ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 12η : Εφαρμογές μεγίστων και ελαχίστων

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται ορισμένες εφαρμογές των μεγίστων και ελαχίστων. Οι ενδιαφερόμενοι καλούνται να είναι σε θέση να εφαρμόζουν την θεωρία των μεγίστων και ελαχίστων πάνω σε προβλήματα.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση του σημείου M(1,0,-2) από το επίπεδο x+2y+z=4.

Απάντηση:

Η απόσταση d^2 ενός σημείου (x,y,z) από το σημείο M είναι

$$d^2=(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$d^2=(x-1)^2+y^2+(4-x-2y)^2=4 \Leftrightarrow$$

$$d^2=(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2=0$$

Πέρνωντας τα $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial x}$ ίσα με το 0, καταλήγουμε οτι το μόνο κρίσιμο σημείο είναι το (11/6,5/3),το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο αφού Δ<0 και f_{xx}>0.Η ελάχιστη απόσταση μετά απο αντικατάσταση είναι $5\sqrt{6}/6$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί η ακρότατη απόσταση των σημείων της επιφάνειας $2x^2+3y^2+2z^2+2xz=0$ από το επίπεδο $z=0$.

<u>Απάντηση:</u>

Επειδή ζητάμε τα ακρότατα μιας συνάρτησης τα οποία δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, δηλαδή υπόκεινται σε μια επιπλέον συνθήκη, κάνουμε χρήση του πολλαπλασιαστή Lagrange ως εξής

$$F(x, y) = z^2+ \lambda\,(2x^2+3y^2+2z^2+2xz)$$

Για να υπάρχει κρίσιμο σημείο θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις,

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 = 2x+2z$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0 = 6y$ και $\varphi(x, y) = 0 = 2x^2+3y^2+2z^2+2xz$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει το σημείο (0,0,0).

Παράδειγμα 3

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κουτί (χωρίς καπάκι) 12m^2 και θέλουμε να το φτιάξουμε έτσι ώστε να πάρουμε τον μέγιστο όγκο από αυτο.

Απάντηση:

Το εμβαδό του κουτιού είναι S=xy+2xz+2yz=12 ενώ ο όγκος του V=xyz. Λύνοτας ως προς z και αντικαθιστώντας την σχέση στον όγκο προκύπτει

$$V=xyz=xy\left[\frac{12-xy}{2(y-x)}\right]=\frac{12xy-x^2y^2}{2(y-x)}$$

Τα ακρότατα βρίσκονται από τις σχέσεις $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$=0. Οι διαστάσεις που προκύπτουν για την μεγιστοποίηση του όγκου είναι οι (2,2,1).

Παράδειγμα 4

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f(x,y)=x-2xy+2y, όταν 0≤x≤3 και 0≤y≤2.

Απάντηση:

Ψάχνουμε για ακρότατα όχι μόνο στις $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}$, $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}$, αλλά και σε όλες εκείνες τις περιπτώσεις που ορίζουν τα x,y. Στην συγκεκριμένη περίπτωση ορίζουν επίπεδο.

$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \Longrightarrow y = 1/2$ και $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0 \Longrightarrow x = 1$, άρα το σημείο (1,1/2) είναι ακρότατο της συνάρτησης (μέγιστο αφού Δ>0) και,

Για x=0⟹ f=2y. Αφού 0≤y≤2 δημιουργείται ενα μέγιστο και ένα ελάχιστο στις ακραίες τιμές του y. Άρα, τα σημεία (0,0) και (0,2) είναι ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα.

Για x=3 ⟹ f=3-4y. Άρα, τα σημεία (3,0) και (3,2) είναι μέγιστο και ελάχιστο αντίστοιχα.

Για y=0 ⟹ f=x ⟶ Άρα, τα σημεία (0,0) και (2,0) είναι ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα

Για y=2 ⟹ f=-3x+4⟶ Άρα, τα σημεία (0,2) και (3,2) είναι ελάχιστο και μέγιστο αντίστοιχα

Παράδειγμα 5

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f(x,y)=x-2xy+2y, μέσα στον δακτύλιο $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

Απάντηση:

Για το εσωτερικό του κύκλου

$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \Longrightarrow y = 1/2$ και $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0 \Longrightarrow x = 1$, άρα το σημείο (1,1/2) είναι ακρότατο της συνάρτησης.

Για την περιφέρεια του κύκλου παίρνω τον πολλάπλασιαστή Lagrange διοτι υκόκειται σε συνθήκη άρα η συνάρτηση γίνεται

$$F=x-2xy-2y+\lambda[(x-1)^2+(y-2)^2-4]$$

Ποιές λύσεις βρήκατε ως ακρότατα?

Παράδειγμα 6

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2-2xy+2y$, όταν $0 \le x \le 3$ και $0 \le y \le 2$.

<u>Απάντηση:</u>

$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \Longrightarrow y = x$ και $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0 \Longrightarrow x = 1$, άρα το σημείο (1,1) είναι σαγματικό και,

Για $x=0 \Longrightarrow f=2y$. Απορρίπτεται

Για $x=3 \Longrightarrow f(x,y)=9-4y \longrightarrow$ Απορρίπτεται

Για $y=0 \Longrightarrow f(x,y)=x^2 \longrightarrow$ Άρα, το σημείο (0,0) είναι ελάχιστο

Για $y=2 \Longrightarrow f(x,y)=x^2-4x+4 \longrightarrow$ άρα το σημείο (2,2) είναι μέγιστο

Παράδειγμα 7

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης f(x,y)=x^2+y, που είναι ταυτόχρονα και σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

<u>Απάντηση:</u>

Παίρνω τον πολλάπλασιαστή Lagrange διοτι η συνάρτηση υπόκειται σε συνθήκη άρα

$$F(x,y)=x^2+y+\lambda(x^2+y^2-1)$$

Πρέπει,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \Longrightarrow 2x + 2\lambda x = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \mathrm{x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0 \Longrightarrow 1 + 2\lambda y = 0 \Longrightarrow \mathrm{y} = -1/2\lambda$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \lambda} = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Συνέχεια παραδείγματος 7

Για λ=-1 $\Longrightarrow \mathrm{y} = \frac{1}{2}$ και x=$\pm\sqrt{3}/2$

Για x=0 $\Longrightarrow \mathrm{y} = \pm 1$

Άρα τα ακρότατα της συνάρτησης βρίσκονται στα σημεία (0,-1) ,(0,1),($\sqrt{3}$/2,1/2) και (-$\sqrt{3}$/2,1/2).

Υπολογίζοντας την τιμή της f για τα τέσσερα αυτά σημεία βρίσκουμε f(0,1)=1, f(0,-1)=-1, f($\pm\sqrt{3}$/2,1/2=5/4. Άρα η μέγιστη τιμή της f στον κύκλο είναι η f($\pm\sqrt{3}$/2,1/2=5/4 και η ελάχιστη η f(0,-1)=-1.

Παράδειγμα 8

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη απόσταση του σημείου P(3,1,-1) απο την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=4$.

Απάντηση:

Η απόσταση d^2 του σημείου από την σφαίρα είναι

$$d^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2.$$

Και

$$F(x,y,z)=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

Μηδενίζουμε τις πρώτες παραγώγους και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει για να βρούμε τα σημεία. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Συνέχεια παραδείγματος 8

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \Longrightarrow x - 3 + x\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{\mathrm{x}} - 1$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}} = 0 \Longrightarrow y(1+\lambda) = 1$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{z}} = 0 \Longrightarrow z(1+\lambda) = -1$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \lambda} = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

Αντικαθιστώντας το λ στις επόμενες 2 εξισώσεις προκύπτει ότι y=x/3 και z=-x/3. Στην συνέχεια, βάζουμε τις τιμές αυτές στην τελευταία εξίσωση όπου βγαίνει οτι x=$\pm$6/ $\sqrt{11}$. Για x=6/$\sqrt{11}$ το σημείο είναι το (6/$\sqrt{11}$, $\sqrt{11}$/3,$-\sqrt{11}$/3). Για x=-6/$\sqrt{11}$ το σημείο είναι το (6/$\sqrt{11}$, $-\sqrt{11}$/3,$\sqrt{11}$/3. Άρα η max-min απόσταση είναι 5.87 και 1.44

Παράδειγμα 9

Βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης f(x,y,z)=x+2y+3z στην καμπύλη που δημιουργείται από την τομή του επιπέδου x-y+z=1 και του κυλίνδρου $x^2 + y^2$=1.

Απάντηση:

Αρχικά, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει από την παραμετροποίηση των πολλαπλασιαστών Lagrange.

$$F=x+2y+3z+\lambda(x-y+z-1)+\mu(x^2 + y^2-1)$$

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι x= $\pm 2/\sqrt{29}$, y= $\pm 5/\sqrt{29}$ και z= $1 \pm 7/\sqrt{29}$. Η μέγιστη τιμή της f πάνω στην καμπύλη είναι 3+ $\sqrt{29}$.

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. Κεφ. 7
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 11*

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης