ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 13η : Επαναληπτική Ενότητα

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

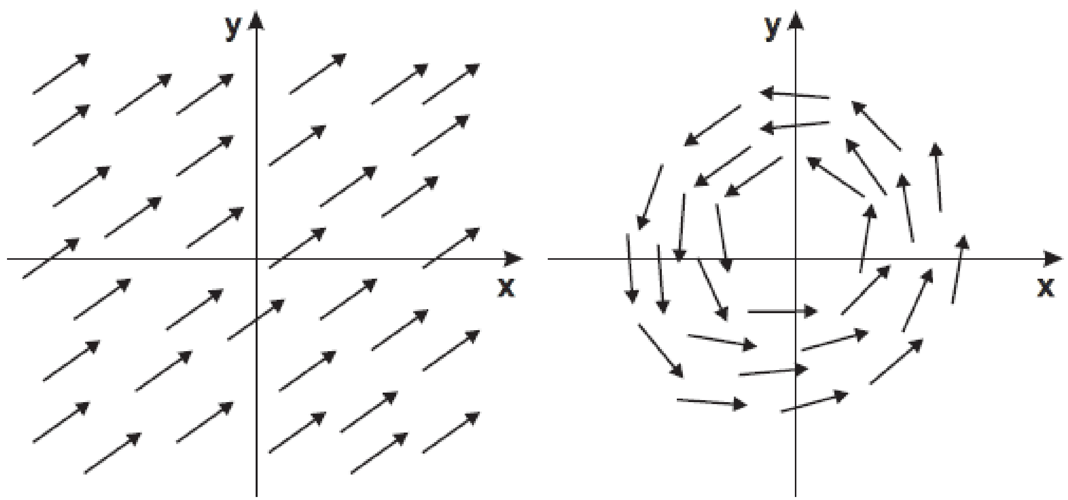
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή γίνεται μια επανάληψη πάνω στις διανυσματικές συναρτήσεις. Οι διανυσματικές συναρτήσεις είναι ένα βασικό εργαλείο για την κατανόηση του διαφορικού λογισμού πολλών μεταβλητών και κατ’επέκταση πολλών μεγεθών στην φυσική.

Γραφική παράσταση διανυσματικού πεδίου

Η γραφική παράσταση του διανυσματικού πεδίου αναδεικνύει ένα πλήθος από ενδιαφέρουσες ιδιότητες του υπό μελέτη φυσικού συστήματος, για το λόγο αυτό έχουν δημιουργηθεί μια σειρά απο ειδικά προγράμματα γραφικών για τα διανυσματικά πεδία (βλέπε Σχήμα).



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Απεικόνιση διανυσμάτικών συναρτήσεων

Η μελέτη των διανυσματικών πεδίων γίνεται με τη βοήθεια των διανυσματικών συναρτήσεων. Η διανυσματική συνάρτηση $\vec{A}$ μπορεί να αναλυθεί στον τριδιάστατο χώρο και να παρασταθεί ως εξής:

$$\vec{A}(x, y, z) = A_x \widehat{e_x} + A_y \widehat{e_y} + A_z \widehat{e_z} \quad \text{(σε καρτεσιανές)}$$

$$\vec{A}(r, \theta, z) = A_r \widehat{e_r} + A_\theta \widehat{e_\theta} + A_z \widehat{e_z} \quad \text{(σε κυλινδρικές)}$$

$$\vec{A}(\rho, \theta, \phi) = A_\rho \widehat{e_\rho} + A_\theta \widehat{e_\theta} + A_\varphi \widehat{e_\phi} \quad \text{(σε σφαιρικές)}$$

Οι συναρτήσεις A_i είναι αριθμητικές συναρτήσεις και αποτελούν τις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου.

Τελεστής ∇

Ο τελεστής ∇ (ανάδελτα) όρίζεται ως

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\widehat{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{e_z}$$

και εκφράζει την παράγωγο.

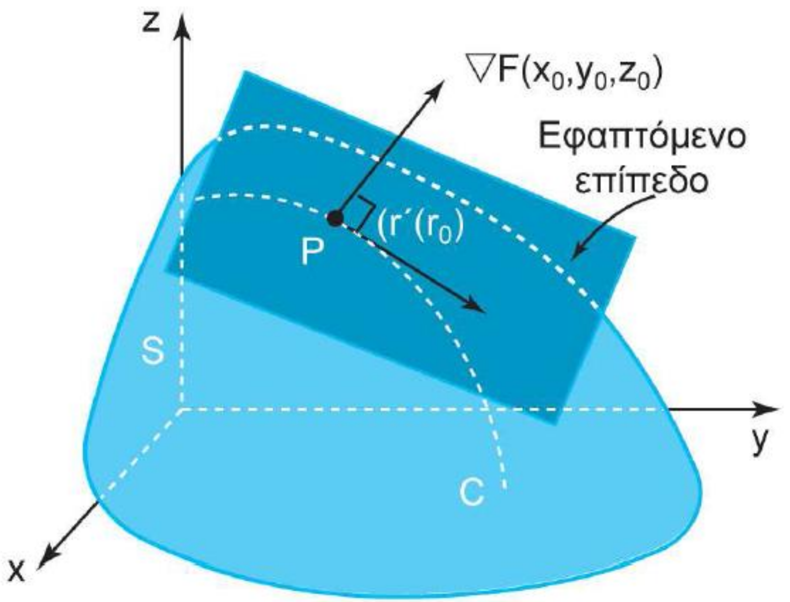
Ο τελεστής έχει εφαρμογή σε πολλές εκφράσεις της φυσικής, μια τέτοια έκφραση είναι και αυτή της κλίσης μιας συνάρτησης που θα εξετάσουμε παρακάτω στην ενότητα αυτή. Εάν εφαρμόσουμε λοιπόν τον τελεστή σε μια αριθμητική συνάρτηση παίρνουμε την κλίση αυτής της συνάρτησης ως

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{e_z}$$

Ορισμός κλίσης

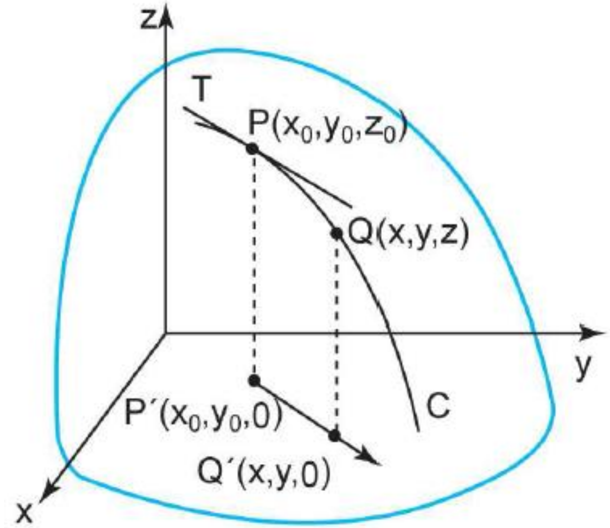
Ορίζουμε ως την κλίση μιας αριθμητικής συνάρτησης f(x, y, z) τη διανυσματική συνάρτηση

$$\nabla f(\vec{\mathrm{x}}) = \lim_{|h|\to 0} \frac{f\left(\vec{\mathrm{x}}+\vec{\mathrm{h}}\right)+f(\vec{\mathrm{x}})}{|h|} \quad \text{ή} \quad \nabla f(\vec{\mathrm{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{\mathrm{e}_{\mathrm{z}}}$$



Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(\vec{x})$ ως προς τη διεύθυνση ενός τυχαίου μοναδιαίου διανύσματος $\overrightarrow{n_0}$ ορίζεται από τη σχέση (βλέπε Σχήμα)



$$D_{\overrightarrow{n_0}} f(\vec{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}+\overrightarrow{n_0}\,h)-f(\vec{x})}{h} = (\nabla f)\cdot\overrightarrow{n_0} \qquad (1)$$

Η $D_{\overrightarrow{n_0}} f$ ονομάζεται παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{x_0}$ αλλά και κατά την κατεύθυνση $\overrightarrow{n_0}$.

Ορισμός απόκλισης

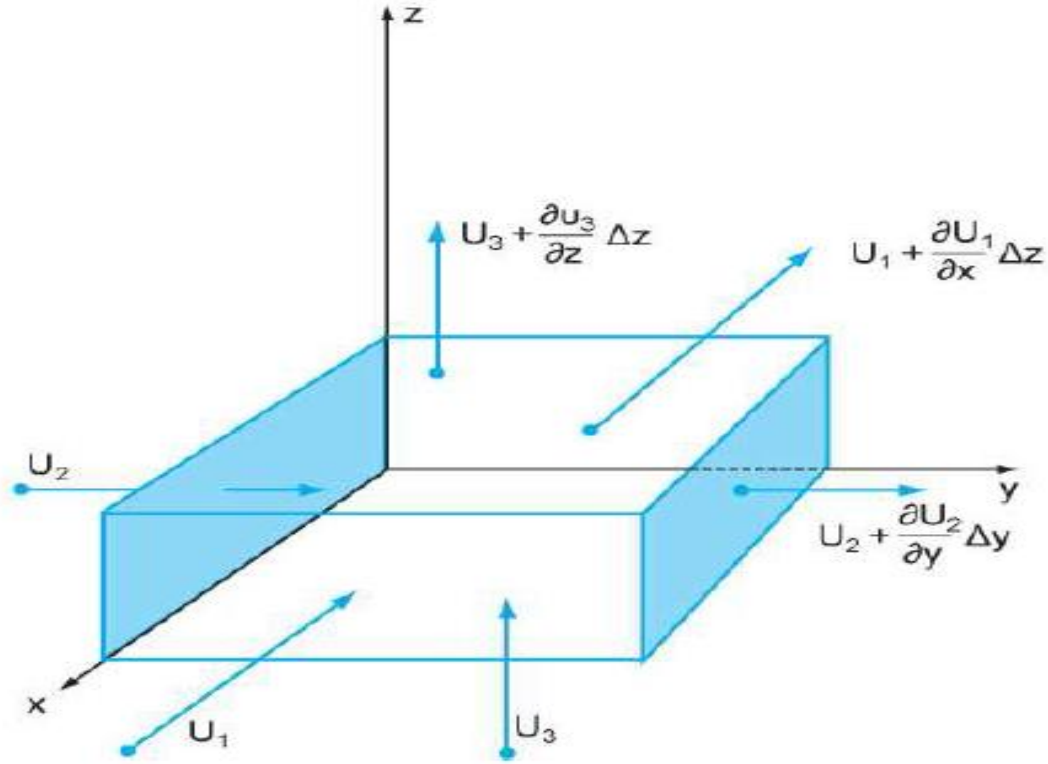
Ορίζουμε ως απόκλιση μιας διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{A} = A_x\widehat{e_x} + A_y\widehat{e_y} + A_z\widehat{e_z}$ την αριθμητική συνάρτηση

$$\nabla\cdot f = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη φυσική ερμηνεία της απόκλισης. Θεωρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο που περιγράφει η $\vec{f}$ είναι η ταχύτητα ενός ρευστού, δηλαδή $\overrightarrow{U}(x, y, z) = U_1(x, y, z)\,\widehat{e_x} + U_2(x, y, z)\,\widehat{e_y} + U_3(x, y, z)\widehat{e_z}$.

Φυσική ερμηνεία απόκλισης

Αν η απόκλιση της ταχύτητας είναι μηδέν $\nabla\cdot\overrightarrow{U} = 0$ τότε ο στοιχειώδης όγκος ΔV παραμένει σταθερός όταν κινείται με το ρευστό. Το διανυσματικό πεδίο λέγεται ασυμπίεστο αν η απόκλισή του είναι ίση με μηδέν.



Ορισμός στροφής

Εκτός από την απόκλιση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή ∇ για να ορίσουμε μία ακόμα διανυσματική συνάρτηση, τη στροφή. Αυτή ορίζεται ως εξής

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} & \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}} & \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{y}}$$

$$+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}$$

Χρήσιμες ταυτότητες 1/2

Μερικές ταυτότητες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη φυσική. Η απόδειξη τους μπορεί να αποτελέσει μια καλή άσκηση για τους αναγνώστες.

1. $\nabla(\mathrm{fg}) = \mathrm{f}\,\nabla\mathrm{g} + \mathrm{g}\,\nabla\mathrm{f}$

<u>Απόδειξη:</u>

Αναλύοντας το πρώτο μέρος της έκφρασης,προκύπτει:

$$\nabla(\mathrm{fg}) = \frac{\partial(fg)}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial(fg)}{\partial y}\widehat{e_y} + \frac{\partial(fg)}{\partial z}\widehat{e_z} =$$

$$= \left(g\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\widehat{e_x} + \left(g\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\widehat{e_y} + \left(g\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\widehat{e_z} =$$

$$= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial g}{\partial x}\widehat{e_y} + \frac{\partial g}{\partial x}\widehat{e_z}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{e_y} + \frac{\partial f}{\partial x}\widehat{e_z}\right)$$

Χρήσιμες ταυτότητες 2/2

2. $\nabla \cdot \left(\mathrm{f}\vec{A}\right) = \mathrm{f}\, \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \mathrm{f}$

Απόδειξη:

Όμοια, αναλύοντας το πρώτο μέρος της έκφρασης,προκύπτει:

$$\nabla \cdot \left(\mathrm{f}\vec{A}\right) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\widehat{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\widehat{e_z}\right] \cdot \left[f \mathrm{A_x}\widehat{\mathrm{e_x}} + f\mathrm{A_y}\widehat{\mathrm{e_y}} + f\mathrm{A_z}\widehat{\mathrm{e_z}}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f\mathrm{A_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(f\mathrm{A_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(f\mathrm{A_z}) =$$

$$= f\,\frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial x} + \mathrm{A_x}\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial \mathrm{A_y}}{\partial y} + \mathrm{A_y}\frac{\partial f}{\partial y} + f\,\frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial z} + \mathrm{A_z}\frac{\partial f}{\partial z} =$$

$$= f\left(\frac{\partial \mathrm{A_x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{A_y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{A_z}}{\partial z}\right) + \mathrm{A_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{A_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{A_z}\frac{\partial f}{\partial z} = \mathrm{f}\, \nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla \mathrm{f}$$

Άσκηση

Να εξετάσετε εάν οι εκφράσεις $\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)$f και $\vec{A}\cdot\ (\nabla\text{f})$ δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Λύση:

$$\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\text{f} = \mathrm{A_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{A_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{A_z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

και

$$\vec{A}\cdot\ (\nabla\text{f}) = (\mathrm{A_x}\widehat{\mathrm{e_x}} + \mathrm{A_y}\widehat{\mathrm{e_y}} + \mathrm{A_z}\widehat{\mathrm{e_z}})\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\widehat{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\widehat{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\widehat{e_z}\right) =$$

$$= \mathrm{A_x}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{A_y}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{A_z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Άρα, $\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)$f = $\vec{A}\cdot\ (\nabla\text{f})$

Πρόβλημα

Να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα:

$$\nabla \cdot \left(\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}\right) = \left(\vec{\mathrm{B}} \cdot \nabla\right)\vec{\mathrm{A}} - \vec{\mathrm{A}} \cdot \nabla\vec{\mathrm{B}}$$

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. *Κεφ. 6 , Παράρτημα Α*
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος),* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 11*

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης