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης και οι

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin k\omega_0 t. \qquad (17)$$

Συναρτήσεις βάσης των σειρών Fourier (2)

- ενώ για $k = n$

$$< \hat{\phi}_k(t), \hat{\phi}_k(t) >= \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(k\omega_0 t)dt = \frac{1}{2}\int_{-T/2}^{T/2} \left[1+\cos 2k\omega_0 t\right] dt = \frac{T}{2}.$$

- Αν εκλέξω τις συναρτήσεις $\varphi_k(t)$ ως

$$\varphi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos k\omega_0 t = \sqrt{\frac{2}{T}} \hat{\phi}_k(t) \tag{16}$$

  τότε αυτές είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης στο διάστημα μιας περιόδου.

- Μπορεί να δειχτεί ότι είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης και οι

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin k\omega_0 t. \tag{17}$$

Συναρτήσεις βάσης των σειρών Fourier (3)

- Ομοίως

$$
\begin{aligned}
< \hat{z}_k(t), \hat{z}_m(t) > &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_0 t} \left(e^{jm\omega_0 t}\right)^* dt \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 t}\, dt \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \cos[(k-m)\omega_0 t]\, dt + j \int_{-T/2}^{T/2} \sin[(k-m)\omega_0 t]\, dt \\
&= \begin{cases} T & k = m \\ 0 & k \neq m. \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Οπότε αρκεί να εκλεγούν οι συναρτήσεις

$$
z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega_0 t} \tag{18}
$$

ώστε να συγκροτηθεί μια ορθοκανονική βάση φανταστικών εκθετικών.

Συναρτήσεις βάσης των σειρών Fourier (3)

- Ομοίως

$$
\begin{aligned}
< \hat{z}_k(t), \hat{z}_m(t) > &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{jk\omega_0 t} \left(e^{jm\omega_0 t}\right)^* dt \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} e^{j(k-m)\omega_0 t} \, dt \\
&= \int_{-T/2}^{T/2} \cos[(k-m)\omega_0 t] \, dt + j \int_{-T/2}^{T/2} \sin[(k-m)\omega_0 t] \, dt \\
&= \begin{cases} T & k = m \\ 0 & k \neq m. \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Οπότε αρκεί να εκλεγούν οι συναρτήσεις

$$z_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jk\omega_0 t} \tag{18}$$

ώστε να συγκροτηθεί μια ορθοκανονική βάση φανταστικών εκθετικών.

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (1)

- Σχεδόν κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά στο διάστημα $[t_1, t_2]$ με $t_2 - t_1 = T$ συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης (16), (17) και (18).
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, η επέκταση ισχύει για κάθε t.
- Η διατύπωση σχεδόν παραπέμπει στις συνθήκες Dirichlet που θα εξεταστούν αργότερα.
- Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet, ένα σήμα $x(t)$ αναλύεται σε άπειρο άθροισμα των παρακάτω μορφών για $t_1 \leq t < t_1 + T$:

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (1)

- Σχεδόν κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά στο διάστημα $[t_1, t_2]$ με $t_2 - t_1 = T$ συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης (16), (17) και (18).
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, η επέκταση ισχύει για κάθε t.
- Η διατύπωση σχεδόν παραπέμπει στις συνθήκες Dirichlet που θα εξεταστούν αργότερα.
- Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet, ένα σήμα $x(t)$ αναλύεται σε άπειρο άθροισμα των παρακάτω μορφών για $t_1 \leq t < t_1 + T$:

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (1)

- Σχεδόν κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά στο διάστημα $[t_1, t_2]$ με $t_2 - t_1 = T$ συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης (16), (17) και (18).
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, η επέκταση ισχύει για κάθε t.
- Η διατύπωση σχεδόν παραπέμπει στις συνθήκες Dirichlet που θα εξεταστούν αργότερα.
- Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet, ένα σήμα $x(t)$ αναλύεται σε άπειρο άθροισμα των παρακάτω μορφών για $t_1 \leq t < t_1 + T$:

Σειρά Fourier

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (1)

- Σχεδόν κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά στο διάστημα $[t_1, t_2]$ με $t_2 - t_1 = T$ συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης (16), (17) και (18).
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, η επέκταση ισχύει για κάθε t.
- Η διατύπωση σχεδόν παραπέμπει στις συνθήκες Dirichlet που θα εξεταστούν αργότερα.
- Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet, ένα σήμα $x(t)$ αναλύεται σε άπειρο άθροισμα των παρακάτω μορφών για $t_1 \leq t < t_1 + T$:

1. τριγωνομετρική σειρά

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \tag{19}$$

2. εκθετική σειρά

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{20}$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (1)

- Σχεδόν κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά στο διάστημα $[t_1, t_2]$ με $t_2 - t_1 = T$ συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης (16), (17) και (18).
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, η επέκταση ισχύει για κάθε t.
- Η διατύπωση σχεδόν παραπέμπει στις συνθήκες Dirichlet που θα εξεταστούν αργότερα.
- Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet, ένα σήμα $x(t)$ αναλύεται σε άπειρο άθροισμα των παρακάτω μορφών για $t_1 \leq t < t_1 + T$:
    1. τριγωνομετρική σειρά

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \tag{19}$$

    2. εκθετική σειρά

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{20}$$

Σειρά Fourier

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (1)

- Σχεδόν κάθε σήμα $x(t)$ μπορεί να επεκταθεί σε σειρά στο διάστημα $[t_1, t_2]$ με $t_2 - t_1 = T$ συναρτήσει των συναρτήσεων βάσης (16), (17) και (18).
- Αν το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T, η επέκταση ισχύει για κάθε t.
- Η διατύπωση σχεδόν παραπέμπει στις συνθήκες Dirichlet που θα εξεταστούν αργότερα.
- Αν ικανοποιούνται οι συνθήκες Dirichlet, ένα σήμα $x(t)$ αναλύεται σε άπειρο άθροισμα των παρακάτω μορφών για $t_1 \leq t < t_1 + T$:
  1. τριγωνομετρική σειρά
  $$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \tag{19}$$
  2. εκθετική σειρά
  $$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \tag{20}$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (2)

- όπου

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, dt \tag{21}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, \cos n\omega_0 t\, dt, \quad n \neq 0 \tag{22}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, \sin n\omega_0 t\, dt \tag{23}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{24}$$

- Για περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T, οι (19) και (20) ισχύουν για κάθε t λόγω του $x(t+T) = x(t), \forall t$.

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (2)

- όπου

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, dt \tag{21}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\ \cos n\omega_0 t\, dt, \quad n \neq 0 \tag{22}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\ \sin n\omega_0 t\, dt \tag{23}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{24}$$

- Για περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T, οι (19) και (20) ισχύουν για κάθε t λόγω του $x(t+T) = x(t), \forall t$.

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (3)

Απόδειξη για εκθετική σειρά Fourier:

- Εκλέγονται οι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης

$$z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\omega_0 t}. \tag{25}$$

- Προσέγγιση $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \hat{c}_n z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-M}^{M} \hat{c}_n e^{jn\omega_0 t}. \tag{26}$$

- Επειδή οι $\{z_n(t)\}$ είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης

$$\hat{c}_n = < x(t), z_n(t) > = \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) z_n^*(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{27}$$

Σειρά Fourier

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (3)

Απόδειξη για εκθετική σειρά Fourier:

- Εκλέγονται οι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης

$$z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\omega_0 t}. \tag{25}$$

- Προσέγγιση $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \hat{c}_n z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-M}^{M} \hat{c}_n \, e^{jn\omega_0 t}. \tag{26}$$

- Επειδή οι $\{z_n(t)\}$ είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης

$$\hat{c}_n = < x(t), z_n(t) > = \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) z_n^*(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \, e^{-jn\omega_0 t} \, dt. \tag{27}$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (3)

Απόδειξη για εκθετική σειρά Fourier:

- Εκλέγονται οι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης

$$z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{jn\omega_0 t}. \tag{25}$$

- Προσέγγιση $x(t)$:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \hat{c}_n z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-M}^{M} \hat{c}_n e^{jn\omega_0 t}. \tag{26}$$

- Επειδή οι $\{z_n(t)\}$ είναι συναρτήσεις ορθοκανονικής βάσης

$$\hat{c}_n = < x(t), z_n(t) > = \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) z_n^*(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt. \tag{27}$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (4)

- Αντικαθιστώντας τα $\hat{c}_n$ στην $\hat{x}(t)$ που δίνεται από την (26) παίρνουμε

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt\right]}_{c_n} e^{jn\omega_0 t} \tag{28}$$

- όπου αναγνωρίζονται οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier (24) που σχετίζονται με τους συντελεστές $\hat{c}_n$ δια της $c_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\hat{c}_n$ ή $\hat{c}_n = \sqrt{T}c_n$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$\begin{aligned} I^2 &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\, dt}_{W} - \sum_{n=-M}^{M} |\hat{c}_n|^2 = W - \sum_{n=-M}^{M} T|c_n|^2 \\ &= W\Big(1 - \underbrace{\frac{T}{W}\sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2}_{\eta_M}\Big). \end{aligned}$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (4)

- Αντικαθιστώντας τα $\hat{c}_n$ στην $\hat{x}(t)$ που δίνεται από την (26) παίρνουμε

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt\right]}_{c_n} e^{jn\omega_0 t} \tag{28}$$

- όπου αναγνωρίζονται οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier (24) που σχετίζονται με τους συντελεστές $\hat{c}_n$ δια της $c_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\hat{c}_n$ ή $\hat{c}_n = \sqrt{T}c_n$.

- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$J^2 = \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\, dt}_{W} - \sum_{n=-M}^{M} |\hat{c}_n|^2 = W - \sum_{n=-M}^{M} T|c_n|^2$$

$$= \underbrace{W\left(1 - \frac{T}{W}\sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2\right)}_{\eta_M}.$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (4)

- Αντικαθιστώντας τα $\hat{c}_n$ στην $\hat{x}(t)$ που δίνεται από την (26) παίρνουμε

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-M}^{M} \underbrace{\left[\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt\right]}_{c_n} e^{jn\omega_0 t} \tag{28}$$

- όπου αναγνωρίζονται οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier (24) που σχετίζονται με τους συντελεστές $\hat{c}_n$ δια της $c_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\hat{c}_n$ ή $\hat{c}_n = \sqrt{T}c_n$.
- Μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$\begin{aligned} I^2 &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\, dt}_{W} - \sum_{n=-M}^{M} |\hat{c}_n|^2 = W - \sum_{n=-M}^{M} T|c_n|^2 \\ &= W\,\underbrace{\left(1 - \frac{T}{W}\sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2\right)}_{\eta_M}. \end{aligned}$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (5)

- Μέτρο σφάλματος:

$$\eta_M = 1 - \frac{T}{W} \sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2. \tag{29}$$

- Οι συναρτήσεις βάσης (25) είναι πλήρεις. Πράγματι

Σειρά Fourier

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (5)

- Μέτρο σφάλματος:

$$\eta_M = 1 - \frac{T}{W} \sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2. \tag{29}$$

- Οι συναρτήσεις βάσης (25) είναι πλήρεις. Πράγματι

1. Έχουμε $\eta_{M+1} = \eta_M - \frac{T}{W}\left[|c_{-M-1}|^2 + |c_{M+1}|^2\right]$.
2. Ισχύει $0 \leq \eta_M \leq 1, \forall M$. Επιπροσθέτως, για $M \to \infty$ η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T|c_n|^2 \longrightarrow W$. Δηλαδή η ακολουθία $\{\eta_M\}$ περιέχει μόνο θετικούς όρους.
3. Επειδή $\eta_M - \eta_{M+1} \geq 0 \Leftrightarrow \eta_{M+1} \leq \eta_M$, η ακολουθία $\{\eta_M\}$ δεν είναι αύξουσα.
4. Άρα η ακολουθία συγκλίνει και συνεπώς $\lim_{M\to\infty} \eta_M = 0$.

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (5)

- Μέτρο σφάλματος:

$$\eta_M = 1 - \frac{T}{W} \sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2. \tag{29}$$

- Οι συναρτήσεις βάσης (25) είναι πλήρεις. Πράγματι
  1. Έχουμε $\eta_{M+1} = \eta_M - \frac{T}{W}\left[|c_{-M-1}|^2 + |c_{M+1}|^2\right]$.
  2. Ισχύει $0 \le \eta_M \le 1, \forall M$. Επιπροσθέτως, για $M \to \infty$ η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T|c_n|^2 \longrightarrow W$. Δηλαδή η ακολουθία $\{\eta_M\}$ περιέχει μόνο θετικούς όρους.
  3. Επειδή $\eta_M - \eta_{M+1} \ge 0 \Leftrightarrow \eta_{M+1} \le \eta_M$, η ακολουθία $\{\eta_M\}$ δεν είναι αύξουσα.
  4. Άρα η ακολουθία συγκλίνει και συνεπώς $\lim_{M\to\infty} \eta_M = 0$.

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (5)

- Μέτρο σφάλματος:

$$\eta_M = 1 - \frac{T}{W} \sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2. \tag{29}$$

- Οι συναρτήσεις βάσης (25) είναι πλήρεις. Πράγματι

1. Έχουμε $\eta_{M+1} = \eta_M - \frac{T}{W}\left[|c_{-M-1}|^2 + |c_{M+1}|^2\right]$.
2. Ισχύει $0 \leq \eta_M \leq 1, \forall M$. Επιπροσθέτως, για $M \to \infty$ η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T\,|c_n|^2 \longrightarrow W$. Δηλαδή η ακολουθία $\{\eta_M\}$ περιέχει μόνο θετικούς όρους.
3. Επειδή $\eta_M - \eta_{M+1} \geq 0 \Leftrightarrow \eta_{M+1} \leq \eta_M$, η ακολουθία $\{\eta_M\}$ δεν είναι αύξουσα.
4. Άρα η ακολουθία συγκλίνει και συνεπώς $\lim_{M\to\infty} \eta_M = 0$.

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (5)

- Μέτρο σφάλματος:

$$\eta_M = 1 - \frac{T}{W} \sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2. \tag{29}$$

- Οι συναρτήσεις βάσης (25) είναι πλήρεις. Πράγματι
  1. Έχουμε $\eta_{M+1} = \eta_M - \frac{T}{W}\left[|c_{-M-1}|^2 + |c_{M+1}|^2\right]$.
  2. Ισχύει $0 \leq \eta_M \leq 1, \forall M$. Επιπροσθέτως, για $M \rightarrow \infty$ η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T\,|c_n|^2 \longrightarrow W$. Δηλαδή η ακολουθία $\{\eta_M\}$ περιέχει μόνο θετικούς όρους.
  3. Επειδή $\eta_M - \eta_{M+1} \geq 0 \Leftrightarrow \eta_{M+1} \leq \eta_M$, η ακολουθία $\{\eta_M\}$ δεν είναι αύξουσα.
  4. Άρα η ακολουθία συγκλίνει και συνεπώς $\lim_{M\to\infty} \eta_M = 0$.

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (5)

- Μέτρο σφάλματος:

$$\eta_M = 1 - \frac{T}{W} \sum_{n=-M}^{M} |c_n|^2. \tag{29}$$

- Οι συναρτήσεις βάσης (25) είναι πλήρεις. Πράγματι

1. Έχουμε $\eta_{M+1} = \eta_M - \frac{T}{W}\left[|c_{-M-1}|^2 + |c_{M+1}|^2\right]$.
2. Ισχύει $0 \leq \eta_M \leq 1, \forall M$. Επιπροσθέτως, για $M \to \infty$ η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} T\,|c_n|^2 \longrightarrow W$. Δηλαδή η ακολουθία $\{\eta_M\}$ περιέχει μόνο θετικούς όρους.
3. Επειδή $\eta_M - \eta_{M+1} \geq 0 \Leftrightarrow \eta_{M+1} \leq \eta_M$, η ακολουθία $\{\eta_M\}$ δεν είναι αύξουσα.
4. Άρα η ακολουθία συγκλίνει και συνεπώς $\lim_{M\to\infty} \eta_M = 0$.

Σειρά Fourier

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (6)

- Για πλήρεις συναρτήσεις βάσης ισχύει η ταυτότητα του Parseval που μας επιτρέπει να εκφράσουμε την ενέργεια σε διάστημα μιας περιόδου W και τη μέση ισχύ $P = \frac{W}{T}$ ως εξής:

$$W = \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\, dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \Leftrightarrow P = \frac{W}{T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2. \tag{30}$$

- Για τριγωνομετρική σειρά Fourier η (30) ξαναγράφεται ως

$$W = \frac{Ta_0^2}{4} + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{31}$$

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{32}$$

Εξισώσεις ανάλυσης και σύνθεσης της σειράς Fourier (6)

- Για πλήρεις συναρτήσεις βάσης ισχύει η ταυτότητα του Parseval που μας επιτρέπει να εκφράσουμε την ενέργεια σε διάστημα μιας περιόδου W και τη μέση ισχύ $P = \frac{W}{T}$ ως εξής:

$$W = \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\, dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \Leftrightarrow P = \frac{W}{T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2. \qquad (30)$$

- Για τριγωνομετρική σειρά Fourier η (30) ξαναγράφεται ως

$$W = \frac{Ta_0^2}{4} + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \qquad (31)$$

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t)\, dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \qquad (32)$$

Συνθήκες Dirichlet (1)

- Για τα συνεχή περιοδικά σήματα (τα οποία συγκροτούν διανυσματικό χώρο αν εκλέξουμε ένα διάστημα μιας περιόδου) η αναπαράσταση σε σειρά Fourier παράγει ένα μέσο τετραγωνικό σφάλμα που μηδενίζεται για επέκταση άπειρων όρων.
- Ανάλογη ιδιότητα σύγκλισης της σειράς Fourier παρατηρείται και για πολλά ασυνεχή περιοδικά σήματα π.χ. την τετραγωνική περιοδική παλμοσειρά.
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ επεκτείνεται σε σειρά Fourier σε διάστημα μιας περιόδου αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:

Συνθήκες Dirichlet (1)

- Για τα συνεχή περιοδικά σήματα (τα οποία συγκροτούν διανυσματικό χώρο αν εκλέξουμε ένα διάστημα μιας περιόδου) η αναπαράσταση σε σειρά Fourier παράγει ένα μέσο τετραγωνικό σφάλμα που μηδενίζεται για επέκταση άπειρων όρων.
- Ανάλογη ιδιότητα σύγκλισης της σειράς Fourier παρατηρείται και για πολλά ασυνεχή περιοδικά σήματα π.χ. την τετραγωνική περιοδική παλμοσειρά.
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ επεκτείνεται σε σειρά Fourier σε διάστημα μιας περιόδου αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:

Συνθήκες Dirichlet (1)

- Για τα συνεχή περιοδικά σήματα (τα οποία συγκροτούν διανυσματικό χώρο αν εκλέξουμε ένα διάστημα μιας περιόδου) η αναπαράσταση σε σειρά Fourier παράγει ένα μέσο τετραγωνικό σφάλμα που μηδενίζεται για επέκταση άπειρων όρων.
- Ανάλογη ιδιότητα σύγκλισης της σειράς Fourier παρατηρείται και για πολλά ασυνεχή περιοδικά σήματα π.χ. την τετραγωνική περιοδική παλμοσειρά.
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ επεκτείνεται σε σειρά Fourier σε διάστημα μιας περιόδου αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:
    1. Το σήμα $x(t)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο σε διάστημα μιας περιόδου T.
    2. Το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου μεγέθους σε διάστημα μιας περιόδου T.
    3. Το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σε διάστημα μιας περιόδου T.
    4. Το σήμα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο σε διάστημα μιας περιόδου T, δηλαδή $\int_T |x(t)|\, dt < \infty$.

Συνθήκες Dirichlet (1)

- Για τα συνεχή περιοδικά σήματα (τα οποία συγκροτούν διανυσματικό χώρο αν εκλέξουμε ένα διάστημα μιας περιόδου) η αναπαράσταση σε σειρά Fourier παράγει ένα μέσο τετραγωνικό σφάλμα που μηδενίζεται για επέκταση άπειρων όρων.
- Ανάλογη ιδιότητα σύγκλισης της σειράς Fourier παρατηρείται και για πολλά ασυνεχή περιοδικά σήματα π.χ. την τετραγωνική περιοδική παλμοσειρά.
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ επεκτείνεται σε σειρά Fourier σε διάστημα μιας περιόδου αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:
  1. Το σήμα $x(t)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο σε διάστημα μιας περιόδου T.
  2. Το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου μεγέθους σε διάστημα μιας περιόδου T.
  3. Το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σε διάστημα μιας περιόδου T.
  4. Το σήμα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο σε διάστημα μιας περιόδου T, δηλαδή $\int_T |x(t)|\, dt < \infty$.

Σειρά Fourier

Συνθήκες Dirichlet (1)

- Για τα συνεχή περιοδικά σήματα (τα οποία συγκροτούν διανυσματικό χώρο αν εκλέξουμε ένα διάστημα μιας περιόδου) η αναπαράσταση σε σειρά Fourier παράγει ένα μέσο τετραγωνικό σφάλμα που μηδενίζεται για επέκταση άπειρων όρων.
- Ανάλογη ιδιότητα σύγκλισης της σειράς Fourier παρατηρείται και για πολλά ασυνεχή περιοδικά σήματα π.χ. την τετραγωνική περιοδική παλμοσειρά.
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ επεκτείνεται σε σειρά Fourier σε διάστημα μιας περιόδου αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:
  1. Το σήμα $x(t)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο σε διάστημα μιας περιόδου T.
  2. Το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου μεγέθους σε διάστημα μιας περιόδου T.
  3. Το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σε διάστημα μιας περιόδου T.
  4. Το σήμα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο σε διάστημα μιας περιόδου T, δηλαδή $\int_T |x(t)|\, dt < \infty$.

Σειρά Fourier

Συνθήκες Dirichlet (1)

- Για τα συνεχή περιοδικά σήματα (τα οποία συγκροτούν διανυσματικό χώρο αν εκλέξουμε ένα διάστημα μιας περιόδου) η αναπαράσταση σε σειρά Fourier παράγει ένα μέσο τετραγωνικό σφάλμα που μηδενίζεται για επέκταση άπειρων όρων.
- Ανάλογη ιδιότητα σύγκλισης της σειράς Fourier παρατηρείται και για πολλά ασυνεχή περιοδικά σήματα π.χ. την τετραγωνική περιοδική παλμοσειρά.
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ επεκτείνεται σε σειρά Fourier σε διάστημα μιας περιόδου αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:
  1. Το σήμα $x(t)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο σε διάστημα μιας περιόδου T.
  2. Το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου μεγέθους σε διάστημα μιας περιόδου T.
  3. Το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σε διάστημα μιας περιόδου T.
  4. Το σήμα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο σε διάστημα μιας περιόδου T, δηλαδή $\int_T |x(t)|\, dt < \infty$.

Σειρά Fourier

Συνθήκες Dirichlet (1)

- Για τα συνεχή περιοδικά σήματα (τα οποία συγκροτούν διανυσματικό χώρο αν εκλέξουμε ένα διάστημα μιας περιόδου) η αναπαράσταση σε σειρά Fourier παράγει ένα μέσο τετραγωνικό σφάλμα που μηδενίζεται για επέκταση άπειρων όρων.
- Ανάλογη ιδιότητα σύγκλισης της σειράς Fourier παρατηρείται και για πολλά ασυνεχή περιοδικά σήματα π.χ. την τετραγωνική περιοδική παλμοσειρά.
- Ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ επεκτείνεται σε σειρά Fourier σε διάστημα μιας περιόδου αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet:
  1. Το σήμα $x(t)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο σε διάστημα μιας περιόδου T.
  2. Το σήμα $x(t)$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών πεπερασμένου μεγέθους σε διάστημα μιας περιόδου T.
  3. Το σήμα $x(t)$ παρουσιάζει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σε διάστημα μιας περιόδου T.
  4. Το σήμα $x(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμο σε διάστημα μιας περιόδου T, δηλαδή $\int_T |x(t)|\, dt < \infty$.

Συνθήκες Dirichlet (2)

- Αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet, τότε το $x(t)$ ισούται με την επέκταση σε σειρά Fourier εκτός από μεμονωμένες τιμές του t, στις οποίες το $x(t)$ είναι ασυνεχές.
- Στις ασυνέχειες, η σειρά Fourier συγκλίνει στο ημιάθροισμα των ορίων του $x(t)$ εκατέρωθεν της ασυνέχειας, δηλαδή, αν t_0 είναι σημείο ασυνέχειας η σειρά Fourier συγκλίνει στο

$$x(t_0) = \frac{[x(t_0^+) + x(t_0^-)]}{2}. \tag{33}$$

Σειρά Fourier

Συνθήκες Dirichlet (2)

- Αν ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet, τότε το $x(t)$ ισούται με την επέκταση σε σειρά Fourier εκτός από μεμονωμένες τιμές του t, στις οποίες το $x(t)$ είναι ασυνεχές.
- Στις ασυνέχειες, η σειρά Fourier συγκλίνει στο ημιάθροισμα των ορίων του $x(t)$ εκατέρωθεν της ασυνέχειας, δηλαδή, αν t_0 είναι σημείο ασυνέχειας η σειρά Fourier συγκλίνει στο

$$x(t_0) = \frac{[x(t_0^+) + x(t_0^-)]}{2}. \tag{33}$$

Συνθήκες Dirichlet (3)

- Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από σχεδόν όλα τα "χρήσιμα" σήματα που απαντώνται στην πράξη. Τούτο γίνεται κατανοητό αν εξετάσουμε τί είδους σήματα παραβιάζουν τις συνθήκες Dirichlet.
  - Η συνθήκη 4 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 3 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 2 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 8$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} & 6 \leq t < 7 \\ \frac{1}{8} & 7 \leq t < 7.5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Συνθήκες Dirichlet (3)

- Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από σχεδόν όλα τα “χρήσιμα” σήματα που απαντώνται στην πράξη. Τούτο γίνεται κατανοητό αν εξετάσουμε τί είδους σήματα παραβιάζουν τις συνθήκες Dirichlet.
  - Η συνθήκη 4 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 3 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 2 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 8$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} & 6 \leq t < 7 \\ \frac{1}{8} & 7 \leq t < 7.5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Συνθήκες Dirichlet (3)

- Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από σχεδόν όλα τα "χρήσιμα" σήματα που απαντώνται στην πράξη. Τούτο γίνεται κατανοητό αν εξετάσουμε τί είδους σήματα παραβιάζουν τις συνθήκες Dirichlet.
  - Η συνθήκη 4 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 3 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 2 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 8$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} & 6 \leq t < 7 \\ \frac{1}{8} & 7 \leq t < 7.5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Συνθήκες Dirichlet (3)

- Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από σχεδόν όλα τα "χρήσιμα" σήματα που απαντώνται στην πράξη. Τούτο γίνεται κατανοητό αν εξετάσουμε τί είδους σήματα παραβιάζουν τις συνθήκες Dirichlet.
  - Η συνθήκη 4 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 3 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 2 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 8$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} & 6 \leq t < 7 \\ \frac{1}{8} & 7 \leq t < 7.5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Συνθήκες Dirichlet (3)

- Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από σχεδόν όλα τα "χρήσιμα" σήματα που απαντώνται στην πράξη. Τούτο γίνεται κατανοητό αν εξετάσουμε τί είδους σήματα παραβιάζουν τις συνθήκες Dirichlet.
  - Η συνθήκη 4 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 3 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 2 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 8$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} & 6 \leq t < 7 \\ \frac{1}{8} & 7 \leq t < 7.5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Σειρά Fourier

Συνθήκες Dirichlet (3)

- Οι συνθήκες Dirichlet ικανοποιούνται από σχεδόν όλα τα "χρήσιμα" σήματα που απαντώνται στην πράξη. Τούτο γίνεται κατανοητό αν εξετάσουμε τί είδους σήματα παραβιάζουν τις συνθήκες Dirichlet.
  - Η συνθήκη 4 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 3 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 1$ $x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$.
  - Η συνθήκη 2 παραβιάζεται από το περιοδικό σήμα με περίοδο $T = 8$

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ \frac{1}{2} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{1}{4} & 6 \leq t < 7 \\ \frac{1}{8} & 7 \leq t < 7.5 \\ \vdots & \end{cases}$$

Σειρά Fourier

Φαινόμενο Gibbs

- Για ασυνεχή σήματα στα σημεία ασυνέχειας, ενώ το όριο του αθροίσματος τείνει στο ήμισυ του δεξιού και αριστερού ορίου στο σημείο ασυνέχειας ως συνέπεια των συνθηκών Dirichlet, γύρω από το σημείο ασυνέχειας παρατηρείται μια κυμάτωση με μια μέση τιμή κατά 9% μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή του σήματος.
- Επιπλέον παρατηρήθηκε ότι:

Φαινόμενο Gibbs για την περιοδική τετραγωνική παλμοσειρά

Σειρά Fourier

Φαινόμενο Gibbs

- Για ασυνεχή σήματα στα σημεία ασυνέχειας, ενώ το όριο του αθροίσματος τείνει στο ήμισυ του δεξιού και αριστερού ορίου στο σημείο ασυνέχειας ως συνέπεια των συνθηκών Dirichlet, γύρω από το σημείο ασυνέχειας παρατηρείται μια κυμάτωση με μια μέση τιμή κατά 9% μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή του σήματος.
- Επιπλέον παρατηρήθηκε ότι:
  1. Η κυμάτωση είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των όρων της σειράς Fourier.
  2. Με την αύξηση των όρων της σειράς η κυμάτωση συγκεντρώνεται κοντά στην ασυνέχεια.

Φαινόμενο Gibbs για την περιοδική τετραγωνική παλμοσειρά

Σειρά Fourier

Φαινόμενο Gibbs

- Για ασυνεχή σήματα στα σημεία ασυνέχειας, ενώ το όριο του αθροίσματος τείνει στο ήμισυ του δεξιού και αριστερού ορίου στο σημείο ασυνέχειας ως συνέπεια των συνθηκών Dirichlet, γύρω από το σημείο ασυνέχειας παρατηρείται μια κυμάτωση με μια μέση τιμή κατά 9% μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή του σήματος.
- Επιπλέον παρατηρήθηκε ότι:
  1. Η κυμάτωση είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των όρων της σειράς Fourier.
  2. Με την αύξηση των όρων της σειράς η κυμάτωση συγκεντρώνεται κοντά στην ασυνέχεια.

Φαινόμενο Gibbs για την περιοδική τετραγωνική παλμοσειρά

Σειρά Fourier

Φαινόμενο Gibbs

- Για ασυνεχή σήματα στα σημεία ασυνέχειας, ενώ το όριο του αθροίσματος τείνει στο ήμισυ του δεξιού και αριστερού ορίου στο σημείο ασυνέχειας ως συνέπεια των συνθηκών Dirichlet, γύρω από το σημείο ασυνέχειας παρατηρείται μια κυμάτωση με μια μέση τιμή κατά 9% μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή του σήματος.
- Επιπλέον παρατηρήθηκε ότι:
  1. Η κυμάτωση είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των όρων της σειράς Fourier.
  2. Με την αύξηση των όρων της σειράς η κυμάτωση συγκεντρώνεται κοντά στην ασυνέχεια.

  Φαινόμενο Gibbs για την περιοδική τετραγωνική παλμοσειρά

Συμμετρικά σήματα

Η εκμετάλλευση των συμμετριών διευκολύνει τους υπολογισμούς, γιατί

1. αν $x(t)$ είναι άρτιας συμμετρίας για $t \in [-T/2, T/2]$

$$b_n = 0 \;\; \forall n \tag{34}$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \, \cos n\omega_0 t \, dt \tag{35}$$

2. ενώ αν $x(t)$ είναι περιττής συμμετρίας για $t \in [-T/2, T/2]$

$$a_n = 0 \;\; \forall n \tag{36}$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \, \sin n\omega_0 t \, dt. \tag{37}$$

Συμμετρικά σήματα

Η εκμετάλλευση των συμμετριών διευκολύνει τους υπολογισμούς, γιατί

1. αν $x(t)$ είναι άρτιας συμμετρίας για $t \in [-T/2, T/2]$

$$b_n = 0 \ \ \forall n \tag{34}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt \tag{35}$$

2. ενώ αν $x(t)$ είναι περιττής συμμετρίας για $t \in [-T/2, T/2]$

$$a_n = 0 \ \ \forall n \tag{36}$$

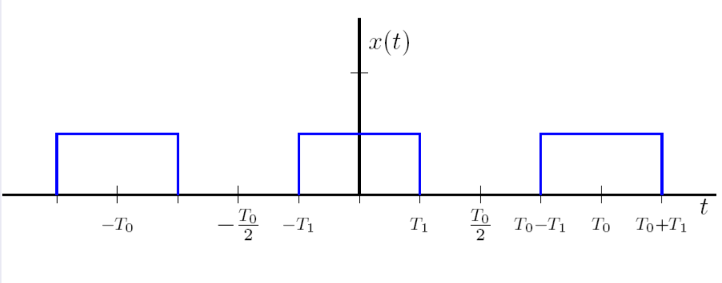
$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\ \sin n\omega_0 t\ dt. \tag{37}$$

Παράδειγμα 4.2 (1)

Δίνεται ο περιοδικός τετραγωνικός παλμός με θεμελιώδη περίοδο T_0 και διάρκεια $2T_1$ του Σχήματος 4.4. Ο παλμός έχει την εξής αναλυτική περιγραφή:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2}. \end{cases} \tag{38}$$

Να εξαχθούν οι συντελεστές της τριγωνομετρικης σειράς Fourier.



Σχήμα 4.4

Παράδειγμα 4.2 (2)

- Επειδή ο παλμός είναι άρτιας συμμετρίας οι συντελεστές της σειράς ημιτόνων είναι μηδενικοί, δηλαδή $b_n = 0, \forall n$.
- Οπότε μας ενδιαφέρουν οι συντελεστές a_n.

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,dt = \frac{4}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,dt = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_1} dt = \frac{4T_1}{T_0} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{4}{T_0}\int_0^{T_1} \cos n\omega_0 t\,dt \\ &= \frac{4}{T_0}\frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t\Big|_0^{T_1} = \frac{4}{T_0}\frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 T_1 \\ &= \frac{4}{n2\pi}\sin n\omega_0 T_1 = 2\frac{\sin n\omega_0 T_1}{n\pi}, \quad n \neq 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Παράδειγμα 4.2 (2)

- Επειδή ο παλμός είναι άρτιας συμμετρίας οι συντελεστές της σειράς ημιτόνων είναι μηδενικοί, δηλαδή $b_n = 0, \forall n$.
- Οπότε μας ενδιαφέρουν οι συντελεστές a_n.

$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,dt = \frac{4}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,dt = \frac{4}{T_0}\int_{0}^{T_1} dt = \frac{4T_1}{T_0} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{4}{T_0}\int_{0}^{T_1} \cos n\omega_0 t\,dt \\
&= \frac{4}{T_0}\frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 t\Big|_{0}^{T_1} = \frac{4}{T_0}\frac{1}{n\omega_0}\sin n\omega_0 T_1 \\
&= \frac{4}{n2\pi}\sin n\omega_0 T_1 = 2\frac{\sin n\omega_0 T_1}{n\pi}, \quad n \neq 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Παράδειγμα 4.2 (3)

- Αν $T_1 = \frac{T_0}{4} \Leftrightarrow T_0 = 4T_1$, οπότε προκύπτει συμμετρικός τετραγωνικός παλμός, παίρνουμε

$$a_n = 2\frac{\sin(n\omega_0 T_0/4)}{n\pi} = 2\frac{\sin(n\pi/2)}{2\frac{n\pi}{2}} = \mathrm{sinc}(\frac{n\pi}{2}) \tag{41}$$

όπου η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ ορίζεται ως $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- Οι συντελεστές δειγματοληπτούν τη συνεχή περιβάλλουσα που ορίζει η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ για $x = \frac{n\pi}{2}$, με $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Ενδεικτικές τιμές συντελεστών της σειράς Fourier:

$$a_0 = 1 \tag{42}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \tag{43}$$

$$a_3 = \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} = -\frac{2}{3\pi}. \tag{44}$$

Παράδειγμα 4.2 (3)

- Αν $T_1 = \frac{T_0}{4} \Leftrightarrow T_0 = 4T_1$, οπότε προκύπτει συμμετρικός τετραγωνικός παλμός, παίρνουμε

$$a_n = 2\frac{\sin(n\omega_0 T_0/4)}{n\pi} = 2\frac{\sin(n\pi/2)}{2\frac{n\pi}{2}} = \mathrm{sinc}(\frac{n\pi}{2}) \tag{41}$$

  όπου η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ ορίζεται ως $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- Οι συντελεστές δειγματοληπτούν τη συνεχή περιβάλλουσα που ορίζει η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ για $x = \frac{n\pi}{2}$, με $n \in \mathbb{Z}^+$.

- Ενδεικτικές τιμές συντελεστών της σειράς Fourier:

$$a_0 = 1 \tag{42}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \tag{43}$$

$$a_3 = \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} = -\frac{2}{3\pi}. \tag{44}$$

Παράδειγμα 4.2 (3)

- Αν $T_1 = \frac{T_0}{4} \Leftrightarrow T_0 = 4T_1$, οπότε προκύπτει συμμετρικός τετραγωνικός παλμός, παίρνουμε

$$a_n = 2\frac{\sin(n\omega_0 T_0/4)}{n\pi} = 2\frac{\sin(n\pi/2)}{2\frac{n\pi}{2}} = \mathrm{sinc}(\frac{n\pi}{2}) \tag{41}$$

  όπου η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ ορίζεται ως $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$.
- Οι συντελεστές δειγματοληπτούν τη συνεχή περιβάλλουσα που ορίζει η συνάρτηση $\mathrm{sinc}(x)$ για $x = \frac{n\pi}{2}$, με $n \in \mathbb{Z}^+$.
- Ενδεικτικές τιμές συντελεστών της σειράς Fourier:

$$a_0 = 1 \tag{42}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \tag{43}$$

$$a_3 = \frac{\sin(3\pi/2)}{3\pi/2} = -\frac{2}{3\pi}. \tag{44}$$

Παράδειγμα 4.2 (4)

- Οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier δίνονται από τις

$$c_0 = \frac{1}{2} \tag{45}$$

$$c_n = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}a_{|n|}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{46}$$

Συντελεστές τριγωνομετρικής και εκθετικής σειράς Fourier περιοδικού συμμετρικού τετραγωνικού παλμού

Παράδειγμα 4.3 (1)

- Να εξαχθούν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt \\ a_0 &= \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\ dt \end{aligned}$$

για την τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\ \cos n\omega_0 t + b_n\ \sin n\omega_0 t\right). \tag{47}$$

- Η εξαγωγή των συντελεστών b_n αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 4.3 (1)

- Να εξαχθούν οι σχέσεις:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\,\cos n\omega_0 t\, dt$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\, dt$$

για την τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\,\cos n\omega_0 t + b_n\,\sin n\omega_0 t\right). \tag{47}$$

- Η εξαγωγή των συντελεστών b_n αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 4.3 (2)

- Οι συναρτήσεις $\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t$ και οι συναρτήσεις $\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n\omega_0 t$ συγκροτούν ορθοκανονικές βάσεις.
- Παρατηρούμε επίσης ότι για $n \neq m$

$$< \varphi_n(t), \psi_m(t) > = \int_{t_1}^{t_1+T} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t \, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin m\omega_0 t \, dt \qquad (48)$$

$$= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \cos n\omega_0 t \ \sin m\omega_0 t \, dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{1}{2} \Big[\sin(n-m)\omega_0 t + \sin(n+m)\omega_0 t \Big] dt =$$

$$\underbrace{=}_{n \neq m} \frac{1}{T} \Big\{ (-\frac{1}{n-m}) \Big[\cos(n-m)\frac{2\pi}{T}T - 1 \Big] +$$

$$+(-\frac{1}{n+m}) \Big[\cos(n+m)\frac{2\pi}{T}T - 1 \Big] = 0. \qquad (49)$$

Παράδειγμα 4.3 (2)

- Οι συναρτήσεις $\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t$ και οι συναρτήσεις $\psi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n\omega_0 t$ συγκροτούν ορθοκανονικές βάσεις.
- Παρατηρούμε επίσης ότι για $n \neq m$

$$< \varphi_n(t), \psi_m(t) >= \int_{t_1}^{t_1+T} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t \sqrt{\frac{2}{T}} \sin m\omega_0 t \, dt \quad (48)$$

$$= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \cos n\omega_0 t \, \sin m\omega_0 t \, dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{1}{2} \Big[\sin(n-m)\omega_0 t + \sin(n+m)\omega_0 t \Big] \, dt =$$

$$\underbrace{=}_{n \neq m} \frac{1}{T} \Big\{ (-\frac{1}{n-m}) \Big[\cos(n-m)\frac{2\pi}{T}T - 1 \Big] +$$

$$+(-\frac{1}{n+m}) \Big[\cos(n+m)\frac{2\pi}{T}T - 1 \Big] = 0. \quad (49)$$

Παράδειγμα 4.3 (3)

- Αν $n = m$ από την (48) παίρνουμε

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos n\omega_0 t \ \sin n\omega_0 t \ dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\sin 2n\omega_0 t \ dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \sin 2n\omega_0 t \ dt = -\frac{1}{2T}\cos 2n\omega_0 t\Big|_0^T = 0. \qquad (50)$$

Άρα

$$< \varphi_n(t), \psi_m(t) >= 0 \ \ \forall n, m \in \mathbb{Z}^+ \qquad (51)$$

- Οπότε όταν ενδιαφερόμαστε για τους συντελεστές της σειράς συνημιτόνων αγνοούμε τους όρους του αθροίσματος επέκτασης της $x(t)$ που εμπλέκουν ημίτονα.

Παράδειγμα 4.3 (3)

- Αν $n = m$ από την (48) παίρνουμε

$$\frac{2}{T}\int_0^T \cos n\omega_0 t\ \sin n\omega_0 t\ dt = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\sin 2n\omega_0 t\ dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \sin 2n\omega_0 t\ dt = -\frac{1}{2T}\cos 2n\omega_0 t\Big|_0^T = 0. \quad (50)$$

'Αρα

$$< \varphi_n(t), \psi_m(t) >= 0 \ \ \forall n, m \in \mathbb{Z}^+ \quad (51)$$

- Οπότε όταν ενδιαφερόμαστε για τους συντελεστές της σειράς συνημιτόνων αγνοούμε τους όρους του αθροίσματος επέκτασης της $x(t)$ που εμπλέκουν ημίτονα.

Παράδειγμα 4.3 (4)

- Η θεωρία προβλέπει ότι:

$$\hat{a}_n = < x(t), \varphi_n(t) > \quad n \geq 1 \tag{52}$$

- και ότι

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{dc όρος} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \varphi_n(t) = \text{dc όρος} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \left(\sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t \right) \\ &= \text{dc όρος} + \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos n\omega_0 t. \end{aligned} \tag{53}$$

Παράδειγμα 4.3 (4)

- Η θεωρία προβλέπει ότι:

$$\hat{a}_n = < x(t), \varphi_n(t) > \quad n \geq 1 \tag{52}$$

- και ότι

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{dc όρος} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \, \varphi_n(t) = \text{dc όρος} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \left(\sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t \right) \\ &= \text{dc όρος} + \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos n\omega_0 t. \end{aligned} \tag{53}$$

Παράδειγμα 4.3 (5)

- Υπολογίζοντας την (52) έχουμε:

$$\hat{a}_n = < x(t), \varphi_n(t) > = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt. \tag{54}$$

- Αντικαθιστώντας στην (53):

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{dc όρος} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt \right] \cos n\omega_0 t \\ &= \text{dc όρος} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{T} \int_0^T x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt \right]}_{a_n,\ n \geq 1} \cos n\omega_0 t. \end{aligned}$$

Υπολείπεται να προσδιοριστεί ο dc όρος.

Παράδειγμα 4.3 (5)

- Υπολογίζοντας την (52) έχουμε:

$$\hat{a}_n = < x(t), \varphi_n(t) > = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt. \tag{54}$$

- Αντικαθιστώντας στην (53):

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{dc όρος} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt \right] \cos n\omega_0 t \\ &= \text{dc όρος} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{T} \int_0^T x(t)\ \cos n\omega_0 t\ dt \right]}_{a_n \quad n \geq 1} \cos n\omega_0 t. \end{aligned}$$

Υπολείπεται να προσδιοριστεί ο dc όρος.

Παράδειγμα 4.3 (5)

- Υπολογίζοντας την (52) έχουμε:

$$\hat{a}_n =< x(t), \varphi_n(t) >= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T x(t) \; \cos n\omega_0 t \; dt. \tag{54}$$

- Αντικαθιστώντας στην (53):

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{dc όρος} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T x(t) \; \cos n\omega_0 t \; dt \right] \cos n\omega_0 t \\ &= \text{dc όρος} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{2}{T} \int_0^T x(t) \; \cos n\omega_0 t \; dt \right] \cos n\omega_0 t.}_{a_n \;\; n \geq 1} \end{aligned}$$

Υπολείπεται να προσδιοριστεί ο dc όρος.

Παράδειγμα 4.3 (6)

- Αν θέσουμε όπου $n=0$ στην $\varphi_n(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos n\omega_0 t, 0\leq t\leq T$ παίρνουμε

$$\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{2}{T}} \quad 0\leq t\leq T. \tag{55}$$

- Ενώ ισχύει $<\varphi_0(t),\varphi_n(t)>=0, \forall n\neq 0$
- παρατηρούμε ότι $<\varphi_0(t),\varphi_0(t)>=\int_0^T \frac{2}{T}\,dt=2$. Άρα πρέπει να κανονικοποιηθεί η $\varphi_0(t)$ σε: $\varphi_0'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{T}}=\frac{1}{\sqrt{T}}, 0\leq t\leq T$ για να αποτελεί στοιχείο ορθοκανονικής βάσης των συνημιτοειδών συναρτήσεων.
- Τότε $\hat{a}_0=<x(t),\varphi_0'(t)>=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T x(t)dt$, οπότε ο dc όρος στην τριγωνομετρική σειρά είναι

$$\frac{a_0}{2}=\hat{a}_0\varphi_0'(t)=\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\right]\Longleftrightarrow a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt. \tag{56}$$

Παράδειγμα 4.3 (6)

- Αν θέσουμε όπου $n=0$ στην $\varphi_n(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos n\omega_0 t, 0\leq t\leq T$ παίρνουμε

$$\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{2}{T}} \quad 0\leq t\leq T. \tag{55}$$

- Ενώ ισχύει $<\varphi_0(t),\varphi_n(t)>=0, \forall n\neq 0$
- παρατηρούμε ότι $<\varphi_0(t),\varphi_0(t)>=\int_0^T \frac{2}{T}\,dt=2$. Άρα πρέπει να κανονικοποιηθεί η $\varphi_0(t)$ σε: $\varphi_0'(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{T}}=\frac{1}{\sqrt{T}}, 0\leq t\leq T$ για να αποτελεί στοιχείο ορθοκανονικής βάσης των συνημιτοειδών συναρτήσεων.
- Τότε $\hat{a}_0=<x(t),\varphi_0'(t)>=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_0^T x(t)dt$, οπότε ο dc όρος στην τριγωνομετρική σειρά είναι

$$\frac{a_0}{2}=\hat{a}_0\varphi_0'(t)=\left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\right] \Longleftrightarrow a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt. \tag{56}$$

Παράδειγμα 4.3 (6)

- Αν θέσουμε όπου $n = 0$ στην $\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t, 0 \leq t \leq T$ παίρνουμε

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{55}$$

- Ενώ ισχύει $< \varphi_0(t), \varphi_n(t) >= 0, \forall n \neq 0$
- παρατηρούμε ότι $< \varphi_0(t), \varphi_0(t) >= \int_0^T \frac{2}{T}\, dt = 2$. Άρα πρέπει να κανονικοποιηθεί η $\varphi_0(t)$ σε: $\varphi_0'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}}, 0 \leq t \leq T$ για να αποτελεί στοιχείο ορθοκανονικής βάσης των συνημιτοειδών συναρτήσεων.
- Τότε $\hat{a}_0 =< x(t), \varphi_0'(t) > = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) dt$, οπότε ο dc όρος στην τριγωνομετρική σειρά είναι

$$\frac{a_0}{2} = \hat{a}_0 \varphi_0'(t) = \left[\frac{1}{T}\int_0^T x(t) dt\right] \Longleftrightarrow a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\, dt. \tag{56}$$

Σειρά Fourier

Παράδειγμα 4.3 (6)

- Αν θέσουμε όπου $n = 0$ στην $\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega_0 t, 0 \leq t \leq T$ παίρνουμε

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \quad 0 \leq t \leq T. \tag{55}$$

- Ενώ ισχύει $< \varphi_0(t), \varphi_n(t) >= 0, \forall n \neq 0$
- παρατηρούμε ότι $< \varphi_0(t), \varphi_0(t) >= \int_0^T \frac{2}{T}\, dt = 2$. Άρα πρέπει να κανονικοποιηθεί η $\varphi_0(t)$ σε: $\varphi_0^{'}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{T}} = \frac{1}{\sqrt{T}}, 0 \leq t \leq T$ για να αποτελεί στοιχείο ορθοκανονικής βάσης των συνημιτοειδών συναρτήσεων.
- Τότε $\hat{a}_0 =< x(t), \varphi_0^{'}(t) > = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) dt$, οπότε ο dc όρος στην τριγωνομετρική σειρά είναι

$$\frac{a_0}{2} = \hat{a}_0 \varphi_0^{'}(t) = \left[\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \right] \Longleftrightarrow a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t)\, dt. \tag{56}$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Ζεύγος εξισώσεων ανάλυσης και σύνθεσης

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος Σ.Χ. σε σειρά Fourier έχει ένα σημαντικό αριθμό ιδιοτήτων που μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε σε βάθος τη φυσική σημασία μιας τέτοιας αναπαράστασης που αναδεικνύει το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος.
- Στην ανάπτυξη θα χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ για να δηλώσουμε ότι ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T και θεμελιώδη (κυκλική) συχνότητα $\omega_0 = 2\frac{\pi}{T}$ έχει συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k, δηλαδή ισχύει το ζεύγος εξισώσεων ανάλυσης και σύνθεσης:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,t}\, dt \qquad (57)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j\,k\,\omega_0\,t}. \qquad (58)$$

Πίνακας ιδιοτήτων της σειράς Fourier

Ζεύγος εξισώσεων ανάλυσης και σύνθεσης

- Η αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος Σ.Χ. σε σειρά Fourier έχει ένα σημαντικό αριθμό ιδιοτήτων που μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε σε βάθος τη φυσική σημασία μιας τέτοιας αναπαράστασης που αναδεικνύει το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος.
- Στην ανάπτυξη θα χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση $x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k$ για να δηλώσουμε ότι ένα περιοδικό σήμα $x(t)$ με περίοδο T και θεμελιώδη (κυκλική) συχνότητα $\omega_0 = 2\frac{\pi}{T}$ έχει συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k, δηλαδή ισχύει το ζεύγος εξισώσεων ανάλυσης και σύνθεσης:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,t}\, dt \tag{57}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j\,k\,\omega_0\,t}. \tag{58}$$

Πίνακας ιδιοτήτων της σειράς Fourier

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Γραμμικότητα

- Έστω $x(t)$ και $y(t)$ δύο περιοδικά σήματα με περίοδο T που έχουν συντελεστές σειράς Fourier a_k και b_k αντιστοίχως.
- Κάθε γραμμικός συνδυασμός των $x(t)$ και $y(t)$ είναι επίσης περιοδικό σήμα με περίοδο T και συντελεστές σειράς Fourier που δίνονται από τη

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = A\,a_k + B\,b_k, \qquad \forall A, B \in \mathbb{C}. \tag{59}$$

Η απόδειξη της (59) είναι απλή και στηρίζεται στην εφαρμογή της εξίσωσης ανάλυσης (57).

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Γραμμικότητα

- Έστω $x(t)$ και $y(t)$ δύο περιοδικά σήματα με περίοδο T που έχουν συντελεστές σειράς Fourier a_k και b_k αντιστοίχως.
- Κάθε γραμμικός συνδυασμός των $x(t)$ και $y(t)$ είναι επίσης περιοδικό σήμα με περίοδο T και συντελεστές σειράς Fourier που δίνονται από τη

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = A\, a_k + B\, b_k, \quad \forall A, B \in \mathbb{C}. \tag{59}$$

Η απόδειξη της (59) είναι απλή και στηρίζεται στην εφαρμογή της εξίσωσης ανάλυσης (57).

Χρονική μετατόπιση

- Η χρονική μετατόπιση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ που έχει περίοδο T δεν αλλοιώνει την περιοδικότητα του σήματος.
- Επομένως το προκύπτον σήμα $y(t) = x(t - t_0)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,t}\, dt \overset{\tau=t-t_0}{=} \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,(\tau+t_0)}\, d\tau \\ &= e^{-j\,k\,\omega_0\,t_0}\, a_k. \end{aligned} \tag{60}$$

- Δηλαδή

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} e^{-j\,k\,\omega_0\,t_0}\, a_k \tag{61}$$

που υποδηλοί ότι όταν ένα σήμα μετατοπίζεται στο χρόνο το μέτρο των συντελεστών της σειράς Fourier παραμένει αναλλοίωτο.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Χρονική μετατόπιση

- Η χρονική μετατόπιση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ που έχει περίοδο T δεν αλλοιώνει την περιοδικότητα του σήματος.
- Επομένως το προκύπτον σήμα $y(t) = x(t - t_0)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,t}\, dt \overset{\tau = t - t_0}{=} \frac{1}{T} \int_T x(\tau)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,(\tau + t_0)}\, d\tau \\ &= e^{-j\,k\,\omega_0\,t_0}\, a_k. \end{aligned} \tag{60}$$

- Δηλαδή

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} e^{-j\,k\,\omega_0\,t_0}\, a_k \tag{61}$$

που υποδηλοί ότι όταν ένα σήμα μετατοπίζεται στο χρόνο το μέτρο των συντελεστών της σειράς Fourier παραμένει αναλλοίωτο.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Χρονική μετατόπιση

- Η χρονική μετατόπιση ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ που έχει περίοδο T δεν αλλοιώνει την περιοδικότητα του σήματος.
- Επομένως το προκύπτον σήμα $y(t) = x(t - t_0)$ μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier με συντελεστές

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t-t_0)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,t}\, dt \overset{\tau=t-t_0}{=} \frac{1}{T}\int_T x(\tau)\, e^{-j\,k\,\omega_0\,(\tau+t_0)}\, d\tau \\ &= e^{-j\,k\,\omega_0\,t_0}\, a_k. \end{aligned} \tag{60}$$

- Δηλαδή

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} e^{-j\,k\,\omega_0\,t_0}\, a_k \tag{61}$$

που υποδηλοί ότι όταν ένα σήμα μετατοπίζεται στο χρόνο το μέτρο των συντελεστών της σειράς Fourier παραμένει αναλλοίωτο.

Χρονική αναστροφή

- Η χρονική αναστροφή ενός περιοδικού σήματος δεν αλλοιώνει την περιοδικότητα του σήματος, άρα το χρονικώς αναστραμμένο σήμα μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier με συντελεστές ας πούμε b_k.
- Ας ξεκινήσουμε από τη (58) η οποία είναι ταυτότητα αντικαθιστώντας όπου t το $-t$:

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j\,k\,\omega_0\,(-t)} \overset{m=-k}{=} \sum_{m=\infty}^{-\infty} a_{-m} \, e^{j\,m\,\omega_0\,t} \tag{62}$$

- από την οποία προκύπτει ότι

$$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} b_k = a_{-k} \tag{63}$$

που υποδηλοί ότι η χρονική αναστροφή οδηγεί σε αναστροφή του δείκτη της σειράς Fourier. Αν $x(t)$ είναι σήμα άρτιας συμμετρίας, τότε προκύπτει ότι $a_k = a_{-k}$, ενώ αν είναι περιττής συμμετρίας, τότε $a_k = -a_{-k}$.

Χρονική αναστροφή

- Η χρονική αναστροφή ενός περιοδικού σήματος δεν αλλοιώνει την περιοδικότητα του σήματος, άρα το χρονικώς αναστραμμένο σήμα μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier με συντελεστές ας πούμε b_k.
- Ας ξεκινήσουμε από τη (58) η οποία είναι ταυτότητα αντικαθιστώντας όπου t το $-t$:

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j\,k\,\omega_0\,(-t)} \overset{m=-k}{=} \sum_{m=\infty}^{-\infty} a_{-m} \, e^{j\,m\,\omega_0\,t} \tag{62}$$

- από την οποία προκύπτει ότι

$$x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k = a_{-k} \tag{63}$$

που υποδηλοί ότι η χρονική αναστροφή οδηγεί σε αναστροφή του δείκτη της σειράς Fourier. Αν $x(t)$ είναι σήμα άρτιας συμμετρίας, τότε προκύπτει ότι $a_k = a_{-k}$, ενώ αν είναι περιττής συμμετρίας, τότε $a_k = -a_{-k}$.

Χρονική αναστροφή

- Η χρονική αναστροφή ενός περιοδικού σήματος δεν αλλοιώνει την περιοδικότητα του σήματος, άρα το χρονικώς αναστραμμένο σήμα μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier με συντελεστές ας πούμε b_k.
- Ας ξεκινήσουμε από τη (58) η οποία είναι ταυτότητα αντικαθιστώντας όπου t το $-t$:

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j\,k\,\omega_0\,(-t)} \overset{m=-k}{=} \sum_{m=\infty}^{-\infty} a_{-m} \, e^{j\,m\,\omega_0\,t} \qquad (62)$$

- από την οποία προκύπτει ότι

$$x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k = a_{-k} \qquad (63)$$

που υποδηλοί ότι η χρονική αναστροφή οδηγεί σε αναστροφή του δείκτη της σειράς Fourier. Αν $x(t)$ είναι σήμα άρτιας συμμετρίας, τότε προκύπτει ότι $a_k = a_{-k}$, ενώ αν είναι περιττής συμμετρίας, τότε $a_k = -a_{-k}$.

Χρονική κλιμάκωση

- Η χρονική κλιμάκωση ενός σήματος $x(t)$ που έχει περίοδο T κατά παράγοντα $\alpha \in \mathbb{R}^+$ οδηγεί σ' ένα περιοδικό σήμα με περίοδο $\frac{T}{\alpha}$ και θεμελιώδη συχνότητα $\alpha\omega_0$.
- Ας ξεκινήσουμε από την εξίσωση σύνθεσης αντικαθιστώντας όπου t το $\alpha\, t$. Τότε:

$$x(\alpha\, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j\,k\,\omega_0\,(\alpha\, t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j\,k\,(\alpha\,\omega_0)\,t} \tag{64}$$

που υποδηλοί ότι οι συντελεστές της σειράς παραμένουν αναλλοίωτοι, αλλά αναφέρονται σε αρμονικές με θεμελιώδη συχνότητα $\alpha\,\omega_0$.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Χρονική κλιμάκωση

- Η χρονική κλιμάκωση ενός σήματος $x(t)$ που έχει περίοδο T κατά παράγοντα $\alpha \in \mathbb{R}^+$ οδηγεί σ' ένα περιοδικό σήμα με περίοδο $\frac{T}{\alpha}$ και θεμελιώδη συχνότητα $\alpha\omega_0$.
- Ας ξεκινήσουμε από την εξίσωση σύνθεσης αντικαθιστώντας όπου t το $\alpha\, t$. Τότε:

$$x(\alpha\, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j\,k\,\omega_0\,(\alpha\, t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j\,k\,(\alpha\,\omega_0)\,t} \tag{64}$$

που υποδηλοί ότι οι συντελεστές της σειράς παραμένουν αναλλοίωτοι, αλλά αναφέρονται σε αρμονικές με θεμελιώδη συχνότητα $\alpha\,\omega_0$.

Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου (1)

- Πολλαπλασιάζοντας δύο περιοδικά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ της ιδίας περιόδου T με συντελεστές σειράς Fourier a_k και b_k αντιστοίχως, προκύπτει περιοδικό σήμα με την αυτή περίοδο T του οποίου οι συντελεστές της σειράς Fourier εξάγονται ως εξής

$$
\begin{aligned}
x(t)y(t) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{j\,k\,\omega_0\,t}\right)\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l\, e^{j\,l\,\omega_0\,t}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_k\, b_l\, e^{j\,(k+l)\,\omega_0\,t} \\
&\overset{m=k+l}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, b_{m-k}\right) e^{j\,m\,\omega_0\,t} \qquad (65)
\end{aligned}
$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου (2)

- απ᾽ όπου προκύπτει ότι

$$x(t)y(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \, b_{k-m}. \tag{66}$$

- Η (66) υποδηλοί ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του γινομένου δύο περιοδικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου προκύπτουν ως συνέλιξη των ακολουθιών των συντελεστών Fourier των δύο επιμέρους σημάτων.

Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου (2)

- απ᾽ όπου προκύπτει ότι

$$x(t)y(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m\, b_{k-m}. \tag{66}$$

- Η (66) υποδηλοί ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του γινομένου δύο περιοδικών σημάτων στο πεδίο του χρόνου προκύπτουν ως συνέλιξη των ακολουθιών των συντελεστών Fourier των δύο επιμέρους σημάτων.

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (1)

- Ξεκινώντας από την (58) παίρνουμε

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j\,k\,\omega_0\,t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \, e^{-j\,k\,\omega_0\,t} \overset{m=-k}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m}^* \, e^{j\,m\,\omega_0\,t} \tag{67}$$

οπότε

$$x^*(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}^*. \tag{68}$$

- Σημαντικές ιδιότητες συμμετρίας προκύπτουν για πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$, γιατί

$$x(t) \text{ πραγματικής τιμής} \Longleftrightarrow x(t) = x^*(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k = a_{-k}^* \Longleftrightarrow a_k^* = a_{-k} \tag{69}$$

οπότε λέμε ότι η ακολουθία των συντελεστών Fourier έχει συζυγή συμμετρία (conjugate symmetry).

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (1)

- Ξεκινώντας από την (58) παίρνουμε

$$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{j\,k\,\omega_0\,t} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* \, e^{-j\,k\,\omega_0\,t} \overset{m=-k}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m}^* \, e^{j\,m\,\omega_0\,t} \tag{67}$$

οπότε

$$x^*(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a_{-k}^*. \tag{68}$$

- Σημαντικές ιδιότητες συμμετρίας προκύπτουν για πραγματικό περιοδικό σήμα $x(t)$, γιατί

$$x(t) \;\; \text{πραγματικής τιμής} \Longleftrightarrow x(t) = x^*(t) \overset{\mathcal{F}S}{\longleftrightarrow} a_k = a_{-k}^* \Longleftrightarrow a_k^* = a_{-k} \tag{69}$$

οπότε λέμε ότι η ακολουθία των συντελεστών Fourier έχει συζυγή συμμετρία (conjugate symmetry).

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (2)

- Τούτο πρακτικά σημαίνει ότι $a_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\}$, $\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$, $|a_k| = |a_{-k}|$ και $\angle a_k = -\angle a_{-k}$ όπου $\angle c$ υποδηλοί τη φάση του μιγαδικού αριθμού $c \in \mathbb{C}$.
- Επομένως οι ακολουθίες των πραγματικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών συνημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των μέτρων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν άρτια συμμετρία.
- ενώ οι ακολουθίες των φανταστικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών ημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των φάσεων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν περιττή συμμετρία.
- Επιπλέον ο dc όρος που είναι η μέση τιμή του σήματος σε διάρκεια μιας περιόδου είναι πραγματικός αριθμός.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (2)

- Τούτο πρακτικά σημαίνει ότι $a_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\}$, $\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$, $|a_k| = |a_{-k}|$ και $\angle a_k = -\angle a_{-k}$ όπου $\angle c$ υποδηλοί τη φάση του μιγαδικού αριθμού $c \in \mathbb{C}$.
- Επομένως οι ακολουθίες των πραγματικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών συνημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των μέτρων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν άρτια συμμετρία,
- ενώ οι ακολουθίες των φανταστικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών ημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των φάσεων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν περιττή συμμετρία.
- Επιπλέον ο dc όρος που είναι η μέση τιμή του σήματος σε διάρκεια μιας περιόδου είναι πραγματικός αριθμός.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (2)

- Τούτο πρακτικά σημαίνει ότι $a_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\}$, $\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$, $|a_k| = |a_{-k}|$ και $\angle a_k = -\angle a_{-k}$ όπου $\angle c$ υποδηλοί τη φάση του μιγαδικού αριθμού $c \in \mathbb{C}$.
- Επομένως οι ακολουθίες των πραγματικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών συνημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των μέτρων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν άρτια συμμετρία,
- ενώ οι ακολουθίες των φανταστικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών ημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των φάσεων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν περιττή συμμετρία.
- Επιπλέον ο dc όρος που είναι η μέση τιμή του σήματος σε διάρκεια μιας περιόδου είναι πραγματικός αριθμός.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (2)

- Τούτο πρακτικά σημαίνει ότι $a_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\{a_k\} = \mathrm{Re}\{a_{-k}\}$, $\mathrm{Im}\{a_k\} = -\mathrm{Im}\{a_{-k}\}$, $|a_k| = |a_{-k}|$ και $\angle a_k = -\angle a_{-k}$ όπου $\angle c$ υποδηλοί τη φάση του μιγαδικού αριθμού $c \in \mathbb{C}$.
- Επομένως οι ακολουθίες των πραγματικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών συνημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των μέτρων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν άρτια συμμετρία,
- ενώ οι ακολουθίες των φανταστικών μερών των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier, των συντελεστών ημιτόνων της τριγωνομετρικής σειράς Fourier και των φάσεων των συντελεστών της εκθετικής σειράς Fourier έχουν περιττή συμμετρία.
- Επιπλέον ο dc όρος που είναι η μέση τιμή του σήματος σε διάρκεια μιας περιόδου είναι πραγματικός αριθμός.

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (3)

- Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και άρτιας συμμετρίας, τότε

$$x(t) \text{ πραγματικό άρτιας συμμετρίας} \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} a_k = a_{-k} & x(t) = x(-t) \\ a_k = a^*_{-k} & x(t) = x^*(t) \end{array} \right.$$
$$\Longleftrightarrow a_k = a_k^*. \tag{70}$$

  επομένως η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier είναι πραγματική ακολουθία άρτιας συμμετρίας.

- Ομοίως μπορεί να δειχθεί ότι αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας, τότε η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier είναι καθαρώς φανταστική ακολουθία περιττής συμμετρίας. Στην τελευταία περίπτωση ο dc όρος είναι μηδενικός, $a_0 = 0$.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Συζυγία και συζυγής συμμετρία (3)

- Αν το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό και άρτιας συμμετρίας, τότε

$$x(t) \text{ πραγματικό άρτιας συμμετρίας } \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} a_k = a_{-k} & x(t) = x(-t) \\ a_k = a^*_{-k} & x(t) = x^*(t) \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow a_k = a_k^*. \tag{70}$$

  επομένως η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier είναι πραγματική ακολουθία άρτιας συμμετρίας.

- Ομοίως μπορεί να δειχθεί ότι αν $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα περιττής συμμετρίας, τότε η ακολουθία των συντελεστών της σειράς Fourier είναι καθαρώς φανταστική ακολουθία περιττής συμμετρίας. Στην τελευταία περίπτωση ο dc όρος είναι μηδενικός, $a_0 = 0$.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Ταυτότητα του Parseval

- Από τη γενική θεωρία της επέκτασης σε σειρά Fourier προκύπτει

$$\frac{1}{T}\int_{T}|x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2 \tag{71}$$

- που υποδηλοί ότι η μέση ισχύς σε διάστημα μιας περιόδου του περιοδικού σήματος $x(t)$ είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών της σειράς Fourier. Το τετράγωνο του μέτρου του k-στού συντελεστή ισούται με τη μέση ισχύ της k-στης αρμονικής συνιστώσας του σήματος $x(t)$.
- Πράγματι

$$\frac{1}{T}\int_{T}|a_k e^{j k\omega_0 t}|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{T}|a_k|^2\,dt = |a_k|^2. \tag{72}$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Ταυτότητα του Parseval

- Από τη γενική θεωρία της επέκτασης σε σειρά Fourier προκύπτει

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \tag{71}$$

- που υποδηλοί ότι η μέση ισχύς σε διάστημα μιας περιόδου του περιοδικού σήματος $x(t)$ είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών της σειράς Fourier. Το τετράγωνο του μέτρου του k-στού συντελεστή ισούται με τη μέση ισχύ της k-στης αρμονικής συνιστώσας του σήματος $x(t)$.

- Πράγματι

$$\frac{1}{T}\int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_T |a_k|^2\, dt = |a_k|^2. \tag{72}$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Ταυτότητα του Parseval

- Από τη γενική θεωρία της επέκτασης σε σειρά Fourier προκύπτει

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \tag{71}$$

- που υποδηλοί ότι η μέση ισχύς σε διάστημα μιας περιόδου του περιοδικού σήματος $x(t)$ είναι ίση με το άθροισμα των τετραγώνων των μέτρων των συντελεστών της σειράς Fourier. Το τετράγωνο του μέτρου του k-στού συντελεστή ισούται με τη μέση ισχύ της k-στης αρμονικής συνιστώσας του σήματος $x(t)$.
- Πράγματι

$$\frac{1}{T}\int_T |a_k e^{j\,k\omega_0\,t}|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_T |a_k|^2\, dt = |a_k|^2. \tag{72}$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Παράδειγμα 4.4 (1)

- Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $y(t)$ με θεμελιώδη περίοδο 4, του οποίου μια περίοδος σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.6.
- Να προσδιορίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος αυτού χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της σειράς Fourier και το δεδομένο ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t)$ του Σχήματος 4.7 είναι

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} & \text{αν } k \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } k = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Παράδειγμα 4.4 (1)

- Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $y(t)$ με θεμελιώδη περίοδο 4, του οποίου μια περίοδος σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.6.
- Να προσδιορίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος αυτού χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της σειράς Fourier και το δεδομένο ότι οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t)$ του Σχήματος 4.7 είναι

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} & \text{αν } k \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } k = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Παράδειγμα 4.4 (2)

- Από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.6 και 4.7 προκύπτει ότι

$$y(t) = x(t-2) - \frac{1}{2}. \tag{74}$$

- Έστω b_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t-2)$. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$b_k = a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{4}\right)2} = a_k e^{-jk\pi} = a_k(-1)^k. \tag{75}$$

- Οι συντελεστές της σειράς Fourier του σταθερού σήματος $z(t) = -\frac{1}{2}$ είναι

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{αν } k = 0. \end{cases} \tag{76}$$

Παράδειγμα 4.4 (2)

- Από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.6 και 4.7 προκύπτει ότι

$$y(t) = x(t-2) - \frac{1}{2}. \tag{74}$$

- Έστω b_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t-2)$. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$b_k = a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{4}\right)2} = a_k e^{-jk\pi} = a_k\,(-1)^k. \tag{75}$$

- Οι συντελεστές της σειράς Fourier του σταθερού σήματος $z(t) = -\frac{1}{2}$ είναι

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{αν } k = 0. \end{cases} \tag{76}$$

Παράδειγμα 4.4 (2)

- Από τη σύγκριση των Σχημάτων 4.6 και 4.7 προκύπτει ότι

$$y(t) = x(t-2) - \frac{1}{2}. \tag{74}$$

- Έστω b_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $x(t-2)$. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε

$$b_k = a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{4}\right)2} = a_k e^{-jk\pi} = a_k(-1)^k. \tag{75}$$

- Οι συντελεστές της σειράς Fourier του σταθερού σήματος $z(t) = -\frac{1}{2}$ είναι

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{αν } k \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{αν } k = 0. \end{cases} \tag{76}$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Παράδειγμα 4.4 (3)

- Έστω d_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $y(t)$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας προκύπτει ότι

$$d_k = \begin{cases} a_k\left(-1\right)^k & \text{αν } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2} & \text{αν } k = 0 \end{cases} = \begin{cases} a_k\left(-1\right)^k & \text{αν } k \neq 0 \\ 0 & \text{αν } k = 0. \end{cases} \tag{77}$$

- Εξίσου έγκυρη είναι η λύση που στηρίζεται στη σχέση $y(t) = \frac{1}{2} - x(t)$.

Παράδειγμα 4.4 (3)

- Έστω d_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $y(t)$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα της γραμμικότητας προκύπτει ότι

$$d_k = \begin{cases} a_k\left(-1\right)^k & \text{αν } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2} & \text{αν } k = 0 \end{cases} = \begin{cases} a_k\left(-1\right)^k & \text{αν } k \neq 0 \\ 0 & \text{αν } k = 0. \end{cases} \quad (77)$$

- Εξίσου έγκυρη είναι η λύση που στηρίζεται στη σχέση $y(t) = \frac{1}{2} - x(t)$.

Παράδειγμα 4.5 (1)

- Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $h(t)$ με θεμελιώδη περίοδο 4, του οποίου μια περίοδος σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.8.
- Να προσδιορίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος αυτού χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της σειράς Fourier.
- Έστω e_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $h(t)$. Το σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.6, που υπερτίθεται στο Σχήμα 4.8, αναγνωρίζουμε ότι είναι η παράγωγος του σήματος $h(t)$. Επομένως από τη σχετική ιδιότητα της σειράς Fourier έχουμε

$$d_k = j\,k\,\frac{2\pi}{4}\,e_k. \tag{78}$$

Παράδειγμα 4.5 (1)

- Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $h(t)$ με θεμελιώδη περίοδο 4, του οποίου μια περίοδος σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.8.
- Να προσδιορίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος αυτού χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της σειράς Fourier.
- Έστω e_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $h(t)$. Το σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.6, που υπερτίθεται στο Σχήμα 4.8, αναγνωρίζουμε ότι είναι η παράγωγος του σήματος $h(t)$. Επομένως από τη σχετική ιδιότητα της σειράς Fourier έχουμε

$$d_k = j\,k\,\frac{2\pi}{4}\,e_k. \tag{78}$$

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Παράδειγμα 4.5 (1)

- Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $h(t)$ με θεμελιώδη περίοδο 4, του οποίου μια περίοδος σχεδιάζεται στο Σχήμα 4.8.
- Να προσδιορίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος αυτού χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της σειράς Fourier.
- Έστω e_k οι συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $h(t)$. Το σήμα $y(t)$ του Σχήματος 4.6, που υπερτίθεται στο Σχήμα 4.8, αναγνωρίζουμε ότι είναι η παράγωγος του σήματος $h(t)$. Επομένως από τη σχετική ιδιότητα της σειράς Fourier έχουμε

$$d_k = j\, k\, \frac{2\pi}{4}\, e_k. \tag{78}$$

Παράδειγμα 4.5 (2)

- Οπότε για $k \neq 0$,

$$e_k = \frac{2\, d_k}{j\, k\, \pi} = (-1)^k\, \frac{2\, a_k}{j\, k\, \pi} = 2\, (-1)^k\, \frac{\sin(\frac{\pi\, k}{2})}{j\, (k\, \pi)^2}, \quad k \neq 0 \tag{79}$$

- ενώ για $k = 0$, ο συντελεστής e_0 μπορεί να προσδιοριστεί βρίσκοντας το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε μιά περίοδο του $h(t)$ και διαιρώντας με τη διάρκεια της περιόδου $e_0 = \frac{1}{2}$.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Παράδειγμα 4.5 (2)

- Οπότε για $k \neq 0$,

$$e_k = \frac{2\, d_k}{j\, k\, \pi} = (-1)^k \, \frac{2\, a_k}{j\, k\, \pi} = 2\, (-1)^k \, \frac{\sin(\frac{\pi\, k}{2})}{j\, (k\, \pi)^2}, \quad k \neq 0 \tag{79}$$

- ενώ για $k = 0$, ο συντελεστής e_0 μπορεί να προσδιοριστεί βρίσκοντας το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε μιά περίοδο του $h(t)$ και διαιρώντας με τη διάρκεια της περιόδου $e_0 = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 4.5 (2)

- Οπότε για $k \neq 0$,

$$e_k = \frac{2\, d_k}{j\, k\, \pi} = (-1)^k \, \frac{2\, a_k}{j\, k\, \pi} = 2\, (-1)^k \, \frac{\sin(\frac{\pi\, k}{2})}{j\, (k\, \pi)^2}, \quad k \neq 0 \tag{79}$$

- ενώ για $k = 0$, ο συντελεστής e_0 μπορεί να προσδιοριστεί βρίσκοντας το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε μιά περίοδο του $h(t)$ και διαιρώντας με τη διάρκεια της περιόδου $e_0 = \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 4.6 (1)

Υποθέστε ότι σας δίνεται η ακόλουθη πληροφορία για το σήμα $x(t)$:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό.
2. Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = 6$ και έχει συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ για $|k| > 1$.
4. Το σήμα με συντελεστές σειράς Fourier $b_k = e^{-\frac{j\pi k}{2}} a_{-k}$ έχει περιττή συμμετρία.
5. $\frac{1}{6} \int_6 |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}$.

Να βρείτε το σήμα $x(t)$.

Παράδειγμα 4.6 (1)

Υποθέστε ότι σας δίνεται η ακόλουθη πληροφορία για το σήμα $x(t)$:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό.
2. Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = 6$ και έχει συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ για $|k| > 1$.
4. Το σήμα με συντελεστές σειράς Fourier $b_k = e^{-\frac{j\pi k}{2}} a_{-k}$ έχει περιττή συμμετρία.
5. $\frac{1}{6} \int_6 |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}$.

Να βρείτε το σήμα $x(t)$.

Παράδειγμα 4.6 (1)

Υποθέστε ότι σας δίνεται η ακόλουθη πληροφορία για το σήμα $x(t)$:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό.
2. Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = 6$ και έχει συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ για $|k| > 1$.
4. Το σήμα με συντελεστές σειράς Fourier $b_k = e^{-\frac{j\pi k}{2}} a_{-k}$ έχει περιττή συμμετρία.
5. $\frac{1}{6} \int_6 |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}$.

Να βρείτε το σήμα $x(t)$.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Παράδειγμα 4.6 (1)

Υποθέστε ότι σας δίνεται η ακόλουθη πληροφορία για το σήμα $x(t)$:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό.
2. Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = 6$ και έχει συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ για $|k| > 1$.
4. Το σήμα με συντελεστές σειράς Fourier $b_k = e^{-\frac{j\pi k}{2}} a_{-k}$ έχει περιττή συμμετρία.
5. $\frac{1}{6} \int_6 |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}$.

Να βρείτε το σήμα $x(t)$.

Παράδειγμα 4.6 (1)

Υποθέστε ότι σας δίνεται η ακόλουθη πληροφορία για το σήμα $x(t)$:

1. Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό.
2. Το σήμα $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = 6$ και έχει συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ για $|k| > 1$.
4. Το σήμα με συντελεστές σειράς Fourier $b_k = e^{-\frac{j\pi k}{2}} a_{-k}$ έχει περιττή συμμετρία.
5. $\frac{1}{6} \int_6 |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}$.

Να βρείτε το σήμα $x(t)$.

Παράδειγμα 4.6 (2)

- Από το δεδομένο 3 προκύπτει ότι

$$x(t) = a_0 + a_{-1} e^{-j \frac{\pi t}{3}} + a_1 e^{j \frac{\pi t}{3}}. \tag{80}$$

- Από το δεδομένο 4 προκύπτει ότι το σήμα με συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier b_k, ας πούμε $y(t)$, είναι ένα μετατοπισμένο αντίγραφο του σήματος $x(-t)$, επειδή το τελευταίο σήμα αναγνωρίζουμε ότι έχει συντελεστές σειράς Fourier a_{-k}. Η καθυστέρηση είναι $t_0 = \frac{3}{2}$, επειδή

$$e^{-j k \omega_0 t_0} = e^{-j k \frac{2\pi}{6} \frac{3}{2}} = e^{-j \frac{\pi k}{2}}. \tag{81}$$

Άρα $y(t) = x(-(t - \frac{3}{2})) = x(\frac{3}{2} - t)$. Επειδή η χρονική αναστροφή και η χρονική μετατόπιση δεν μπορούν να αλλάξουν την περιοδικότητα του σήματος, το δεδομένο 5 ισχύει και για το σήμα $x(\frac{3}{2} - t)$.

Παράδειγμα 4.6 (2)

- Από το δεδομένο 3 προκύπτει ότι

$$x(t) = a_0 + a_{-1} e^{-j \frac{\pi t}{3}} + a_1 e^{j \frac{\pi t}{3}}. \tag{80}$$

- Από το δεδομένο 4 προκύπτει ότι το σήμα με συντελεστές εκθετικής σειράς Fourier b_k, ας πούμε $y(t)$, είναι ένα μετατοπισμένο αντίγραφο του σήματος $x(-t)$, επειδή το τελευταίο σήμα αναγνωρίζουμε ότι έχει συντελεστές σειράς Fourier a_{-k}. Η καθυστέρηση είναι $t_0 = \frac{3}{2}$, επειδή

$$e^{-j k \omega_0 t_0} = e^{-j k \frac{2\pi}{6} \frac{3}{2}} = e^{-j \frac{\pi k}{2}}. \tag{81}$$

'Αρα $y(t) = x(-(t - \frac{3}{2})) = x(\frac{3}{2} - t)$. Επειδή η χρονική αναστροφή και η χρονική μετατόπιση δεν μπορούν να αλλάξουν την περιοδικότητα του σήματος, το δεδομένο 5 ισχύει και για το σήμα $x(\frac{3}{2} - t)$.

Παράδειγμα 4.6 (3)

- Επειδή υπάρχει αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ των συντελεστών a_k και b_k, οι μόνοι μη-μηδενικοί συντελεστές Fourier θα είναι οι b_1 και b_{-1}. Κατά συνέπεια η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει:

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2}. \tag{82}$$

- Το σήμα $y(t)$ είναι περιττής συμμετρίας, άρα $b_1 = -b_{-1}$ και b_1 είναι καθαρώς φανταστικοί αριθμοί. Άρα $b_1 = \pm\frac{j}{2}$. Οπότε

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{-j\frac{\pi}{2}} b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1 = \mp\frac{1}{2} \\ a_{-1} &= e^{j\frac{\pi}{2}} b_1 = jb_1 = \mp\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{83}$$

- Συνεπώς $x(t) = -\cos(\frac{\pi t}{3})$ ή $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{3})$.

Ιδιότητες της σειράς Fourier Σ.Χ.

Παράδειγμα 4.6 (3)

- Επειδή υπάρχει αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ των συντελεστών a_k και b_k, οι μόνοι μη-μηδενικοί συντελεστές Fourier θα είναι οι b_1 και b_{-1}. Κατά συνέπεια η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει:

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2}. \tag{82}$$

- Το σήμα $y(t)$ είναι περιττής συμμετρίας, άρα $b_1 = -b_{-1}$ και b_1 είναι καθαρώς φανταστικοί αριθμοί. ʼΑρα $b_1 = \pm\frac{j}{2}$. Οπότε

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{-j\frac{\pi}{2}} b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1 = \mp\frac{1}{2} \\ a_{-1} &= e^{j\frac{\pi}{2}} b_1 = jb_1 = \mp\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{83}$$

- Συνεπώς $x(t) = -\cos(\frac{\pi t}{3})$ ή $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{3})$.

Παράδειγμα 4.6 (3)

- Επειδή υπάρχει αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ των συντελεστών a_k και b_k, οι μόνοι μη-μηδενικοί συντελεστές Fourier θα είναι οι b_1 και b_{-1}. Κατά συνέπεια η ταυτότητα του Parseval επιτάσσει:

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2}. \tag{82}$$

- Το σήμα $y(t)$ είναι περιττής συμμετρίας, άρα $b_1 = -b_{-1}$ και b_1 είναι καθαρώς φανταστικοί αριθμοί. ΄Αρα $b_1 = \pm\frac{j}{2}$. Οπότε

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{-j\frac{\pi}{2}} b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1 = \mp\frac{1}{2} \\ a_{-1} &= e^{j\frac{\pi}{2}} b_1 = jb_1 = \mp\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{83}$$

- Συνεπώς $x(t) = -\cos(\frac{\pi t}{3})$ ή $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{3})$.

Απόκριση συχνότητας (1)

- Είδαμε ότι αν διεγείρουμε ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με είσοδο $x(t) = e^{st}$, τότε η απόκριση του είναι $y(t) = H(s)\, e^{st}$ όπου

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\,\tau}\, d\tau, \quad s \in \mathbb{C} \tag{84}$$

  και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος.

- Στην ειδικότερη περίπτωση $\mathrm{Re}\{s\} = 0$, δηλαδή $x(t) = e^{j\omega t}$, έχουμε ένα φανταστικό εκθετικό στη συχνότητα ω.
- Η (84) εξειδικεύεται σε

$$H(j\,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\,\omega\, t}\, dt \tag{85}$$

  και ονομάζεται απόκριση συχνότητας (frequency response).

Απόκριση συχνότητας (1)

- Είδαμε ότι αν διεγείρουμε ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με είσοδο $x(t) = e^{st}$, τότε η απόκριση του είναι $y(t) = H(s)\, e^{st}$ όπου

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau, \quad s \in \mathbb{C} \tag{84}$$

  και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος.
- Στην ειδικότερη περίπτωση $\mathrm{Re}\{s\} = 0$, δηλαδή $x(t) = e^{j\omega t}$, έχουμε ένα φανταστικό εκθετικό στη συχνότητα ω.
- Η (84) εξειδικεύεται σε

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{85}$$

  και ονομάζεται απόκριση συχνότητας (frequency response).

Απόκριση συχνότητας (1)

- Είδαμε ότι αν διεγείρουμε ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με είσοδο $x(t) = e^{st}$, τότε η απόκριση του είναι $y(t) = H(s)\, e^{st}$ όπου

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\,\tau}\, d\tau, \quad s \in \mathbb{C} \tag{84}$$

  και $h(t)$ είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος.
- Στην ειδικότερη περίπτωση $\mathrm{Re}\{s\} = 0$, δηλαδή $x(t) = e^{j\omega t}$, έχουμε ένα φανταστικό εκθετικό στη συχνότητα ω.
- Η (84) εξειδικεύεται σε

$$H(j\,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\,\omega\, t}\, dt \tag{85}$$

  και ονομάζεται απόκριση συχνότητας (frequency response).

Απόκριση συχνότητας (2)

- Αν ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ διεγείρεται από ένα περιοδικό σήμα με αναπαράσταση σειράς Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{j\, k\, \omega_0\, t}$, τότε η απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, H(j\, k\, \omega_0)\, e^{j\, k\, \omega_0\, t}. \tag{86}$$

- Συνάγουμε ότι $y(t)$ είναι επίσης περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο ίδια μ' εκείνη του $x(t)$. Οι συντελεστές της σειράς Fourier της απόκρισης (86) είναι $a_k\, H(j\, k\, \omega_0)$.
- Επομένως το Γ.Χ.Α. σύστημα επιφέρει τροποποίηση καθενός συντελεστή της σειράς Fourier της διεγέρσεως ξεχωριστά πολλαπλασιάζοντάς τον με την τιμή της απόκρισης συχνότητας στη συγκεκριμένη συχνότητα (δηλαδή αρμονική).

Απόκριση συχνότητας (2)

- Αν ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ διεγείρεται από ένα περιοδικό σήμα με αναπαράσταση σειράς Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{j\,k\,\omega_0\,t}$, τότε η απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, H(j\,k\,\omega_0) \, e^{j\,k\,\omega_0\,t}. \tag{86}$$

- Συνάγουμε ότι $y(t)$ είναι επίσης περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο ίδια μ' εκείνη του $x(t)$. Οι συντελεστές της σειράς Fourier της απόκρισης (86) είναι $a_k \, H(j\,k\,\omega_0)$.
- Επομένως το Γ.Χ.Α. σύστημα επιφέρει τροποποίηση καθενός συντελεστή της σειράς Fourier της διεγέρσεως ξεχωριστά πολλαπλασιάζοντάς τον με την τιμή της απόκρισης συχνότητας στη συγκεκριμένη συχνότητα (δηλαδή αρμονική).

Απόκριση συχνότητας (2)

- Αν ένα Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ διεγείρεται από ένα περιοδικό σήμα με αναπαράσταση σειράς Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{j\,k\,\omega_0\,t}$, τότε η απόκριση του συστήματος θα είναι

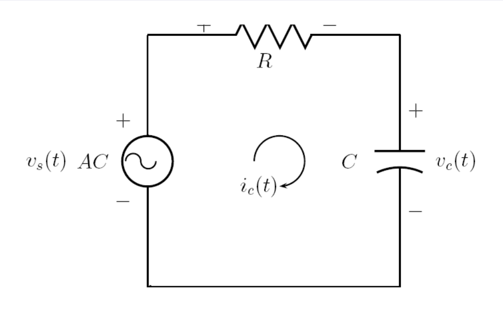
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, H(j\,k\,\omega_0)\, e^{j\,k\,\omega_0\,t}. \tag{86}$$

- Συνάγουμε ότι $y(t)$ είναι επίσης περιοδικό σήμα με θεμελιώδη περίοδο ίδια μ᾽ εκείνη του $x(t)$. Οι συντελεστές της σειράς Fourier της απόκρισης (86) είναι $a_k\, H(j\,k\,\omega_0)$.
- Επομένως το Γ.Χ.Α. σύστημα επιφέρει τροποποίηση καθενός συντελεστή της σειράς Fourier της διεγέρσεως ξεχωριστά πολλαπλασιάζοντάς τον με την τιμή της απόκρισης συχνότητας στη συγκεκριμένη συχνότητα (δηλαδή αρμονική).

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

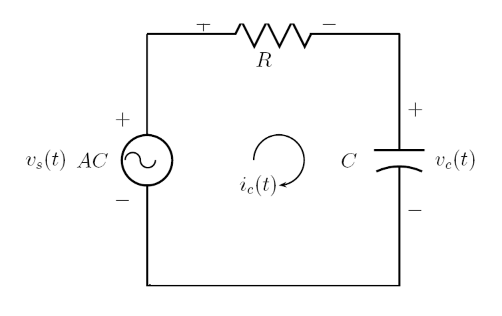
Φίλτρα επιλεκτικά συχνοτήτων

- Περιγράφονται από μια πρωτοβάθμια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και υλοποιούνται π.χ. με πρωτοβάθμια ηλεκτρικά κυκλώματα RC.
- Αποδίδουν στην έξοδό τους (δηλαδή, περνούν) σχεδόν αλώβητες τις χαμηλές ή υψηλές συχνότητες της διεγέρσεως.



Φίλτρα επιλεκτικά συχνοτήτων

- Περιγράφονται από μια πρωτοβάθμια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και υλοποιούνται π.χ. με πρωτοβάθμια ηλεκτρικά κυκλώματα RC.
- Αποδίδουν στην έξοδό τους (δηλαδή, περνούν) σχεδόν αλώβητες τις χαμηλές ή υψηλές συχνότητες της διεγέρσεως.



Κατωδιαβατό φίλτρο (1)

- Έστω $v_s(t)$ η τάση της πηγής που διεγείρει το κύκλωμα. Ας επιλέξουμε ως απόκριση του κυκλώματος RC την τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_c(t)$.
- Απλή εφαρμογή του νόμου πτώσης τάσεων του Kirchoff οδηγεί στην

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\, d\tau + R\, i_c(t) = v_s(t) \tag{87}$$

  όπου το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή σχετίζεται με την τάση στα άκρα του πυκνωτή δια της

$$i_c(t) = C\,\frac{dv_c(t)}{dt}. \tag{88}$$

- Αντικαθιστώντας την (88) στην (87) προκύπτει η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα:

$$RC\,\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t). \tag{89}$$

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

Κατωδιαβατό φίλτρο (1)

- Έστω $v_s(t)$ η τάση της πηγής που διεγείρει το κύκλωμα. Ας επιλέξουμε ως απόκριση του κυκλώματος RC την τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_c(t)$.
- Απλή εφαρμογή του νόμου πτώσης τάσεων του Kirchoff οδηγεί στην

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\, d\tau + R\, i_c(t) = v_s(t) \tag{87}$$

όπου το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή σχετίζεται με την τάση στα άκρα του πυκνωτή δια της

$$i_c(t) = C\,\frac{dv_c(t)}{dt}. \tag{88}$$

- Αντικαθιστώντας την (88) στην (87) προκύπτει η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα:

$$RC\,\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t). \tag{89}$$

Κατωδιαβατό φίλτρο (1)

- Έστω $v_s(t)$ η τάση της πηγής που διεγείρει το κύκλωμα. Ας επιλέξουμε ως απόκριση του κυκλώματος RC την τάση στα άκρα του πυκνωτή $v_c(t)$.
- Απλή εφαρμογή του νόμου πτώσης τάσεων του Kirchoff οδηγεί στην

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)\, d\tau + R\, i_c(t) = v_s(t) \tag{87}$$

όπου το ρεύμα που διαρρέει τον πυκνωτή σχετίζεται με την τάση στα άκρα του πυκνωτή δια της

$$i_c(t) = C\,\frac{dv_c(t)}{dt}. \tag{88}$$

- Αντικαθιστώντας την (88) στην (87) προκύπτει η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το κύκλωμα:

$$RC\,\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t). \tag{89}$$

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

Κατωδιαβατό φίλτρο (2)

- Υποθέτουμε ότι επιβάλλεται μια καθαρώς ημιτονοειδής διέγερση στο κύκλωμα $v_s(t) = e^{j\,\omega\,t}$. Τότε η απόκριση είναι $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\,\omega\,t}$
- οπότε αντικαθιστώντας στην (89) προκύπτει

$$RC\,j\omega\,H(j\omega)\,e^{j\,\omega\,t} + H(j\omega)\,e^{j\,\omega\,t} = e^{j\,\omega\,t} \tag{90}$$

  και

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC\,j\omega} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{R + \frac{1}{j\,\omega\,C}}. \tag{91}$$

- Η απόκριση συχνότητας δεν είναι τίποτε άλλο το λόγο της σύνθετης αντίστασης του πυκνωτή προς τη σύνθετη αντίσταση της συνδεσμολογίας της αντίστασης και του πυκνωτή σε σειρά.

Κατωδιαβατό φίλτρο (2)

- Υποθέτουμε ότι επιβάλλεται μια καθαρώς ημιτονοειδής διέγερση στο κύκλωμα $v_s(t) = e^{j\,\omega\,t}$. Τότε η απόκριση είναι $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\,\omega\,t}$
- οπότε αντικαθιστώντας στην (89) προκύπτει

$$RC\,j\omega\,H(j\omega)\,e^{j\,\omega\,t} + H(j\omega)\,e^{j\,\omega\,t} = e^{j\,\omega\,t} \tag{90}$$

και

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC\,j\omega} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{R + \frac{1}{j\,\omega\,C}}. \tag{91}$$

- Η απόκριση συχνότητας δεν είναι τίποτε άλλο το λόγο της σύνθετης αντίστασης του πυκνωτή προς τη σύνθετη αντίσταση της συνδεσμολογίας της αντίστασης και του πυκνωτή σε σειρά.

Κατωδιαβατό φίλτρο (2)

- Υποθέτουμε ότι επιβάλλεται μια καθαρώς ημιτονοειδής διέγερση στο κύκλωμα $v_s(t) = e^{j\,\omega\,t}$. Τότε η απόκριση είναι $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\,\omega\,t}$
- οπότε αντικαθιστώντας στην (89) προκύπτει

$$RC\,j\omega\,H(j\omega)\,e^{j\,\omega\,t} + H(j\omega)\,e^{j\,\omega\,t} = e^{j\,\omega\,t} \tag{90}$$

και

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC\,j\omega} = \frac{\frac{1}{j\,\omega\,C}}{R + \frac{1}{j\,\omega\,C}}. \tag{91}$$

- Η απόκριση συχνότητας δεν είναι τίποτε άλλο το λόγο της σύνθετης αντίστασης του πυκνωτή προς τη σύνθετη αντίσταση της συνδεσμολογίας της αντίστασης και του πυκνωτή σε σειρά.

Κατωδιαβατό φίλτρο (3)

- Μέτρο απόκρισης συχνότητας $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$
- Φάση απόκρισης συχνότητας $\angle H(j\omega) = \arctan(-\omega R C)$
- Για $\omega \approx 0$ έχουμε $|H(j\omega)| \approx 1$, ενώ για μεγαλύτερες συχνότητες το μέτρο της απόκρισης συχνότητας φθίνει καθώς $|\omega|$ αυξάνεται. Άρα το φίλτρο αυτό επιτρέπει τη διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων, ενώ εξασθενίζει τις υψηλές συχνότητες. Λέμε ότι το απλό κύκλωμα RC είναι ένα μη-ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (lowpass filter).
- Για $\omega = \frac{1}{RC}$, $|H(j\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$. Επειδή $-20\log_{10}(\sqrt{2}) = -3$ (μετριέται σε decibel, dB) ονομάζουμε τη συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ συχνότητα αποκοπής 3 dB (cutoff frequency).
- Το διάστημα συχνοτήτων $\omega \in [0, \frac{1}{RC}]$ καλείται εύρος ζώνης (bandwidth).

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

Κατωδιαβατό φίλτρο (3)

- Μέτρο απόκρισης συχνότητας $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}$
- Φάση απόκρισης συχνότητας $\angle H(j\omega) = \arctan(-\omega\, R\, C)$
- Για $\omega \approx 0$ έχουμε $|H(j\omega)| \approx 1$, ενώ για μεγαλύτερες συχνότητες το μέτρο της απόκρισης συχνότητας φθίνει καθώς $|\omega|$ αυξάνεται. Άρα το φίλτρο αυτό επιτρέπει τη διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων, ενώ εξασθενίζει τις υψηλές συχνότητες. Λέμε ότι το απλό κύκλωμα RC είναι ένα μη-ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (lowpass filter).
- Για $\omega = \frac{1}{RC}$, $|H(j\,\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$. Επειδή $-20\log_{10}(\sqrt{2}) = -3$ (μετριέται σε decibel, dB) ονομάζουμε τη συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ συχνότητα αποκοπής 3 dB (cutoff frequency).
- Το διάστημα συχνοτήτων $\omega \in [0, \frac{1}{RC}]$ καλείται εύρος ζώνης (bandwidth).

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Κατωδιαβατό φίλτρο (3)

- Μέτρο απόκρισης συχνότητας $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$
- Φάση απόκρισης συχνότητας $\angle H(j\omega) = \arctan(-\omega R C)$
- Για $\omega \approx 0$ έχουμε $|H(j\omega)| \approx 1$, ενώ για μεγαλύτερες συχνότητες το μέτρο της απόκρισης συχνότητας φθίνει καθώς $|\omega|$ αυξάνεται. Άρα το φίλτρο αυτό επιτρέπει τη διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων, ενώ εξασθενίζει τις υψηλές συχνότητες. Λέμε ότι το απλό κύκλωμα RC είναι ένα μη-ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (lowpass filter).
- Για $\omega = \frac{1}{RC}$, $|H(j\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$. Επειδή $-20\log_{10}(\sqrt{2}) = -3$ (μετριέται σε decibel, dB) ονομάζουμε τη συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ συχνότητα αποκοπής 3 dB (cutoff frequency).
- Το διάστημα συχνοτήτων $\omega \in [0, \frac{1}{RC}]$ καλείται εύρος ζώνης (bandwidth).

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Κατωδιαβατό φίλτρο (3)

- Μέτρο απόκρισης συχνότητας $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}$
- Φάση απόκρισης συχνότητας $\angle H(j\omega) = \arctan(-\omega\, R\, C)$
- Για $\omega \approx 0$ έχουμε $|H(j\omega)| \approx 1$, ενώ για μεγαλύτερες συχνότητες το μέτρο της απόκρισης συχνότητας φθίνει καθώς $|\omega|$ αυξάνεται. Άρα το φίλτρο αυτό επιτρέπει τη διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων, ενώ εξασθενίζει τις υψηλές συχνότητες. Λέμε ότι το απλό κύκλωμα RC είναι ένα μη-ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (lowpass filter).
- Για $\omega = \frac{1}{RC}$, $|H(j\,\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$. Επειδή $-20\log_{10}(\sqrt{2}) = -3$ (μετριέται σε decibel, dB) ονομάζουμε τη συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ συχνότητα αποκοπής 3 dB (cutoff frequency).
- Το διάστημα συχνοτήτων $\omega \in [0, \frac{1}{RC}]$ καλείται εύρος ζώνης (bandwidth).

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Κατωδιαβατό φίλτρο (3)

- Μέτρο απόκρισης συχνότητας $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$
- Φάση απόκρισης συχνότητας $\angle H(j\omega) = \arctan(-\omega R C)$
- Για $\omega \approx 0$ έχουμε $|H(j\omega)| \approx 1$, ενώ για μεγαλύτερες συχνότητες το μέτρο της απόκρισης συχνότητας φθίνει καθώς $|\omega|$ αυξάνεται. Άρα το φίλτρο αυτό επιτρέπει τη διέλευση των χαμηλών συχνοτήτων, ενώ εξασθενίζει τις υψηλές συχνότητες. Λέμε ότι το απλό κύκλωμα RC είναι ένα μη-ιδανικό κατωδιαβατό φίλτρο (lowpass filter).
- Για $\omega = \frac{1}{RC}$, $|H(j\,\frac{1}{RC})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$. Επειδή $-20\log_{10}(\sqrt{2}) = -3$ (μετριέται σε decibel, dB) ονομάζουμε τη συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ συχνότητα αποκοπής 3 dB (cutoff frequency).
- Το διάστημα συχνοτήτων $\omega \in [0, \frac{1}{RC}]$ καλείται εύρος ζώνης (bandwidth).

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Κατωδιαβατό φίλτρο (4)

- Κρουστική απόκριση του κυκλώματος RC $h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$
- Βηματική απόκριση $s(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] u(t)$
- Το μέγεθος $\tau = RC$ λέγεται σταθερά χρόνου (time-constant). Παρατηρούμε ότι $h(0) = \frac{1}{\tau}$, $h(\tau) = \frac{1}{e} h(0) = \frac{1}{\tau e}$ και $s(\tau) = 1 - \frac{1}{e}$. Δηλαδή για $t = \tau$ η κρουστική απόκριση φθίνει στο $\frac{1}{e} = 36.78\%$ της τιμής της για $t = 0$.
- Αν θέλουμε το φίλτρο να περνά μόνο πολύ μικρές συχνότητες, τότε η συχνότητα αποκοπής θα πρέπει να μικρύνει ή ισοδύναμα η σταθερά χρόνου να αυξηθεί. Τότε το φίλτρο θα έχει μια πολύ στενή απόκριση συχνότητας, αλλά η κρουστική απόκριση θα αργεί να αποσβεστεί. Επομένως διαπιστώνεται μια σχέση αντιστροφής της διάρκειας στο χρόνο και του εύρους ζώνης στη συχνότητα.

Κρουστική και βηματική αποκρίσεις πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Κατωδιαβατό φίλτρο (4)

- Κρουστική απόκριση του κυκλώματος RC $h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$
- Βηματική απόκριση $s(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] u(t)$
- Το μέγεθος $\tau = RC$ λέγεται σταθερά χρόνου (time-constant). Παρατηρούμε ότι $h(0) = \frac{1}{\tau}$, $h(\tau) = \frac{1}{e}\, h(0) = \frac{1}{\tau\, e}$ και $s(\tau) = 1 - \frac{1}{e}$. Δηλαδή για $t = \tau$ η κρουστική απόκριση φθίνει στο $\frac{1}{e} = 36.78\%$ της τιμής της για $t = 0$.
- Αν θέλουμε το φίλτρο να περνά μόνο πολύ μικρές συχνότητες, τότε η συχνότητα αποκοπής θα πρέπει να μικρύνει ή ισοδύναμα η σταθερά χρόνου να αυξηθεί. Τότε το φίλτρο θα έχει μια πολύ στενή απόκριση συχνότητας, αλλά η κρουστική απόκριση θα αργεί να αποσβεστεί. Επομένως διαπιστώνεται μια σχέση αντιστροφής της διάρκειας στο χρόνο και του εύρους ζώνης στη συχνότητα.

Κρουστική και βηματική αποκρίσεις πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

Κατωδιαβατό φίλτρο (4)

- Κρουστική απόκριση του κυκλώματος RC $h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$
- Βηματική απόκριση $s(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] u(t)$
- Το μέγεθος $\tau = RC$ λέγεται σταθερά χρόνου (time-constant). Παρατηρούμε ότι $h(0) = \frac{1}{\tau}$, $h(\tau) = \frac{1}{e}\, h(0) = \frac{1}{\tau\, e}$ και $s(\tau) = 1 - \frac{1}{e}$. Δηλαδή για $t = \tau$ η κρουστική απόκριση φθίνει στο $\frac{1}{e} = 36.78\%$ της τιμής της για $t = 0$.
- Αν θέλουμε το φίλτρο να περνά μόνο πολύ μικρές συχνότητες, τότε η συχνότητα αποκοπής θα πρέπει να μικρύνει ή ισοδύναμα η σταθερά χρόνου να αυξηθεί. Τότε το φίλτρο θα έχει μια πολύ στενή απόκριση συχνότητας, αλλά η κρουστική απόκριση θα αργεί να αποσβεστεί. Επομένως διαπιστώνεται μια σχέση αντιστροφής της διάρκειας στο χρόνο και του εύρους ζώνης στη συχνότητα.

Κρουστική και βηματική αποκρίσεις πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Κατωδιαβατό φίλτρο (4)

- Κρουστική απόκριση του κυκλώματος RC $h(t) = \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$
- Βηματική απόκριση $s(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right] u(t)$
- Το μέγεθος $\tau = RC$ λέγεται σταθερά χρόνου (time-constant). Παρατηρούμε ότι $h(0) = \frac{1}{\tau}$, $h(\tau) = \frac{1}{e}\, h(0) = \frac{1}{\tau\, e}$ και $s(\tau) = 1 - \frac{1}{e}$. Δηλαδή για $t = \tau$ η κρουστική απόκριση φθίνει στο $\frac{1}{e} = 36.78\%$ της τιμής της για $t = 0$.
- Αν θέλουμε το φίλτρο να περνά μόνο πολύ μικρές συχνότητες, τότε η συχνότητα αποκοπής θα πρέπει να μικρύνει ή ισοδύναμα η σταθερά χρόνου να αυξηθεί. Τότε το φίλτρο θα έχει μια πολύ στενή απόκριση συχνότητας, αλλά η κρουστική απόκριση θα αργεί να αποσβεστεί. Επομένως διαπιστώνεται μια σχέση αντιστροφής της διάρκειας στο χρόνο και του εύρους ζώνης στη συχνότητα.

Κρουστική και βηματική αποκρίσεις πρωτοβάθμιου κατωδιαβατού φίλτρου RC

Ανωδιαβατό φίλτρο (1)

- Ας θεωρήσουμε ως απόκριση του κυκλώματος RC την τάση στα άκρα της αντίστασης. Τότε επειδή $v_r(t) = R\, i_c(t)$ ξαναγράφουμε την (87)

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}\frac{v_r(t)}{R}\,d\tau + v_r(t) = v_s(t) \tag{92}$$

και παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της (92) προκύπτει η πρωτοβάθμια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$RC\,\frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC\,\frac{dv_s(t)}{dt}. \tag{93}$$

- Η απόκριση θα είναι πάλι της μορφής $v_r(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$, οπότε η απόκριση συχνότητας του συστήματος θα είναι

$$G(j\omega) = \frac{j\omega\,RC}{1 + jRC\,\omega}. \tag{94}$$

Ανωδιαβατό φίλτρο (1)

- Ας θεωρήσουμε ως απόκριση του κυκλώματος RC την τάση στα άκρα της αντίστασης. Τότε επειδή $v_r(t) = R\, i_c(t)$ ξαναγράφουμε την (87)

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} \frac{v_r(t)}{R}\, d\tau + v_r(t) = v_s(t) \tag{92}$$

και παραγωγίζοντας αμφότερα τα μέλη της (92) προκύπτει η πρωτοβάθμια διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$RC\,\frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC\,\frac{dv_s(t)}{dt}. \tag{93}$$

- Η απόκριση θα είναι πάλι της μορφής $v_r(t) = G(j\omega)e^{j\,\omega\,t}$, οπότε η απόκριση συχνότητας του συστήματος θα είναι

$$G(j\omega) = \frac{j\omega\, RC}{1 + jRC\,\omega}. \tag{94}$$

Ανωδιαβατό φίλτρο (2)

- Μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|G(j\omega)| = \frac{\omega\, RC}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}$
- Φάση της απόκρισης συχνότητας $\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\, R\, C}\right)$
- Το σύστημα εξασθενίζει τις χαμηλές συχνότητες, ενώ επιτρέπει τη διέλευση των υψηλών συχνοτήτων χωρίς σημαντική απόσβεση. Λέμε ότι πρόκειται για ένα μη-ιδανικό ανωδιαβατό φίλτρο (highpass filter).
- Και στην περίπτωση αυτή η συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ ονομάζεται συχνότητα αποκοπής 3 dB.
- Η ζώνη διελεύσεως του φίλτρου είναι $\omega \in [\frac{1}{RC}, \infty)$.

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Ανωδιαβατό φίλτρο (2)

- Μέτρο της απόκρισης συχνότητας $\left|G(j\omega)\right| = \frac{\omega\, RC}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}$
- Φάση της απόκρισης συχνότητας $\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\, R\, C}\right)$
- Το σύστημα εξασθενίζει τις χαμηλές συχνότητες, ενώ επιτρέπει τη διέλευση των υψηλών συχνοτήτων χωρίς σημαντική απόσβεση. Λέμε ότι πρόκειται για ένα μη-ιδανικό ανωδιαβατό φίλτρο (highpass filter).
- Και στην περίπτωση αυτή η συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ ονομάζεται συχνότητα αποκοπής 3 dB.
- Η ζώνη διελεύσεως του φίλτρου είναι $\omega \in [\frac{1}{RC}, \infty)$.

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Ανωδιαβατό φίλτρο (2)

- Μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|G(j\omega)| = \frac{\omega\, RC}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}$
- Φάση της απόκρισης συχνότητας $\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\, R\, C}\right)$
- Το σύστημα εξασθενίζει τις χαμηλές συχνότητες, ενώ επιτρέπει τη διέλευση των υψηλών συχνοτήτων χωρίς σημαντική απόσβεση. Λέμε ότι πρόκειται για ένα μη-ιδανικό ανωδιαβατό φίλτρο (highpass filter).
- Και στην περίπτωση αυτή η συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ ονομάζεται συχνότητα αποκοπής 3 dB.
- Η ζώνη διελεύσεως του φίλτρου είναι $\omega \in [\frac{1}{RC}, \infty)$.

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

Ανωδιαβατό φίλτρο (2)

- Μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|G(j\omega)| = \frac{\omega\, RC}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}$
- Φάση της απόκρισης συχνότητας $\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\, R\, C}\right)$
- Το σύστημα εξασθενίζει τις χαμηλές συχνότητες, ενώ επιτρέπει τη διέλευση των υψηλών συχνοτήτων χωρίς σημαντική απόσβεση. Λέμε ότι πρόκειται για ένα μη-ιδανικό ανωδιαβατό φίλτρο (highpass filter).
- Και στην περίπτωση αυτή η συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ ονομάζεται συχνότητα αποκοπής 3 dB.
- Η ζώνη διελεύσεως του φίλτρου είναι $\omega \in [\frac{1}{RC}, \infty)$.

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Ανωδιαβατό φίλτρο (2)

- Μέτρο της απόκρισης συχνότητας $|G(j\omega)| = \frac{\omega\, RC}{\sqrt{1+\omega^2\, R^2\, C^2}}$
- Φάση της απόκρισης συχνότητας $\angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega\, R\, C}\right)$
- Το σύστημα εξασθενίζει τις χαμηλές συχνότητες, ενώ επιτρέπει τη διέλευση των υψηλών συχνοτήτων χωρίς σημαντική απόσβεση. Λέμε ότι πρόκειται για ένα μη-ιδανικό ανωδιαβατό φίλτρο (highpass filter).
- Και στην περίπτωση αυτή η συχνότητα $\omega = \frac{1}{RC}$ ονομάζεται συχνότητα αποκοπής 3 dB.
- Η ζώνη διελεύσεως του φίλτρου είναι $\omega \in [\frac{1}{RC}, \infty)$.

Απόκριση συχνότητας πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Σειρά Fourier και Γ.Χ.Α. συστήματα

Ανωδιαβατό φίλτρο (3)

- Βηματική απόκριση του ανωδιαβατού φίλτρου $s_{HP}(t) = u(t) - s(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$, όπου $s(t)$ είναι η βηματική απόκρισή του κατωδιαβατού φίλτρου.
- Η κρουστική απόκριση του ανωδιαβατού φίλτρου μπορεί να βρεθεί διαφορίζοντας τη βηματική απόκρισή του, οπότε παίρνουμε:

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t). \qquad (95)$$

- Για το ανωδιαβατό φίλτρο η σταθερά χρόνου είναι $\tau = RC$.

Βηματική απόκριση πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Ανωδιαβατό φίλτρο (3)

- Βηματική απόκριση του ανωδιαβατού φίλτρου $s_{HP}(t) = u(t) - s(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$, όπου $s(t)$ είναι η βηματική απόκρισή του κατωδιαβατού φίλτρου.
- Η κρουστική απόκριση του ανωδιαβατού φίλτρου μπορεί να βρεθεί διαφορίζοντας τη βηματική απόκρισή του, οπότε παίρνουμε:

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t). \tag{95}$$

- Για το ανωδιαβατό φίλτρο η σταθερά χρόνου είναι $\tau = RC$.

Βηματική απόκριση πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Ανωδιαβατό φίλτρο (3)

- Βηματική απόκριση του ανωδιαβατού φίλτρου $s_{HP}(t) = u(t) - s(t) = e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t)$, όπου $s(t)$ είναι η βηματική απόκρισή του κατωδιαβατού φίλτρου.
- Η κρουστική απόκριση του ανωδιαβατού φίλτρου μπορεί να βρεθεί διαφορίζοντας τη βηματική απόκρισή του, οπότε παίρνουμε:

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, u(t). \tag{95}$$

- Για το ανωδιαβατό φίλτρο η σταθερά χρόνου είναι $\tau = RC$.

Βηματική απόκριση πρωτοβάθμιου ανωδιαβατού φίλτρου RC

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης