



---

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

## **Γενικά Μαθηματικά II** **Ασκήσεις 4<sup>ης</sup> Ενότητας**

Λουκάς Βλάχος

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ.

## Άδειες Χρήσης

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons. Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



## Χρηματοδότηση

Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα. Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.



Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



### Ενότητα 4η: Όρια και Συνέχεια

1. Να μελετηθεί αν η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \left( \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right) & \text{όταν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{όταν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι συνεχής.

2. Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) το όριο της συνάρτησης

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}$$

3. Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) το όριο της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{\sin(x + y^2)}{x + y}$$

στο σημείο (0,0)

4. Να υπολογισθεί (αν υπάρχει) το όριο της συνάρτησης

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)}{(x^2+y^3)(x^2+y^2)}$$

5. Να μελετηθεί το όριο

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,2,3)} \frac{(x-1)(y-2)^2(z+3)^3}{((x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2)^2}$$

6. Να υπολογισθούν (αν υπάρχουν) τα όρια των συναρτήσεων

$$f_1(x, y) = \frac{x^2(x+y+1)}{y^4\sqrt{x}-\sqrt{1-y}} e^{\frac{-x^2}{y^4}}$$

$$f_2(x, y) = \left( x - \frac{y}{x^2+y^2} \right) \frac{xy^2}{(x^2+y^4)^3}$$

στην αρχή των αξόνων.

7. Να βρεθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι ακέραιοι αριθμοί  $m, n, p$  ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p}$$

8. Να προσδιορισθεί το όριο (αν υπάρχει) της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{\sin x + 2\sin y}{2\tan x + \tan y}$$

στο σημείο  $(0, 0)$ .

9. Να μελετηθεί το όριο της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

στο  $(\infty, \infty)$