Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ασκήσεις 11ης Ενότητας

Λουκάς Βλάχος
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2014

Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.

Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ενότητα 11η: Μέγιστα και Ελάχιστα

1. Για να μελετήσουμε τα ακρότατα της απόστασης της αρχής των αξόνων από την τομή των δύο παραπάνω επιφανειών θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών lagrange, όπου το ρόλο των δεσμών θα πάρουν οι εξισώσεις των δύο επιφανειών. Θεωρούμε επομένως τη συνάρτηση:

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(2z + 2x^2 + 2y^2 - 3) + \mu(x + 2y - 1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2 \cdot 2\lambda x + \mu = (2 + 4\lambda)x + \mu$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4\lambda y + 2\mu = (2 + 4\lambda)y + 2\mu$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 2\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2z + 2x^2 + 2y^2 - 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = x + 2y - 1$$

Για τα κρίσιμα σημεία της F πρέπει όλες οι παραπάνω μερικές παράγωγοι να έχουν μηδενική τιμή. ΄Ετσι έχουμε :

$$\begin{cases} (2+4\lambda)x + \mu = 0 \\ (2+4\lambda)y + 2\mu = 0 \\ 2z + 2\lambda = 0 \\ 2z + 2x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(2+4\lambda) = \mu & (1) \\ (1+2\lambda)y = -\mu & (2) \\ z = -\lambda & (3) \\ 2z + 2x^2 + 2y^2 - 3 = 0 & (4) \\ x + 2y - 1 = 0 & (5) \end{cases}$$

Για μ≠0 : (1),(2)$\Longrightarrow \frac{\mu}{2(x-y)} y = -\mu \Longrightarrow y = -2(x-y) \Longrightarrow y = -2x - 2y = 1\ y = 2x$ και μαζί με την (5) προκύπτει ότι: x = 1/5, y = 2/5. ΄Ετσι η (4) γίνεται : 2z $+\frac{2}{25}+\frac{8}{25}$-3=0⟹2z=$\frac{65}{25}$⟹z=$\frac{65}{50}$=$\frac{13}{5}$.

΄Αρα ένα κρίσιμο σημείο της F είναι το (1/5, 2/5, 13/5):

Για μ = 0: Προκύπτει ότι x = y ή λ = −1/2

Για x = y: (5) ⇒ x = y = 1/3, (4) :⇒ 2z + 4 · 1y − 3 = 0 ⇒ 18z + 4 − 27 = 0 ⇒ 18z = 23 ⇒ z = 23/18

΄Αρα ακόμη ένα κρίσιμο σημείο είναι το (1/3, 1/3, 23/18)

Για λ = −1/2 : (3) ⇒ z = 1/2, (4) ⇒$1 + 2x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Και ακόμη εξαιτίας της (5) προκύπτει ότι : y = 0 και x = 1 ή y = 4/5 και x = −3/5.

Επομένως όλα τα κρίσιμα σημεία είναι τα:

Α(1/5, 2/5, 13/5), Β(1/3, 1/3, 23/18), Γ(1, 0, 1/2), Δ(−3/5, 4/5, 1/2)

Η ζητούμενη απόσταση ισούται με $d = \sqrt{x^2 + y^2 + 2^2}$ και προφανώς έχει τα ίδια ακρότατα με το τετράγωνό της. ΄Ετσι, για να βρούμε την ελάχιστη τιμή της d αρκεί να βρούμε για ποιο από τα παραπάνω κρίσιμα σημεία η d^2 αποκτά την μικρότερη τιμή:

Είναι :

$$d_A{}^2 = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{169}{25} = 33.8$$

$$d_B{}^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{23^2}{18^2} \approx 1.85$$

$$d_\Gamma{}^2 = 1 + 0 + \frac{1}{4} \approx 1.25$$

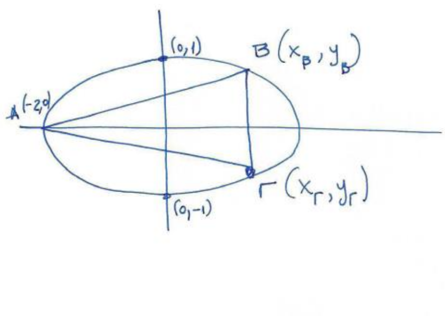
$$d_\Delta{}^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4} = 1.25$$

Επομένως $d_{min}^2 = \frac{5}{4} \Longrightarrow d_{min} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ μονάδες μήκους.

2. Παρατηρούμε ότι το σημείο Α αποτελεί μία από τις κορυφές της δοθείσας έλλειψης. Τότε το ζητούμενο τρίγωνο θα έχει τη μορφή της εικόνας. Προφανώς, καθώς πρόκειται για τρίγωνο εγγεγραμμένο στην έλλειψη με την παραπάνω εξίσωση θα ισχύουν :

$$-2 < x_B,\ x_\Gamma < 2,\ -1 \le y_B,\ y_\Gamma \le 1,\ y_B > 0$$

Ακόμη, επειδή η πλευρά ΒΓ είναι κάθετη στον Ox έπεται ότι θα ισχύει : $x_B = x_\Gamma$.



Ακόμη, θα είναι $y_B = -y_Γ$, λόγω συμμετρίας της έλλειψης ως προς τον άξονα Οx.

΄Αρα, ΒΓ = $2y_B$.

Είναι : $E(x_B, y_B) = 1/2\ (2y_B) \cdot |x_B + 2| = y_B(x_B + 2)$ (γιατί $x_B > -2$)

΄Ετσι, θεωρούμε την συνάρτηση $F(x_B, y_B)$:

$F(x_B, y_B, \mu) = E(x_B, y_B) + \mu\left(\frac{x_B^2}{4} + y_B^2 - 1\right) = y_B\,(x_B + 2) + \mu\left(\frac{x_B^2}{4} + y_B^2 - 1\right)$

Είναι όμως :

$$\frac{\partial F}{\partial x_B} = y_B + \frac{\mu x_B}{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_B} = x_B + 2 + 2\mu y_B$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = \frac{x_B^2}{4} + y_B^2 - 1$$

Το σημείο που έχουμε μέγιστο εμβαδόν είναι το $(1,\sqrt{3}/2)$ και το μέγιστο εμβαδόν ισούται με : $E_{max} = \sqrt{3}/2 \cdot 3 = 3\sqrt{3}/2$ τ.μ.

Πρόκειται για μέγιστο καθώς η $E(x_B, y_B)$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ακρότατο, ενώ είναι $E(0, 1) = 2 \cdot 1 = 2 < E_{max}$.

3. Για το εσωτερικό του κύκλου έχουμε:.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -(2x)e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2) + e^{-(x^2+y^2)}(4x) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-(x^2+y^2)}2x[-2x^2 - 3y^2 + 2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2) + e^{-(x^2+y^2)}(6y) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)}2y[-2x^2 - 3y^2 + 3]$$

Πρέπει: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} e^{-(x^2+y^2)}2x[-2x^2-3y^2+2]=0 \\ e^{-(x^2+y^2)}2y[-2x^2-3y^2+3]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x[-2x^2-3y^2+2]=0 & :(\alpha) \\ y[-2x^2-3y^2+3]=0 & :(\beta) \end{cases}$$

Για x = 0: (β) ⇔ $y[-3y^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = \pm 1$

Για y = 0: (α)⇔ $x[-2x^2 + 2] = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm 1$

Για $x \neq 0$ και $y \neq 0$: $-2x^2 - 3y^2 + 2 = -2x^2 - 3y^2 + 3 = 0$, αδύνατο.

Άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα (0, 1), (0,−1), (1, 0), (−1, 0), (0, 0), τα οποία πράγματι βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου: $x^2 + y^2 = 4$, fmax = 3/e, $f_{min} = 0$.

Για την περιφέρεια του κύκλου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange .

Θεωρούμε την F(x, y, λ) =$e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)+\lambda(x^2 + y^2 = 4)$.

Για $x \neq 0$ και $y \neq 0$: $-2e^{-4}(6 + y^2) + 2\lambda = -2e^{-4}(5 + y^2) + 2\lambda = 0$, άτοπο.

Για x = 0 : y = ±2

Για y = 0 : x = ±2

Όμως :

$$\left.\begin{array}{c} f(0,2) = e^{-4}\cdot 12 \\ f(0,-2) = e^{-4}\cdot 12 \\ f(2,0) = e^{-4}\cdot 8 \\ f(-2,0) = e^{-4}\cdot 8 \end{array}\right\} f_{min} = \frac{8}{e^4}\ , f_{max} = \frac{12}{e^4}$$ πάνω στην περιφέρεια του κύκλου).

4. Για τις τρεις γωνίες του αγνώστου τριγώνου (Α,Β, Γ) προφανώς ισχύει ότι :
   - Α + Β + Γ = π
   - 0 < Α,Β, Γ < π

΄Ετσι θα μελετήσουμε για ακρότατα τη συνάρτηση Ε.Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της Ε ως προς Α,Β, Γ, οι οποίες πρέπει όλες να ισούνται με το μηδέν.

$$\frac{\partial E}{\partial A} = 2R^2 cosA\ sinB\ sin\Gamma = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial B} = 2R^2 sinA\ cosB\ sin\Gamma = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial \Gamma} = 2R^2 sinA\ sinB\ cos\Gamma = 0$$

Εξισώνουμε τις παραπάνω εξισώσεις ανά δύο και έτσι έχουμε :

$$2R^2 cosAsinBsin\Gamma = 2R^2 sinAcosBsin\Gamma$$

$$cosAsinB = sinAcosB$$

Καθώς όλες οι γωνίες είναι διάφορες του μηδενός και του π, τότε καταλήγουμε στο ότι:

$$tanA = tanB \rightarrow A = B$$

Ομοίως για τις δυο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε ότι :

$$tanA = tan\Gamma \rightarrow A = \Gamma$$

Καθώς οι τρεις γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους, και ταυτόχρονα το άθροισμα τους είναιίσο με π, τότε εύκολα προκύπτει ότι :

$$A = B = \Gamma = \phi = \pi/3$$

Συνεπώς, βλέπουμε ότι το, εγγεγραμμένο σε κύκλο, τρίγωνο που έχει μέγιστο εμβαδόν,είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.

5. Για το εσωτερικό του κύκλου θα πρέπει να ισχύει $x^2 + y^2 < 1$. Είναι ακόμη:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Συμπεραίνουμε ότι το σημείο (0, 0) είναι σαγματικό, ενώ δεν υπάρχουν μέγιστα ή ελάχιστα.Για την περιφέρεια του κύκλου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Lagrange . Θεωρούμε

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda + xy.$

$(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ή $(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ή $(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ή $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Είναι:

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \to μέγιστο$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \to ελάχιστο$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \to ελάχιστο$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \to μέγιστο$$

΄Ετσι, τα παραπάνω σημεία είναι τα ακρότατα για την περιφέρεια του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

6. Έστω, $\vec{F}(x,y,z) = F_1\hat{e}_1 + F_2\hat{e}_2 + F_3\hat{e}_3$, όπου:

$F_1 = F_1(x, y, z)$

$F_2 = F_2(x, y, z)$

$F_3 = F_3(x, y, z)$

Είναι: $(\nabla\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{e}_3$

Άρα, $\nabla\varphi \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \cdot (F_1, F_2, F_3) = F_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + F_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} + F_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

Ακόμη: $\nabla\varphi \cdot \vec{F} = \varphi\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)$

Έτσι: $\frac{\varphi\nabla\vec{F} - (\nabla\varphi)\cdot\vec{F}}{\varphi^2} \cdot \vec{F} = \frac{\varphi\frac{\partial F_1}{\partial x} + \varphi\frac{\partial F_2}{\partial y} + \varphi\frac{\partial F_3}{\partial z} - F_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} - F_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} - F_3\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\varphi^2}$: (A)

Όμως $(\vec{F}/\varphi) = \left(\frac{F_1}{\varphi}, \frac{F_2}{\varphi}, \frac{F_3}{\varphi}\right)$

Έτσι,

$$\nabla\,(\vec{F}/\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{F}_1}{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{F}_2}{\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{F}_3}{\varphi}\right) \Longrightarrow$$

$$\nabla\,(\vec{F}/\varphi) = \frac{\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}\cdot\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\mathrm{F}_1}{\varphi^2} + \frac{\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y}\cdot\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\mathrm{F}_2}{\varphi^2} + \frac{\frac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial z}\cdot\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\mathrm{F}_3}{\varphi^2} \Longrightarrow$$

$$\nabla\,(\vec{F}/\varphi) = \frac{\varphi\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\mathrm{F}_1 + \varphi\frac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\mathrm{F}_2 + \varphi\frac{\partial \mathrm{F}_3}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\mathrm{F}_3}{\varphi^2} : (\mathrm{B})$$

Από (Α) και (Β) προκύπτει ότι : $\nabla\cdot\left(\frac{F}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\nabla\vec{F} - (\nabla\varphi)\cdot\vec{F}}{\varphi^2}$