Αριστοτέλειο
Πανεπιστήμιο
Θεσσαλονίκης

Σήματα-Συστήματα
Μετασχηματισμός Laplace - Λυμένες ασκήσεις

Κωνσταντίνος Κοτρόπουλος
Τμήμα Πληροφορικής

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Θεσσαλονίκη, Ιούνιος 2013

Κεφάλαιο 6

Μετασχηματισμός Laplace

6.7 Λυμένες ασκήσεις

6.7.1. Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace των σημάτων $(2e^{-t}+t)u(t)$, $u(t-2)$ και $e^{-t}u(1-t)$.

Λύση:

- Για το σήμα $(2e^{-t}+t)u(t)$ ο δίπλευρος και ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace ταυτίζονται:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(2e^{-t}+t)u(t)\} &= \mathcal{L}\{2e^{-t}\,u(t)\}+\mathcal{L}\{t\,u(t)\}\\ &= \frac{2}{s+1}+\frac{1}{s^2}=\frac{2s^2+s+1}{s^2(s+1)}, \quad \mathrm{Re}\{s\}>0. \qquad (6.7.1)\end{aligned}$$

- Για το σήμα $u(t-2)$ ο δίπλευρος και ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace ταυτίζονται:

$$\mathcal{L}\{u(t-2)\}=e^{-2s}\,\mathcal{L}\{u(t)\}=\frac{e^{-2s}}{s}, \quad \mathrm{Re}\{s\}>0. \qquad (6.7.2)$$

- Για το σήμα $e^{-t}u(1-t)$ ο δίπλευρος και ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace είναι διαφορετικοί.

  - Για μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace το σήμα είναι $e^{-t}\,u(t)\,u(1-t)=e^{-t}$ για $0\le t\le 1$. Άρα η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το $s-$επίπεδο. Πράγματι με τη χρήση του ορισμού:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-t}\,e^{-st}\,dt=\int_{0^-}^{1} e^{-t}\,e^{-st}\,dt=\int_{0^-}^{1} e^{-(s+1)t}\,dt\\ &= \left[-\frac{1}{s+1}e^{-(s+1)t}\right]\Big|_{0^-}^{1}=\frac{1-e^{-(s+1)}}{s+1}. \qquad (6.7.3)\end{aligned}$$

Επειδή

$$\lim_{s \to -1} \frac{1 - e^{-(s+1)}}{s+1} = \lim_{s \to -1} \frac{-(-1)e^{-(s+1)}}{1} = 1 \qquad (6.7.4)$$

το $s = -1$ $\delta\epsilon\nu$ είναι πόλος.

– Για δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\, u(1-t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{1} e^{-t}\, e^{-st}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{1} e^{-(s+1)t}\, dt = \left.\frac{e^{-(s+1)t}}{-(s+1)}\right|_{-\infty}^{1} = -\frac{1}{s+1}\left[e^{-(s+1)} - e^{-(s+1)(-\infty)}\right] \\ &= -\frac{1}{s+1} e^{-(s+1)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -1. \end{aligned} \qquad (6.7.5)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με χρήση των ιδιοτήτων:

$$\begin{aligned} -e^{-t}u(-t) &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -1 \\ e^{-t}u(-t) &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -1 \\ e^{-(t-1)}u(-(t-1)) &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{e^{-s}}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -1 \\ e\, e^{-t}u(1-t) &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{e^{-s}}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -1 \\ e^{-t}u(1-t) &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} -\frac{e^{-s}\, e^{-1}}{s+1} = -\frac{e^{-(s+1)}}{s+1}, \quad Re\{s\} < -1. \end{aligned} \qquad (6.7.6)$$

6.7.2. Δίνεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $tu(t)$ είναι $\frac{1}{s^2}$. Να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς Laplace των σημάτων $(t-1)u(t)$ και $(at-b)u(t)$.

Λύση:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(t-1)u(t)\} &= \mathcal{L}\{t\, u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{1-s}{s^2}, \quad Re\{s\} > 0. && (6.7.7) \\ \mathcal{L}\{(at+b)u(t)\} &= a\frac{1}{s^2} - b\frac{1}{s} = \frac{a-bs}{s^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0. && (6.7.8) \end{aligned}$$

6.7.3. Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου του σήματος $x(t) = te^{-t}u(t)$.

Λύση:

$$\mathcal{UL}\{\frac{d}{dt}x(t)\} = s\mathcal{X}(s) - x(0^-) \qquad (6.7.9)$$

όπου ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του $x(t)$ είναι

$$\mathcal{X}(s) = \mathcal{UL}\{te^{-t}u(t)\} = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad Re\{s\} > -1. \qquad (6.7.10)$$

Επειδή $x(0^-) = 0$ παίρνουμε:

$$\mathcal{UL}\{\frac{d}{dt}x(t)\} = s\mathcal{X}(s) = \frac{s}{(s+1)^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1. \tag{6.7.11}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και με εφαρμογή του δίπλευρου μετασχηματισμού Laplace στο ίδιο σήμα, επειδή το σήμα είναι αιτιατό.

6.7.4. Με τη χρήση των ιδιοτήτων να υπολογίσετε το μετασχηματισμό Laplace του σήματος $x(t) = \int_0^\infty \lambda\, u(t-\lambda)\, d\lambda$.

Λύση:

Παρατηρώ ότι $x(t) = t\, u(t) * u(t)$. Επομένως

$$\mathcal{L}\Big\{\int_0^\infty \lambda u(t-\lambda) d\lambda\Big\} = \mathcal{L}\{tu(t) * u(t)\} = \frac{1}{s^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^3}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0. \tag{6.7.12}$$

6.7.5. Να υπολογιστεί ο μονόπλευρος μετασχηματισμός Laplace του ημι-περιοδικού σήματος που έχει πρώτη περίοδο:

$$x_T(t) = \begin{cases} u(t) - u(t-0.5), & \text{αν } t \le 0.5 \\ 0, & \text{αν } 0.5 < t < 1. \end{cases} \tag{6.7.13}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} \mathcal{UL}\{x_T(t)\} &= \mathcal{X}_T(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s/2}}{s} = \frac{1-e^{-s/2}}{s}, \quad \text{ROC: όλο το } s\text{-επίπεδο} \\ \mathcal{X}(s) &= \frac{1}{1-e^{-sT}}\mathcal{X}_T(s) = \frac{1-e^{-s/2}}{(1-e^{-s})s}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0. \end{aligned} \tag{6.7.14}$$

Όντως η περιοχή σύγκλισης είναι $Re\{s\} > 0$, επειδή

$$\lim_{s\to 0} \frac{1-e^{-s/2}}{(1-e^{-s})s} = \frac{-(-1/2)e^{-s/2}}{[-(-1)e^{-s}]s + [1-e^{-s}]1} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1-(1-s)e^{-s}} = \frac{1}{0}. \tag{6.7.15}$$

Άρα πρέπει να εξαιρεθεί το $s = 0$.

6.7.6. Να αντιστρέψετε τους εξής μετασχηματισμούς Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2 \tag{6.7.16}$$

$$X(s) = \frac{s^3+3s+2}{(s+1)^3}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1 \tag{6.7.17}$$

$$X(s) = \frac{1-e^{-4s}}{3s^3+2s^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0. \tag{6.7.18}$$

Λύση:

α.

$$X(s) = \frac{1}{s^2+4s+4} = \frac{1}{(s+2)^2} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t) = te^{-2t}u(t). \tag{6.7.19}$$

β. Προσθέτοντας και αφαιρώντας $3s^2$ στον αριθμητή παίρνουμε

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^3+3s+2}{(s+1)^3} = \frac{s^3+3s+3s^2+1-3s^2+1}{(s+1)^3} \\ &= 1 + \frac{1-3s^2}{(s+1)^3}. \end{aligned} \tag{6.7.20}$$

Οπότε πρέπει να επεκτείνουμε το δεύτερο όρο στην (6.7.20) σε άθροισμα μερικών κλασμάτων:

$$\begin{aligned} \frac{1-3s^2}{(s+1)^3} &\equiv \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} \\ 1-3s^2 &\equiv A(s+1)^2 + B(s+1) + C \\ 1-3s^2 &\equiv As^2 + (2A+B)s + A + B + C. \end{aligned} \tag{6.7.21}$$

Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα στην (6.7.21) προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους από το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τα A, B και C:

$$A = -3 \tag{6.7.22}$$

$$2A + B = 0 \Leftrightarrow B = -2A = 6 \tag{6.7.23}$$

$$A + B + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 - A - B = 1 + 3 - 6 = -2. \tag{6.7.24}$$

Επομένως από τον Πίνακα βασικών δίπλευρων μετασχηματισμών Laplace έχουμε

$$1 \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} \delta(t) \tag{6.7.25}$$

$$\frac{-3}{s+1} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} -3\,e^{-t}\,u(t) \tag{6.7.26}$$

$$\frac{6}{(s+1)^2} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} 6\,t\,e^{-t}\,u(t) \tag{6.7.27}$$

$$\frac{-2}{(s+1)^3} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} -e^{-t}\,t^2\,u(t). \tag{6.7.28}$$

Συνοψίζουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+3s+2}{(s+1)^3}\right\} &= \delta(t) - 3\,e^{-t}u(t) + 6\,te^{-t}\,u(t) - t^2e^{-t}\,u(t) \\ &= \delta(t) - (t^2-6t+3)\,e^{-t}\,u(t). \end{aligned} \tag{6.7.29}$$

γ.

$$X(s) = \frac{1-e^{-4s}}{3s^3+2s^2} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} x(t) = y(t) - y(t-4) \tag{6.7.30}$$

όπου

$$\begin{aligned} y(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} Y(s) = \frac{1}{3s^3+2s^2} &= \frac{1}{s^2(3s+2)} = \frac{1}{3s^2(s+\frac{2}{3})} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+\frac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{6.7.31}$$

Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 3s(s+\frac{2}{3})A + 3(s+\frac{2}{3})B + C3s^2 \Leftrightarrow \\ 1 &\equiv 3As^2 + 2As + 3Bs + 2B + 3Cs^2 \Leftrightarrow \\ 1 &\equiv 3(A+C)s^2 + (2A+3B)s + 2B. \end{aligned} \tag{6.7.32}$$

οπότε

$$B = \frac{1}{2} \tag{6.7.33}$$

$$2A+3B = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{3}{2}B = -\frac{3}{2}\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} \tag{6.7.34}$$

$$C = -A \Leftrightarrow C = \frac{3}{4}. \tag{6.7.35}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{3s^2(s+\frac{2}{3})} = \frac{-3/4}{s} + \frac{1/2}{s^2} + \frac{3/4}{s+2/3} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} \\ y(t) &= \Big(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{3}{4}e^{-2t/3}\Big)u(t). \end{aligned} \tag{6.7.36}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.7.30) προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

6.7.7. Ένα σύστημα περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$y'' + 3y' + y = x + y' \tag{6.7.37}$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(0) = 0$. Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος και τη συνάρτηση μεταφοράς του. Ποιά είναι η βηματική απόκριση του συστήματος;

Λύση:

Στην άσκηση μονόπλευροι και δίπλευροι μετασχηματισμοί ταυτίζονται, επειδή το σήμα $y(t)$ είναι αιτιατό και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές. Σκόπιμα θα κάνουμε χρήση της ιδιότητας της παραγώγισης του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace για να υπενθυμήσουμε στον αναγνώστη τη χρησιμότητα του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace στη μελέτη δυναμικών συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με μη-μηδενικές αρχικές συνθήκες. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{UL}\Big\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\Big\} &= s^2Y(s) - sy^{(0)}(0) - y^{(1)}(0) \quad (6.7.38)\\ 3\mathcal{UL}\Big\{\frac{dy(t)}{dt}\Big\} &= 3sY(s) - 3y^{(0)}(0) \quad (6.7.39)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{UL}\Big\{y(t)\Big\} &= \mathcal{Y}(s) = Y(s) \quad (6.7.40)\\ \mathcal{UL}\Big\{x(t)\Big\} &= \mathcal{X}(s) = X(s). \quad (6.7.41)\end{aligned}$$

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace αμφοτέρων των μελών της (6.7.37) προκύπτει

$$(s^2+2s+1)Y(s) = X(s) \Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1. \quad (6.7.42)$$

Επομένως η κρουστική απόκριση είναι

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = t\,e^{-t}\,u(t). \quad (6.7.43)$$

Η βηματική απόκριση θα προκύψει αν $x(t) = u(t)$. Τότε $X(s) = \frac{1}{s}$, $Re\{s\} > 0$, οπότε

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}\,\frac{1}{s} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{\Gamma}{s}. \quad (6.7.44)$$

Από τα εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα θα έχουμε

$$\begin{aligned} As(s+1) + Bs + \Gamma(s+1)^2 &\equiv 1\\ (A+\Gamma)s^2 + (A+B+2\Gamma)s + \Gamma &\equiv 1 \quad (6.7.45)\end{aligned}$$

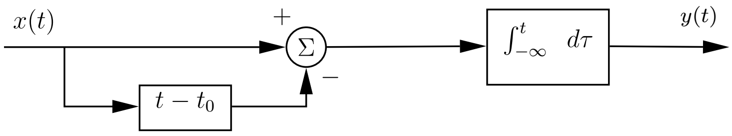
ή

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1\\ A &= -1\\ A+B+2\Gamma &= 0 \Leftrightarrow B = -1. \quad (6.7.46)\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow}\\ y(t) &= (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t). \quad (6.7.47)\end{aligned}$$

6.7.8. Το σύστημα του Σχήματος 6.7.1 λέγεται **βαθμίδα συγκράτησης** (holding system). Το ολοκλήρωμα που υπολογίζει η σχετική βαθμίδα είναι $\int_{-\infty}^{t} \, d\tau$. Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση και η απόκριση συχνότητας του συστήματος.



Σχήμα 6.7.1: Βαθμίδα συγκράτησης.

Λύση:

Η έξοδος της βαθμίδας συγκράτησης $y(t)$ είναι

$$y(t) = [x(t) - x(t - t_0)] * h(t) = \int_{-\infty}^{t} \underbrace{[x(\tau) - x(\tau - t_0)]}_{f(\tau)} \, d\tau \tag{6.7.48}$$

οπότε ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου είναι

$$Y(j\omega) = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega}. \tag{6.7.49}$$

Αλλά $f(t) = x(t) - x(t - t_0)$, οπότε

$$F(j\omega) = [1 - e^{-j\omega t_0}]X(j\omega) \tag{6.7.50}$$

και $F(0) = 0$. Αντικαθιστώντας στην (6.7.49) προκύπτει

$$Y(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{j\omega} = \frac{[1 - e^{-j\omega t_0}]X(j\omega)}{j\omega} \tag{6.7.51}$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1 - e^{-j\omega t_0}}{j\omega} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t - t_0). \tag{6.7.52}$$

Συνεπώς $h(t) = u(t) - u(t - t_0)$.

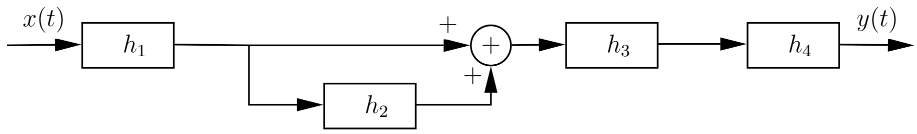
6.7.9. Δίνεται το σύστημα του Σχήματος 6.7.2 όπου

$$h_1(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sin \omega_0 \, t}{2\pi \, t}\right] \tag{6.7.53}$$

$$H_2(\omega) = \exp\{\frac{-j2\pi \, \omega}{\omega_0}\} \tag{6.7.54}$$

$$h_3(t) = \frac{\sin 3\omega_0 t}{\pi \, t} \tag{6.7.55}$$

$$h_4(t) = u(t). \tag{6.7.56}$$



Σχήμα 6.7.2: Σύστημα του Προβλήματος 6.7.9.

Να υπολογισθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση:

Έστω $x_1(t)$ η έξοδος της βαθμίδας με κρουστική απόκριση $h_1(t)$. Τότε $x_1(t) = (h_1 * x)(t)$. Αν $x_2(t)$ είναι η διέγερση της βαθμίδας με κρουστική απόκριση $h_3(t)$, θα έχουμε

$$x_2(t) = (h_1 * x)(t) + h_2 * (h_1 * x)(t) \tag{6.7.57}$$

και η απόκριση του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} y(t) &= (h_3 * h_4) * x_2(t) = (h_3 * h_4) * h_1 * x(t) + (h_3 * h_4) * (h_2 * h_1) * x(t) \\ &= [h_3 * h_4 * h_1 + h_3 * h_4 * h_2 * h_1] * x(t) \\ &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \Big[H_3(s)H_4(s)H_1(s) + H_3(s)H_4(s)H_2(s)H_1(s)\Big]X(s). \end{aligned} \tag{6.7.58}$$

Επειδή ισχύει:

$$\frac{\sin\omega_0 t}{2\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{αν } |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{αν } |\omega| > \omega_0 \end{cases} \tag{6.7.59}$$

θα είναι:

$$h_1(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\sin\omega_0 t}{2\pi t}\Big) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_1(\omega) = \begin{cases} \frac{j\omega}{2}, & \text{αν } |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{αν } |\omega| > \omega_0 \end{cases} \tag{6.7.60}$$

$$h_3(t) = \frac{\sin 3\omega_0 t}{\pi t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_3(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |\omega| < 3\omega_0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{6.7.61}$$

$$h_4(t) = u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} H_4(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega). \tag{6.7.62}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} H_3(\omega)H_4(\omega)H_1(\omega) &= \begin{cases} \Big[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\Big]\frac{j\omega}{2}, & \text{αν } |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{αν } |\omega| > \omega_0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{αν } |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{αν } |\omega| > \omega_0. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.7.63}$$

$$H_3(\omega)H_4(\omega)H_2(\omega)H_1(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{(-\frac{j2\pi\omega}{\omega_0})}, & \text{αν } |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{6.7.64}$$

Συνεπώς

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi\omega}{\omega_0}}, & \text{αν } |\omega| < \omega_0 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases} \tag{6.7.65}$$

Η απόκριση συχνότητας $H(\omega)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(\omega) = G(\omega)\Big[u(\omega+\omega_0) - u(\omega-\omega_0)\Big] \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} h(t) = g(t) * \frac{\sin\omega_0 t}{\pi t} \tag{6.7.66}$$

όπου

$$G(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi\omega}{\omega_0}} \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t - \frac{2\pi}{\omega_0}). \tag{6.7.67}$$

Οπότε τελικά

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2}\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t} + \frac{1}{2}\frac{\sin\omega_0(t-\frac{2\pi}{\omega_0})}{\pi(t-\frac{2\pi}{\omega_0})} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin\omega_0\, t}{\pi\, t} + \frac{1}{2}\frac{\sin\omega_0\, t}{\pi(t-\frac{2\pi}{\omega_0})} = \frac{1}{\pi\, t}\left[\frac{\pi - t\,\omega_0}{2\pi - t\,\omega_0}\right]\sin\omega_0\, t. \end{aligned} \tag{6.7.68}$$

6.7.10. Αιτιατό και ευσταθές Γ.Χ.Α. σύστημα $\mathcal{S}$ έχει κρουστική απόκριση $h(t)$ και ρητή συνάρτηση συστήματος $H(s)$. Γνωρίζουμε ότι

(α) $H(1) = 0.2$.

(β) Όταν το σύστημα $\mathcal{S}$ διεγείρεται με $u(t)$, η έξοδος είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

(γ) Όταν το σύστημα $\mathcal{S}$ διεγείρεται με $tu(t)$, η έξοδος δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη.

(δ) Το σήμα $\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας.

(ε) Η συνάρτηση συστήματος $H(s)$ έχει ένα άδηλο μηδενικό στο άπειρο.

Να προσδιορίστε την $H(s)$ και την περιοχή σύγκλισής της.

Λύση:

1. Το δεδομένο (β) συνεπάγεται ότι το σύστημα $\mathcal{S}$ για διέγερση

$$x_1(t) = u(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s) = \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0 \tag{6.7.69}$$

παράγει απόκριση $y_1(t) = \mathsf{T}[x_1(t)]$ που διαθέτει μετασχηματισμό Fourier. Επειδή

$$Y_1(s) = H(s)X_1(s) \tag{6.7.70}$$

τούτο συμβαίνει όταν η $H(s)$ προσφέρει ένα μηδενικό για $s = 0$, που ακυρώνει τον πόλο της $X_1(s)$ στο $s = 0$. Δηλαδή, το $s = 0$ πρέπει να ανήκει στη ROC της συνάρτησης συστήματος $H(s)$, άρα να **μην** είναι πόλος.

2. Το δεδομένο (γ) συνεπάγεται ότι το σύστημα $\mathcal{S}$ για διέγερση

$$x_2(t) = tu(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \text{Re}\{s\} > 0 \tag{6.7.71}$$

παράγει απόκριση $y_2(t) = \mathsf{T}[x_2(t)]$ με μετασχηματισμό Laplace

$$Y_2(s) = H(s)X_2(s) \tag{6.7.72}$$

που για να είναι μη-απολύτως ολοκληρώσιμη, πρέπει ο άξονας $j\omega$ να μην ανήκει στην ROC του μετασχηματισμού Laplace $Y_2(s)$. Αυτό μπορεί να συμβεί όταν η συνάρτηση συστήματος $H(s)$ δεν έχει μηδενικό δεύτερης τάξης στο $s = 0$. Άρα η συνάρτηση συστήματος $H(s)$ διαθέτει **μόνο μηδενικό τάξης 1** στο $s = 0$, αν συνεκτιμήσουμε και το αποτέλεσμα της επεξεργασίας του δεδομένου (β).

3. Έστω $p(t) = \dfrac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\dfrac{dh(t)}{dt} + 2h(t)$. Τότε

$$P(s) = s^2H(s) + 2sH(s) + 2H(s) \tag{6.7.73}$$

επειδή το σύστημα είναι αιτιατό, άρα $h(0^-) = 0$. Οπότε

$$H(s) = \frac{P(s)}{s^2 + 2s + 2}. \tag{6.7.74}$$

Σύμφωνα με το δεδομένο (γ) το $p(t)$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, κατά συνέπεια δεν πρέπει να έχει πρόδηλους πόλους, άρα $P(s) = A\prod_{i=1}^{N}(s - z_i)$, οπότε

$$H(s) = \frac{A\prod_{i=1}^{N}(s - z_i)}{s^2 + 2s + 2}. \tag{6.7.75}$$

Γνωρίζουμε ότι η $H(s)$ έχει ένα άδηλο μηδενικό στο άπειρο, άρα ο αριθμητής πρέπει να είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού 1, δηλαδή να του λείπει ένα μηδενικό. Συνεπώς

$$H(s) = \frac{As}{s^2 + 2s + 2}. \tag{6.7.76}$$

4. Από την $H(s)\Big|_{s=1} = 0.2$ έπεται ότι $A = 1$. Άρα

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{με πόλους } s_{1,2} = -1 \pm j. \tag{6.7.77}$$

Επειδή η $h(t)$ είναι αιτιατή και ευσταθής συνάρτηση, όλοι οι πόλοι κείνται στο αρνητικό ημιεπίπεδο, οπότε $Re\{s\} > -1$.

6.7.11. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $x(t)$ όταν:

(α) Το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό άρτιας συμμετρίας.

(β) Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ έχει τέσσερις πρόδηλους πόλους και κανένα πρόδηλο μηδενικό.

(γ) Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ έχει πόλο στο $s = (\frac{1}{2})e^{j\pi/4}$.

(δ) $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)d\tau = 4$.

Λύση:

Από το δεδομένο (β) προκύπτει

$$X(s) = \frac{A}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \tag{6.7.78}$$

Σύμφωνα με το δεδομένο (α) το σήμα $x(t)$ είναι πραγματικό σήμα, άρα οι πόλοι του μετασχηματισμού Laplace συμβαίνουν σε συζυγείς μιγαδικές θέσεις στο επίπεδο. Άρα:

$$b = a^*, \quad d = c^*. \tag{6.7.79}$$

Εφόσον το σήμα $x(t)$ είναι άρτιας συμμετρίας σύμφωνα με το δεδομένο (α), ο μετασχηματισμός Laplace θα πρέπει να είναι άρτιας συμμετρίας επίσης. Άρα οι πόλοι συμβαίνουν σε συμμετρικές ως προς τον $j\omega$ άξονα θέσεις. Τούτο σημαίνει ότι:

$$c = -a^*. \tag{6.7.80}$$

Άρα

$$X(s) = \frac{A}{(s-a)(s-a^*)(s+a^*)(s+a)}. \tag{6.7.81}$$

Γνωρίζουμε ότι $a = \frac{1}{2}e^{j\pi/4}$. Άρα:

$$X(s) = \frac{A}{(s^2 - \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4})(s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4})}. \tag{6.7.82}$$

Αλλά:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, d\tau = X(0) = 4 \tag{6.7.83}$$

οπότε $A = \frac{1}{4}$.