ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 3η : Εισαγωγικές Έννοιες ΙΙ

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

Επιχειρούμε στην ενότητα αυτή μια σύντομη επανάληψη στα συστήματα συντεταγμένων και τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού που θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά στο μάθημα αυτό και συγχρόνως εισάγουμε και την έννοια/χρησιμότητα των ισοσταθμικών καμπυλών.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Συστήματα Συντεταγμένων

2. Επιφάνειες Δευτέρου Βαθμού

3. Ισοσταθμικές Καμπύλες

Συστήματα Συντεταγμένων

Συστήματα Συντεταγμένων

Στη Φυσική χρησιμοποιούμε πολλά διαφορετικά (ορθογώνια ή μη) συστήματα συντεταγμένων, ανάλογα με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος που θέλουμε να μελετήσουμε.

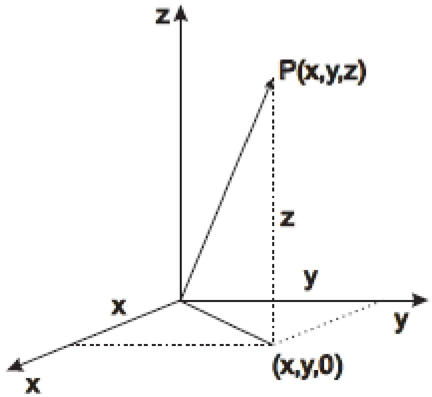
Τα γνωστότερα δεξιόστροφα ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων είναι:

- οι καρτεσιανές συντεταγμένες
- οι κυλινδρικές συντεταγμένες
- οι σφαιρικές συντεταγμένες

Καρτεσιανές Συντεταγμένες

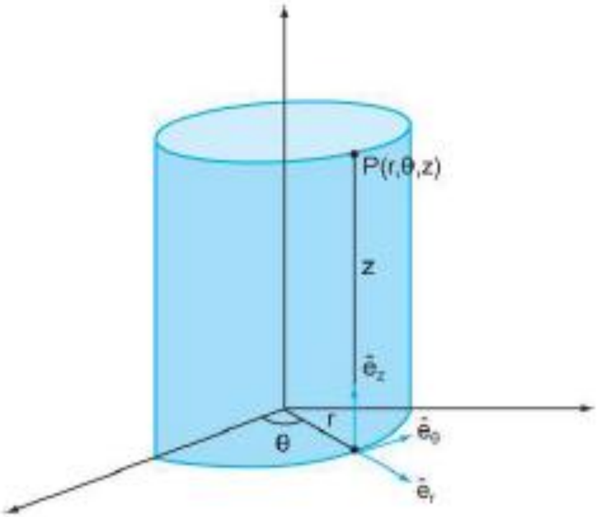
Κατασκευάζουμε τρεις άξονες Οx, Oy και Oz με κοινή αρχή Ο ανά δύο κάθετους μεταξύ τους και ονομάζουμε αντίστοιχα $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων αυτών. Η θέση κάθε σημείου P στο παραπάνω σύστημα αξόνων καθορίζεται από μία τριάδα πραγματικών αριθμών (x, y, z).

Αν το διάνυσμα θέσης του P(x, y, z) είναι $\vec{r}$ τότε αυτό αναλύεται στις συνιστώσες του $\vec{r} = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z$.



Κυλινδρικές Συντεταγμένες 1/2

Σε κάθε σημείο P(x, y, z) αντιστοιχούμε την τριάδα των αριθμών (r,θ,z) .



$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \ , \ z = z$$

όπου $0 \le \theta < 2\pi$ και $r > 0$.

Στο επίπεδο (z = 0) οι κυλινδρικές συντεταγμένες εκφυλίζονται στις πολικές .

Κυλινδρικές Συντεταγμένες 2/2

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις που παρουσιάσαμε στη προηγούμενη διαφάνεια προκύπτουν οι

$$r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Στο νέο σύστημα οι διανυσματικές μονάδες $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_z$ αποτελούν ένα νέο δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα. Οι σχέσεις που συνδέουν τις κυλινδρικές διανυσματικές μονάδες με τις καρτεσιανές είναι

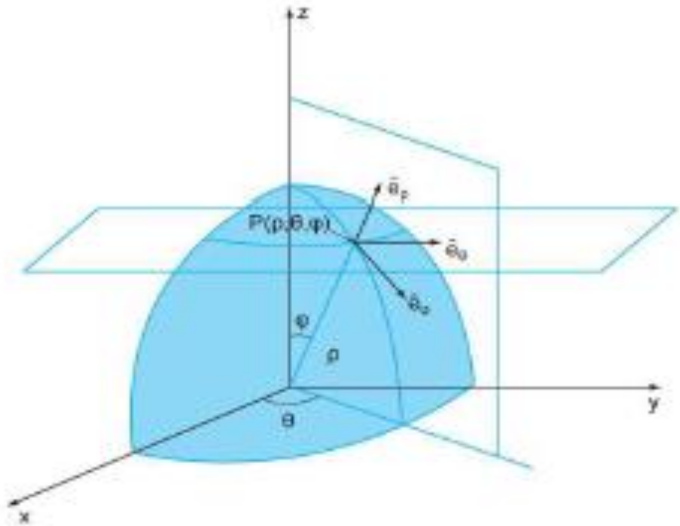
$$\hat{e}_r = \hat{e}_x \cos\theta + \hat{e}_y \sin\theta$$

$$\hat{e}_\theta = -\hat{e}_x \sin\theta + \hat{e}_y \cos\theta$$

$$\hat{e}_z = \hat{e}_z \, .$$

Σφαιρικές Συντεταγμένες

Σε κάθε σημείο P(x, y, z) αντιστοιχούμε την τριάδα (ρ,θ ,φ)



Οι καρτεσιανές και οι σφαιρικές συντεταγμένες συνδέονται με τις σχέσεις

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta ,$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta ,$$

$$z = \rho \cos\phi .$$

Σύνδεση Σφαιρικών – Καρτεσιανών Συντεταγμένων

Οι σφαιρικές συντεταγμένες συνδέονται με τις καρτεσιανές με τις σχέσεις:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \qquad (3)$$

Σχόλιο:

Είναι φανερό ότι αν εκμεταλλευτούμε τις γεωμετρικές ιδιότητες του υπό μελέτη φυσικού προβλήματος και επιλέξουμε κατάλληλα το σύστημα συντεταγμένων, τότε το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά.

Συνημίτονα Κατεύθυνσης

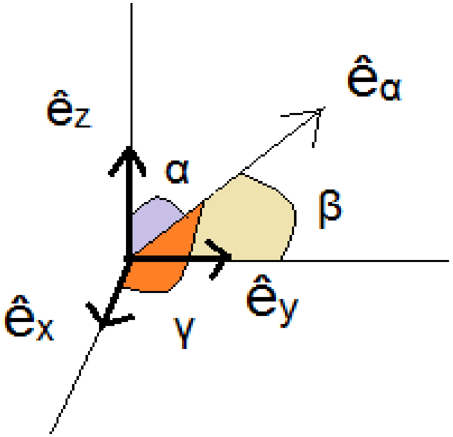
Στο νέο αυτό σφαιρικό σύστημα οι διανυσματικές μονάδες $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\phi$, $\hat{e}_\theta$ αποτελούν ένα νέο δεξιόστροφο τρισορθογώνιο σύστημα.
Γενικά ένα τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα αναλύεται με την βοήθεια των *συνημιτόνων κατεύθυνσης* ως εξής

$$\hat{e}_\alpha = \hat{e}_x \cos\alpha + \hat{e}_y \cos\beta + \hat{e}_z \cos\gamma$$

Απόδειξη:

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την παραπάνω σχέση με τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ προκύπτει

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\alpha = \cos\alpha$$
$$\hat{e}_y \cdot \hat{e}_\alpha = \cos\beta$$
$$\hat{e}_z \cdot \hat{e}_\alpha = \cos\gamma$$



Πολικές Συντεταγμένες

Το διάνυσμα θέσεως υλικού σημείου σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r$$

Να υπολογισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες.

Απάντηση:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

ή

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2$$

$$\gamma = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

Επιφάνειες Δευτέρου Βαθμού

Ορισμός

Το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν τη σχέση $G(x, y, z) = 0$ ορίζουν μια επιφάνεια στο χώρο των τριών διαστάσεων. ΄Ενα απλό παράδειγμα είναι το επίπεδο

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0,$$

όπου Α,Β, Γ και Δ είναι σταθερές. Μια επιφάνεια που ορίζεται από εξίσωση δευτέρου βαθμού ονομάζεται δευτεροβάθμια επιφάνεια. Η γενικότερη εξίσωση δευτέρου βαθμού στις τρεις διαστάσεις είναι

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

όπου $A, B, \ldots, J \in R$ είναι σταθερές.

Επιφάνειες Δευτέρου Βαθμού -Σφαίρα/Ελλειψοειδές-

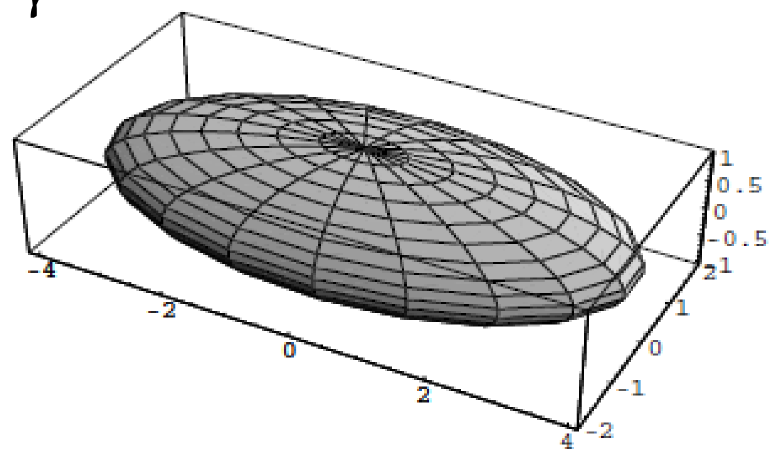
΄Ενα απλό παράδειγμα δευτεροβάθμιας επιφάνειας είναι η **σφαίρα**, τα σημεία της οποίας δίνονται από την εξίσωση

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha^2.$$

Το κέντρο της είναι το σημείο (x_0, y_0, z_0) και η ακτίνα της είναι α.
Άλλο παράδειγμα δευτεροβάθμιας επιφάνειας είναι η εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

που ορίζει το ελλειψοειδές

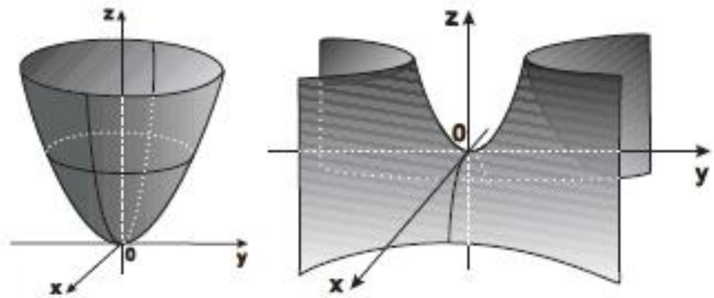


Επιφάνειες Δευτέρου Βαθμού -Παραβολοειδές-

Η εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z}{\gamma}$$

ορίζει το παραβολοειδές



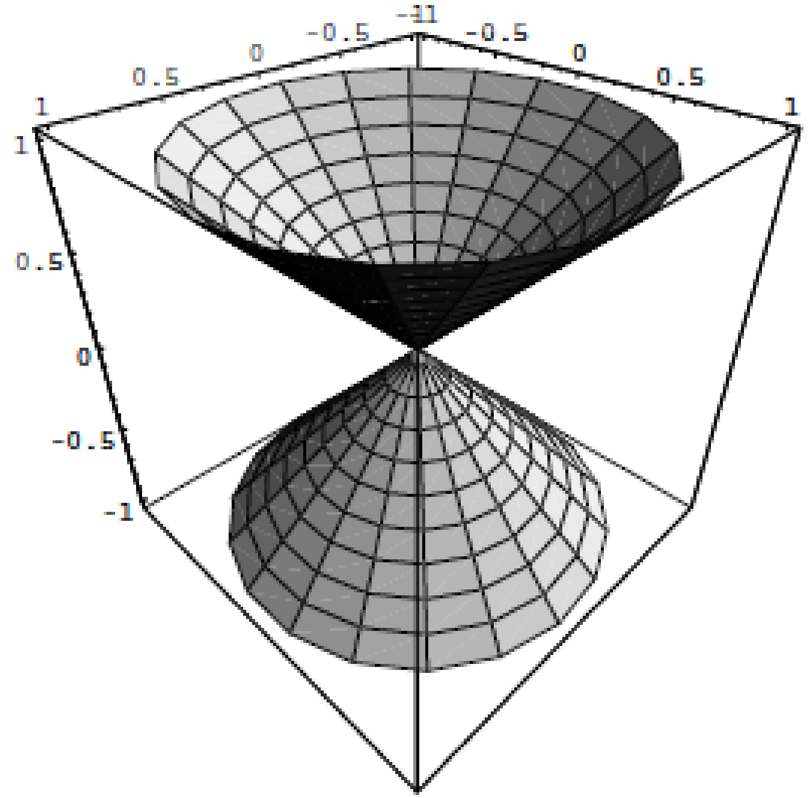
Το υπερβολικό παραβολοειδές περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{z}{\gamma}$$

για > 0. Το σημείο Ο ονομάζεται σαγματικό, επειδή αν κινηθούμε κατά μήκος του άξονα y συναντάμε στο σημείο Ο ελάχιστο, ενώ κατά μήκος του άξονα x μέγιστο.

Επιφάνειες Δευτέρου Βαθμού
-Ελλειπτικός Κώνος-

Ο ελλειπτικός κώνος ορίζεται από τη σχέση $(x^2/\alpha^2) + (y^2/\beta^2) = (z^2/\gamma^2)$,

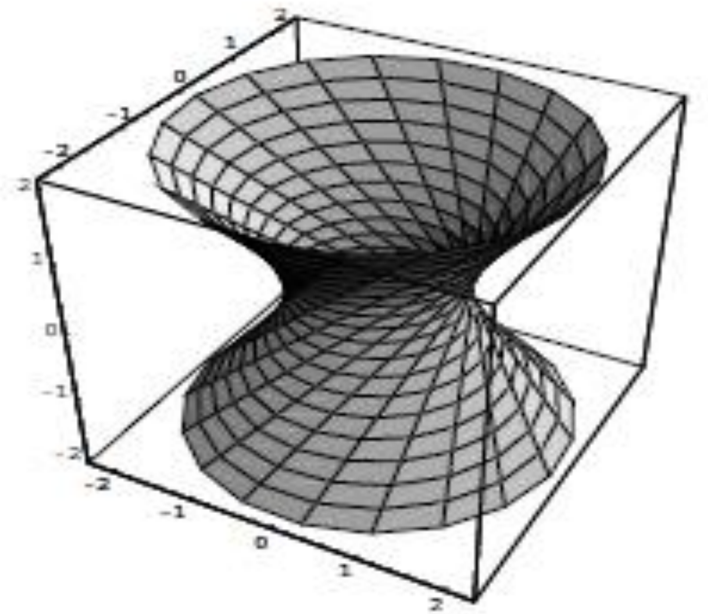


Επιφάνειες Δευτέρου Βαθμού
-Υπερβολοειδές-

Ενώ οι σχέσεις

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

ορίζουν το υπερβολοειδές ενός

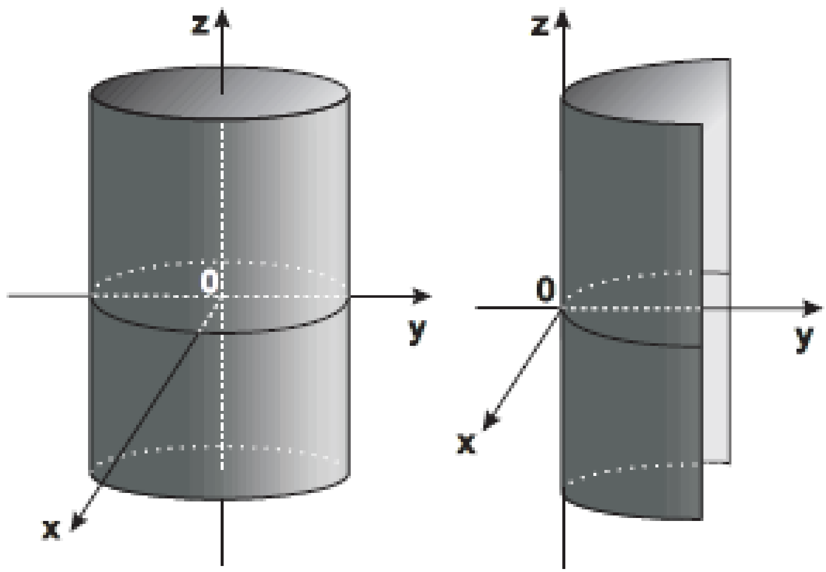


Επιφάνειες Δευτέρου Βαθμού
-Κύλινδρος-

Τέλος η εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

παριστάνει τον **ελλειπτικό κύλινδρο** και η σχέση $y = \alpha x^2$ τον **παραβολικό κύλινδρο**

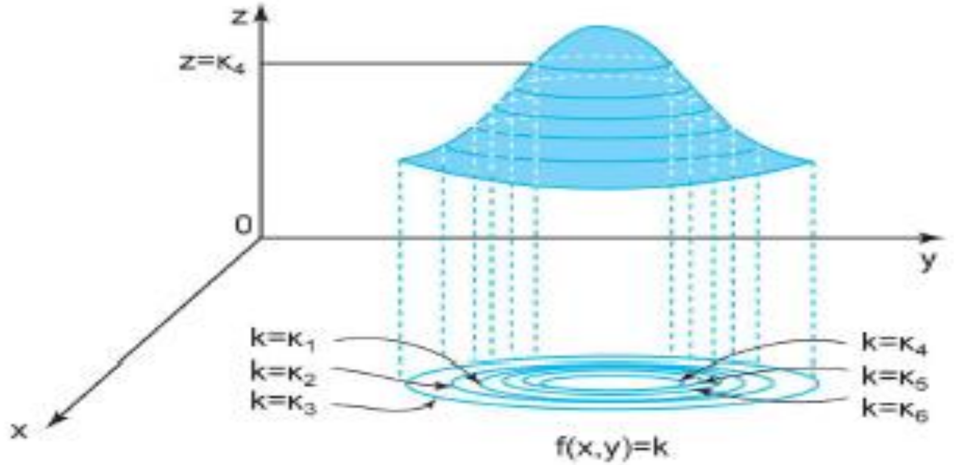


Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ισοσταθμικές Καμπύλες

Ισοσταθμικές Καμπύλες

Η γραφική αναπαράσταση μιας συνάρτησης διευκολύνει τη μελέτη των ιδιοτήτων της. Μια μορφή αναπαράστασης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών είναι και οι **ισοσταθμικές καμπύλες .**



Αν στο επίπεδο (xy) ενώσουμε όλα τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f(x, y) έχει σταθερή τιμή k, τότε θα σχηματίσουμε μία **ισοσταθμική καμπύλη** που τη συμβολίζουμε με k.

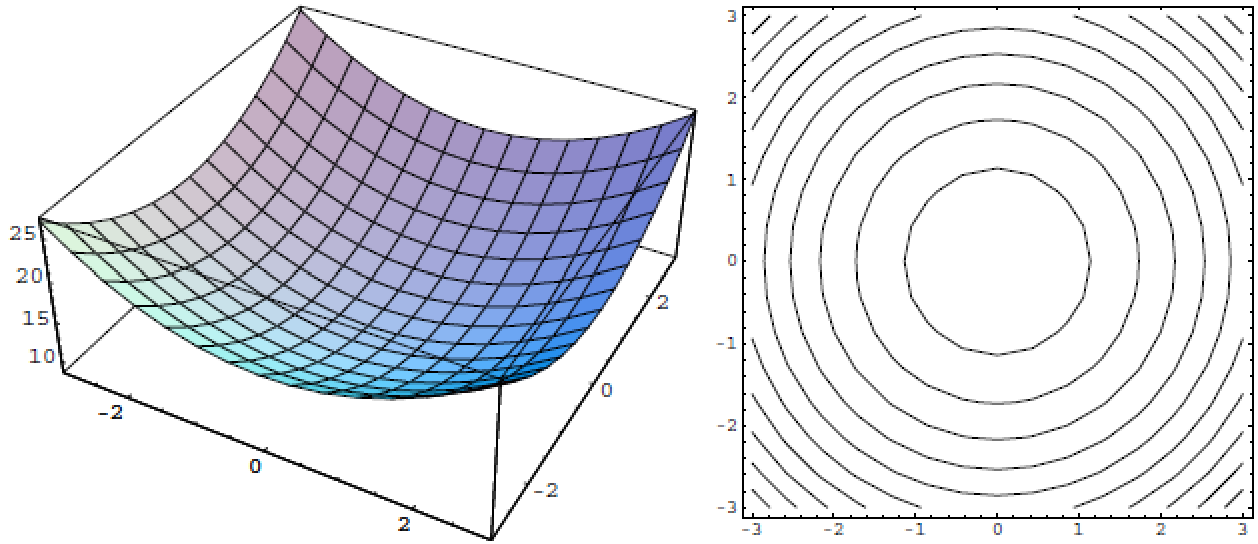
Ορισμός

Οι ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $f(x, y)$ είναι οι καμπύλες που ορίζονται από την τομή της επιφάνειας με εξίσωση $f(x, y) = z$ και των επιπέδων $z = k$, όπου k είναι σταθερά που παίρνει διακριτές τιμές. Το σύνολο των ισοσταθμικών καμπυλών, που όπως αναφέραμε ήδη συμβολίζεται με τις χαρακτηριστικές τιμές k_1, k_2, k_3, ... του ύψους z, αναπαραστούν πλήρως τη συνάρτηση $f(x, y)$. Συνήθως το $k = nh$, όπου $n = 1, 2, 3, ..$ και h σταθερός αριθμός .

Παράδειγμα 1

Σχεδιάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης
$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ για $k = 0, 1, 2, 3$.

Απάντηση



Οι ισοσταθμικές καμπύλες υπολογίζονται από τη σχέση $f(x, y) = k$ ή $x^2 + y^2 = 9 - k^2$. Είναι φανερό ότι για τις τιμές του $k = 0, 1, 2$ οι ισοσταθμικές καμπύλες είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{9 - k^2}$.

Παράδειγμα 2

Αν $V(x, y)$ είναι το δυναμικό της βαρύτητας στο σημείο (x, y) πάνω στο επίπεδο (xy), τότε οι ισοσταθμικές καμπύλες ονομάζονται ισοδυναμικές καμπύλες, επειδή σε όλα τα σημεία μιας τέτοιας καμπύλης το δυναμικό είναι το ίδιο.

Δίνεται το δυναμικό $V = \frac{Ax^2+By^2}{2} - x^2y^2$, όπου A,B θετικές σταθερές.

Να βρεθεί η μορφή των ισοδυναμικών καμπύλων κοντά στο σημείο (0, 0).

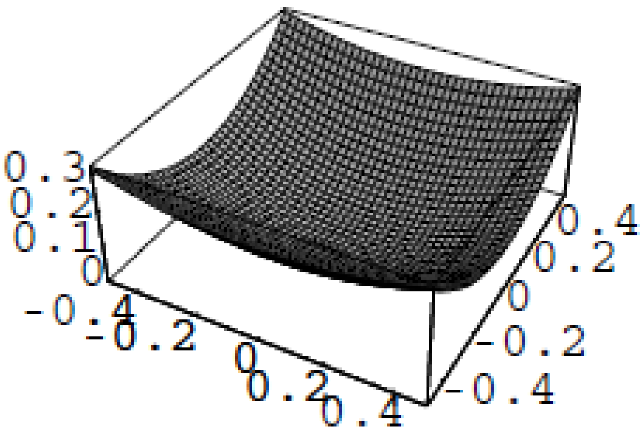
Λύση 1/2

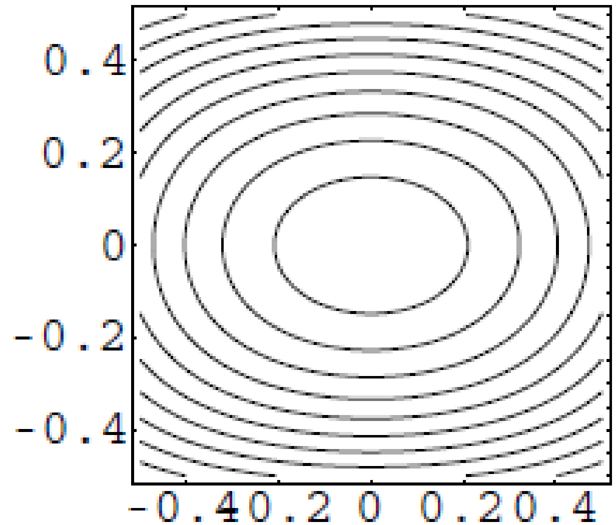
Οι ισοδυναμικές καμπύλες περιγράφονται από τη σχέση

$$\frac{Ax^2+By^2}{2} - x^2y^2 = c \qquad (4)$$

όπου c σταθερή. Επειδή βρισκόμαστε στην περιοχή του σημείου (0, 0), ο όρος x^2y^2 είναι πολύ μικρότερος από τους όρους Ax^2 και By^2, κατά συνέπεια, αυτοί μπορούν να παραληφθούν. Επομένως η Εξ. (4) γράφεται $(Ax^2 + By^2) \simeq 2c$ και παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια ελλείψεων, γύρω από την αρχή των συντεταγμένων, με ημιάξονες $(2c/A)^{1/2}$ και $(2c/B)^{1/2}$.

Λύση 2/2





Παράδειγμα 3

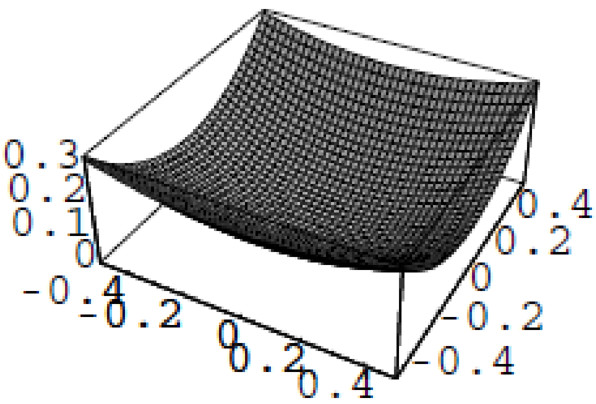
Να σχεδιαστεί η επιφάνεια και οι ισοσταθμικές καμπύλες για την οποία ισχύει

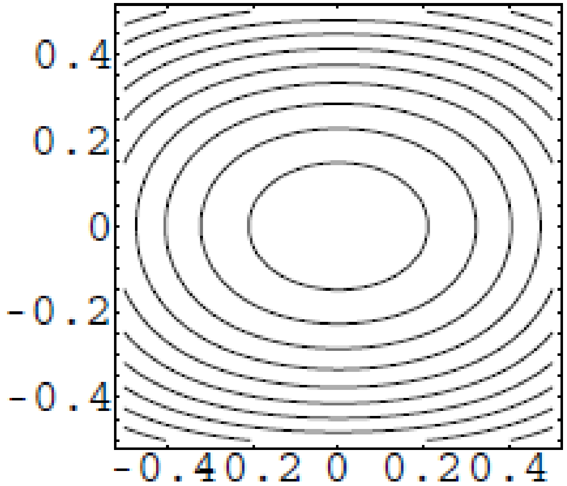
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 2cz$$

όπου α, β, c είναι σταθερές.

Λύση

Θα πρέπει το z να είναι πάντα θετικό. Οι τομές με τα επίπεδα x = 0 και y = 0 είναι παραβολές, ενώ οι τομές της με τα επίπεδα z = p είναι οι ελλείψεις $(x^2/(2a^2cp)) + (y^2/(2b^2cp)) = 1$, των οποίων οι ημιάξονες αυξάνουν καθώς αυξάνει το p. Η μορφή της επιφάνειας και των ισοσταθμικών καμπυλών φαίνεται στο Σχήμα





Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. Κεφ. 1
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 9,10*

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης