



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

## **Σήματα-Συστήματα**

### **Μετασχηματισμός Laplace - Άλυτα προβλήματα**

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος

Τμήμα Πληροφορικής

## Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



# Κεφάλαιο 6

## Μετασχηματισμός Laplace

### 6.8 Άλυτα προβλήματα

1. Σας δίνονται τα εξής έξι στοιχεία για το πραγματικό σήμα  $x(t)$  με μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$ :

1. Ο  $X(s)$  έχει ακριβώς δύο μιγαδικούς πόλους.
2. Ο  $X(s)$  έχει ένα πραγματικό μηδενικό στο (πεπερασμένο)  $s$ -επίπεδο.
3. Ο  $X(s)$  έχει έναν πόλο για  $s = -1 - j$ .
4.  $X(0) = 6$ .
5. Αν το σήμα  $x(t)$  διεγείρει σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(t) = \exp(-3t)u(t)$ , τότε παράγεται σήμα  $y(t)$  με μετασχηματισμό Laplace,  $Y(s)$ , που διατηρεί μόνο τους δύο πόλους του  $X(s)$ .
6. Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $x(t)$  υπάρχει.

Να βρείτε το  $X(s)$  και να προσδιορίσετε την περιοχή σύγκλισής του. (Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 2003)

2. Έστω  $H(s)$  συνάρτηση συστήματος με πόλους για  $s = -2, -1, 1$  και μηδενικό για  $s = 2$ . Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές περιοχές σύγκλισης για τις προηγούμενες τιμές πόλων και

μηδενικών. Για κάθε περιοχή σύγκλισης να υποδείξετε αν το αντίστοιχο σύστημα είναι ευσταθές και (ή) αιτιατό.

3. (α) Να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$  και να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών όπου να οριοθετήσετε την περιοχή σύγκλισης για τα ακόλουθα σήματα:

$$1. x(t) = e^{-3t} u(t) + e^{-4t} u(t)$$

$$2. x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{3t} u(-t)$$

$$3. x(t) = e^{3t} u(t) + e^{-2t} u(-t).$$

(β) Να αντιστρέψετε το μετασχηματισμό Laplace

$$X(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)(s + 5)^2} \quad \text{Re}\{s\} > -3.$$

(Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2001)

4. Έστω

$$g(t) = x(t) + \alpha x(-t)$$

όπου

$$x(t) = \beta e^{-t} u(t).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του  $g(t)$  είναι

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 1} \quad -1 < \text{Re}(s) < 1.$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών  $\alpha$  και  $\beta$ . (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2001)

5. Ένα αιτιατό Γραμμικό Χρονοαμετάβλητο Σύστημα  $\mathcal{S}$  με κρουστική απόκριση  $h(t)$  χαρακτηρίζεται από τη σχέση μεταξύ της εισόδου  $x(t)$  και της εξόδου  $y(t)$  που περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + (1 + \alpha) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha(1 + \alpha) \frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = x(t).$$

(α) Αν

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(t)$$

πόσους πόλους έχει ο μετασχηματισμός Laplace  $G(s)$  του  $g(t)$ ;

(β) Για ποιές πραγματικές τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  είναι το σύστημα  $\mathcal{S}$  ευσταθές; (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2000)

6. Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο  $x(t) = e^{-t} u(t)$  και κρουστική απόκριση  $h(t) = e^{-2t} u(t)$ .

(i) Να προσδιορίσετε τους μετασχηματισμούς Laplace των σημάτων  $x(t)$  και  $h(t)$ .

(ii) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης, να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$  της εξόδου  $y(t)$ .

(iii) Να αντιστρέψετε το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$  για να βρείτε το σήμα  $y(t)$ .

(iv) Να επαληθεύσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (iii) υπολογίζοντας απευθείας το ολοκλήρωμα της συνέλιξης. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2000)

7. Θεωρήστε δύο σήματα δεξιάς πλευράς  $x(t)$  και  $y(t)$  που σχετίζονται δια των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2y(t) + \delta(t) \\ \frac{dy}{dt} &= 2x(t)\end{aligned}$$

Να προσδιορίσετε τους μετασχηματισμούς Laplace  $X(s)$  και  $Y(s)$  καθώς και τις περιοχές σύγκλισής των.

Υπόδειξη: Να θεωρήσετε ότι  $x(0^-) = y(0^-) = 0$ . (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 1999)

8. (α) Η οικογένεια συστημάτων συνεχούς χρόνου που είναι γνωστή ως συστήματα ελάχιστης φάσης (minimum-phase) είναι το σύνολο εκείνων των συστημάτων των οποίων τα αντίστροφα συστήματα είναι αιτιατά και ευσταθή. Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ορισμό να επιχειρηματολογήσετε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος ελάχιστης φάσης πρέπει να κείτονται στο αριστερό  $s$ -ημιεπίπεδο, δηλαδή,  $\text{Re}(s) < 0$ .

(β) Να προσδιορίσετε εάν αληθεύει ή όχι καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις που αφορούν γραμμικά χρονοαμετάβλητα συστήματα. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(i) Ένα ευσταθές σύστημα συνεχούς χρόνου πρέπει να έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό  $s$ -ημιεπίπεδο.

(ii) Αν η συνάρτηση συστήματος έχει περισσότερους πόλους από μηδενικά και το σύστημα είναι αιτιατό, τότε η βηματική απόκριση θα είναι συνεχής για  $t = 0$ .

- (iii) Αν η συνάρτηση συστήματος έχει περισσότερους πόλους από μηδενικά και το σύστημα δεν περιορίζεται να είναι αιτιατό, τότε η βηματική απόκριση ενδέχεται να είναι ασυνεχής για  $t = 0$ .
- (iv) Ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα πρέπει να έχει όλους τους πόλους και τα μηδενικά του στο αριστερό  $s$ -ημιεπίπεδο.

(Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 1999)

9. Έστω γραμμικό χρονοαμετάβλητο σύστημα με χρουστική απόκριση  $h(t)$  το οποίο διεγείρεται με σήμα  $x(t)$  του οποίου ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$X(s) = \frac{s+2}{s-2}.$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι  $x(t) = 0$  για  $t > 0$ . Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t).$$

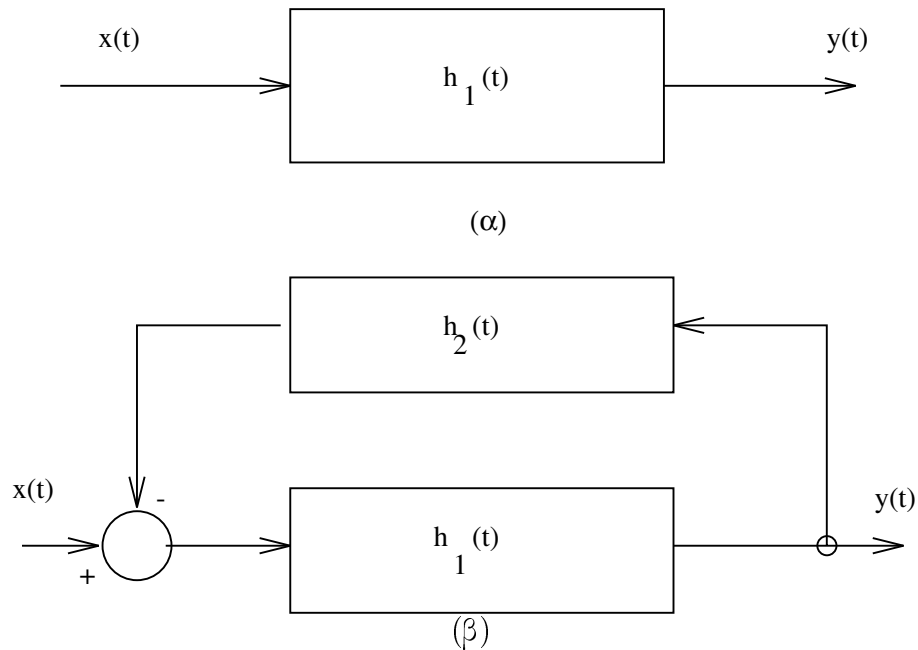
- (α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς και την περιοχή σύγκλισής της.
- (β) Να προσδιορίσετε την χρουστική απόκριση.
- (γ) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  που βρήκατε στο ερώτημα (α), να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος  $y(t)$  σε διέγερση

$$x(t) = \exp(3t)$$

χωρίς αναλυτικούς υπολογισμούς μετασχηματισμών ή συνελίξεων. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 1998)

10. Δίνεται το γραμμικό σύστημα του Σχήματος 6.8.10(α), όπου  $h_1(t) = \exp(-2t)u(t)$ .

- (α) Να υπολογιστούν οι  $H_1(s)$ ,  $H_1(\omega)$ , οι πόλοι και τα μηδενικά της  $H_1(s)$ .
- (β) Να υπολογιστούν και να σχεδιαστούν οι έξοδοι  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  για τις εισόδους  $x_1(t) = \delta(t)$  και  $x_2(t) = u(t)$ , αντιστοίχως.
- (γ) Το σύστημα του Σχήματος 6.8.10(α) τροποποιείται με την πρόσθεση του συστήματος  $h_2(t) = K\delta(t)$ , όπως δείχνεται στο Σχήμα 6.8.10(β). Να υπολογιστούν οι  $H(s)$ ,  $H(\omega)$  καθώς και οι πόλοι και τα μηδενικά της  $H(s)$ . (Θέμα εξετάσεων Ιανουαρίου 1998)



Σχήμα 6.8.10: Γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου του 10ου προβλήματος.

11. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Laplace να υπολογίσετε την έξοδο  $y(t)$  ενός γραμμικού χρονοαμετάβλητου συστήματος με κρουστική απόκριση  $h(t) = e^{2t} u(-t)$ , όταν εφαρμόζεται στην είσοδο σήμα  $x(t) = e^{-2t} u(t)$ . Με ποιόν άλλο τρόπο θα μπορούσε να υπολογιστεί η έξοδος; Να χαρακτηρίσετε το σύστημα ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα. (Θέμα εξετάσεων Σεπτεμβρίου 2009)

12. Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με είσοδο  $x(t) = e^{-t} u(t)$  και κρουστική απόκριση  $h(t) = e^{-3t} u(t)$ .

- (i) Να προσδιορίσετε τους μετασχηματισμούς Laplace των σημάτων  $x(t)$  και  $h(t)$ .
- (ii) Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης, να προσδιορίσετε το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$  της εξόδου  $y(t)$ .
- (iii) Να αντιστρέψετε το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$  για να βρείτε το σήμα  $y(t)$ .
- (iv) Να επαληθεύσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (iii) υπολογίζοντας απευθείας το ολο-

κλήρωμα της συνέλιξης. (Θέμα εξετάσεων Φεβρουαρίου 2008)

13. Έστω γραμμικό χρονοαμετάβλητο σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(t)$  το οποίο διεγείρεται με σήμα  $x(t)$  του οποίου ο μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$X(s) = \frac{s+3}{s-3}.$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι  $x(t) = 0$  για  $t > 0$ . Η έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(t) = -\frac{3}{4}e^{3t}u(-t) + \frac{1}{4}e^{-t}u(t).$$

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μεταφοράς και την περιοχή σύγκλισής της.

(β) Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση.

(γ) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση μεταφοράς  $H(s)$  που βρήκατε στο ερώτημα (α), να προσδιορίσετε την έξοδο του συστήματος  $y(t)$  σε διέγερση

$$x(t) = \exp(4t)$$

χωρίς αναλυτικούς υπολογισμούς μετασχηματισμών ή συνέλιξεων. (Θέμα εξετάσεων Ιουνίου 2005)

14. Να θεωρήσετε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(t)$  και συνάρτηση συστήματος  $H(s)$ . Υποθέστε ότι  $H(s)$  είναι ρητή, περιέχει πόλο για  $s = -2$  και δεν έχει μηδενικό για  $s = 0$ . Η θέση των άλλων πόλων και μηδενικών είναι άγνωστη. Για καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις να εξετάσετε αν μπορείτε μετά λόγω γνώσεως να προσδιορίσετε αν είναι αληθής, ψευδής ή αδυνατείτε να επαληθεύσετε το κύρος της λόγω ανεπαρκούς πληροφορίας:

(α) Ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος  $h(t)e^{3t}$ ,  $\mathcal{F}\{h(t)e^{3t}\}$ , συγκλίνει.

(β) Ισχύει  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 0$ .

(γ) Το σήμα  $th(t)$  μπορεί να είναι κρουστική απόκριση ενός αιτιατού και ευσταθούς συστήματος.

(δ) Ο μετασχηματισμός Laplace του  $\frac{dh(t)}{dt}$  περιέχει τουλάχιστον ένα πόλο.

(ε) Η  $h(t)$  είναι πεπερασμένης διάρκειας.

(στ) Ισχύει  $H(s) = H(-s)$ .



(ζ) Ισχύει  $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 2$ .

15. Αν ισχύει

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > \operatorname{Re}\{-a\}$$

να προσδιορίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της παράστασης

$$X(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+7s+12}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -3.$$

16. Να χρησιμοποιήσετε τη γεωμετρική πληροφορία από το διάγραμμα πόλων-μηδενικών για να προσδιορίσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier του σήματος του οποίου ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$X(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > -\frac{1}{2}.$$

17. Ένα αιτιατό Γ.Χ.Α. σύστημα με κρουστική απόκριση  $h(t)$  έχει τις εξής ιδιότητες

1. Όταν η είσοδος στο σύστημα είναι  $x(t) = e^{2t}$ ,  $\forall t$ , η έξοδος είναι  $y(t) = \frac{1}{6}e^{2t}$ ,  $\forall t$ .

2. Η κρουστική απόκριση ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t} u(t) + b u(t)$$

όπου  $b$  μια άγνωστη σταθερά.

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση συστήματος  $H(s)$ . Στην απάντησή σας δεν πρέπει να υπάρχουν άγνωστες σταθερές.

18. Η συνάρτηση συστήματος ενός αιτιατού Γ.Χ.Α. συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}.$$

Να προσδιορίσετε και να σχεδιάσετε την έξοδο  $y(t)$  όταν η είσοδος είναι  $x(t) = e^{|t|}$ .

19. Έστω  $H(s)$  η συνάρτηση συστήματος για ένα αιτιατό και ευσταθές σύστημα. Η είσοδος στο σύστημα είναι ένα άθροισμα τριών όρων εκ των οποίων ο πρώτος είναι  $\delta(t)$  και ένας άλλος ένα μιγαδικό εκθετικό  $e^{s_0 t}$  όπου  $s_0$  είναι μια μιγαδική σταθερά. Η έξοδος είναι

$$y(t) = -6e^{-t} u(t) + \frac{8}{34} e^{4t} \cos 3t + \frac{36}{34} e^{4t} \sin 3t + \delta(t).$$

Να προσδιορίσετε την  $H(s)$ .

20. Στις υπεραστικές τηλεφωνικές κλήσεις πολλές φορές συναντούμε ηχώ λόγω ανάκλασης του μεταδιδόμενου σήματος από το δέκτη με αποτέλεσμα μια 'επιστροφή' να διαδίδεται προς τα πίσω, η οποία στη συνέχεια ανακλάται στον πομπό και επιστρέφει στο δέκτη. Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος που μοντελοποιεί το φαινόμενο αυτό είναι  $h(t) = a\delta(t-T) + a^3\delta(t-3T)$ . Η παράμετρος  $T$  αντιστοιχεί στο χρόνο μετάδοσης μονής κατεύθυνσης κατά μήκος του τηλεπικοινωνιακού διαύλου και η παράμετρος  $a$  αντιστοιχεί στην εξασθένιση πλάτους μεταξύ πομπού και δέκτη.

(α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση συστήματος  $H(s)$  μαζί με την περιοχή σύγκλισης του συστήματος.

(β) Παρατηρήστε στην απάντησή σας στο ερώτημα (α) ότι η συνάρτηση συστήματος δεν είναι ρητή. Παρ' όλα αυτά είναι χρήσιμο να προσδιοριστούν οι πόλοι και τα μηδενικά της  $H(s)$  σύμφωνα με τον ορισμό. Δηλαδή, ότι μηδενικά είναι οι τιμές του  $s$  για τις οποίες  $H(s) = 0$  και πόλοι είναι οι τιμές του  $s$  για τις οποίες  $\frac{1}{H(s)} = 0$ . Για τη συνάρτηση συστήματος που βρέθηκε στο ερώτημα (α) να προσδιορίσετε τα μηδενικά και να δείξετε ότι δεν υπάρχουν πόλοι.

(γ) Από τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β) να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών για το  $H(s)$ .

(δ) Θεωρώντας τα κατάλληλα διανύσματα στο  $s$ -επίπεδο, να σχεδιάσετε το μέτρο της απόκρισης συχνότητας του συστήματος.