ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά II

Ενότητα 6η : Μερική Παράγωγος II

Λουκάς Βλάχος
Καθηγητής Αστροφυσικής
Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

1. Η κατανόηση του διαφορικού πολλών μεταβλητών

2. Ο ορισμός του ολικού διαφορικού και ο διαχωρισμός αυτού από την μερική παράγωγο

Περιεχόμενα ενότητας

1. Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

2. Ολικό διαφορικό

3. Παραδείγματα

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών 1/3

ΘΕΩΡΗΜΑ : Άν οι μερικές παράγωγοι της f (x, y) ως προς x και y υπάρχουν και είναι συνεχείς στο σημείο (x_0, y_0), τότε η συνάρτηση f (x, y) είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0).

Ξεκινώντας από τον ορισμό του διαφορικού και με τη χρήση του θεωρήματος της μέσης τιμής έχουμε:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] + [f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)] \\ &= h\, f_x(x + \theta_1, y + k) + k\, f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k)\end{aligned}$$

όπου $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Επειδή οι f_x, f_y είναι συνεχείς ισχύουν:

$$f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) = f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1$$

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών 2/3

και

$$f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k) = f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2,$$

όπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ όταν $h, k \to 0$. Τελικά, έχουμε

$$\Delta f = h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

ή άν $h = \Delta x$

Διαφόριση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών 3/3

και k = Δy,

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta f + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta \mathrm{y} + \mathcal{O}\sqrt{h^2 + k^2}.$$

Πολλές φορές χρειάζεται να αποδείξουμε ότι, μια συνάρτηση f(x, y) είναι διαφορίσιμη σε ένα συγκεκριμένο σημείο M_0 του πεδίου ορισμού της. Η απόδειξη γίνεται εύκολα με τη χρήση του παρακάτω κριτηρίου της διαφορισιμότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Εαν η συνάρτηση f(x, y) δεν είναι συνεχής στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ εντός του πεδίου ορισμού, δεν είναι και διαφορίσιμη. Επίσης αν μια συνάρτηση f(x, y) είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $M(x_0, y_0)$ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Ολικό Διαφορικό

Ολικό Διαφορικό

Ορίζουμε ως ολικό διαφορικό ή ολική παράγωγο ή απλά διαφορικό μιάς συνάρτησης f(x, y), το γραμμικό μέρος του Δf, όταν το Δx και Δy τείνουν συγχρόνως στο μηδέν (και τα ε_1, ε_2 τείνουν επίσης στο μηδέν).

Το ολικό διαφορικό της f συμβολίζεται με df και ισχύει

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\right) \cdot \mathrm{dx} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\right) \cdot \mathrm{dy}$$

Η έκφραση, $\mathrm{d} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}} \mathrm{dy}$, ονομάζεται διαφορικός τελεστής.

Ιδιότητες Ολικού Διαφορικού

Εάν f_1 και f_2 είναι δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις δύο μεταβλητών (ή n-μεταβλητών) και c_1, c_2 σταθερές, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\mathrm{d}\,(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1\,\mathrm{d}f_1 + c_2\,\mathrm{d}f_2$$

$$\mathrm{d}\,(f_1 f_2) = f_1\,\mathrm{d}f_2 + f_2\,\mathrm{d}f_1$$

$$\mathrm{d}\,(f_1/f_2) = \frac{f_2\,\mathrm{d}f_1 - f_1\,\mathrm{d}f_2}{f_2^{\,2}} \qquad (\text{όταν } f_2 \neq 0)$$

Ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης

Το ολικό διαφορικό δεύτερης τάξης υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mathrm{d}^2\mathrm{f} = \mathrm{d}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dy}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dy}$$

$$= \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2}(\mathrm{dx})^2 + 2\,\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}\,\mathrm{dxdy} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2}(\mathrm{dy})^2 .$$

Ολικό διαφορικό n-οστής τάξης

Είναι φανερό από τη μορφή αυτής της σχέσης ότι, το διαφορικό δεύτερης τάξης μπορεί να παρασταθεί συμβολικά ως εξής

$$\mathrm{d}^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\, \mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\, \mathrm{dy}\right)^2$$

και η ολική παράγωγος m-τάξης παριστάνεται ως:

$$\mathrm{d}^{\mathrm{m}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}\, \mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}\, \mathrm{dy}\right)^m \qquad (1)$$

Πρέπει να τονίσουμε ακόμα μια φορά ότι η σχέση (1) έχει συμβολικό χαρακτήρα και δεν είναι απλά το ανάπτυγμα μιας ταυτότητας.

Ερώτηση

Είναι ενδιαφέρον πολλές φορές να ερευνήσουμε το αντίστροφο πρόβλημα: Αν μας δοθεί μία έκφραση της μορφής

$$P(x, y)dx + Q(x, y)\, dy$$

υπάρχει συνάρτηση f που να είναι το ολικό της διαφορικό, δηλαδή να ισχύει

$$df = P\, dx + Q\, dy,$$

και αν ναι, πώς θα βρούμε την έκφρασή της;

Προϋπόθεση

Μπορούμε να δείξουμε ότι το πρώτο σκέλος του ερωτήματος μπορεί να απαντηθεί αμέσως αν οι παράγωγοι (∂P/∂y) και (∂Q/∂x) είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Εάν ακόμα

$$\frac{\partial \mathrm{P(x,y)}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial \mathrm{Q(x,y)}}{\partial \mathrm{x}}$$

τότε πράγματι υπάρχει f που να είναι το ολικό διαφορικό της έκφρασης.

$1^{ος}$ Τρόπος

Ο υπολογισμός της συνάρτησης f γίνεται απλά από τη σχέση

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{P}$$

Άρα

$$f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \int \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})d\mathrm{x} + \mathrm{R}(\mathrm{y}) \qquad (2)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (2) ως προς y έχουμε

$$f_{\mathrm{y}} = \left(\int \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})d\mathrm{x}\right)_{y} + \frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dy}} = \mathrm{Q}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

και με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε τη συνάρτηση R.

$2^{ος}$ Τρόπος

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού της συνάρτησης f(x, y) από το ολικό διαφορικό είναι από τη σχέση

$$f(x, y) = \int_a^x P(t, y)dt + \int_b^y Q(\alpha, t)dt$$

όπου a, b είναι τυχαία σημεία στο πεδίο D που οι παράγωγοι P_x και Q_y είναι συνεχείς. Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω για τρεις ή περισσότερες μεταβλητές.

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε το ολικό διαφορικό της $2xy^2dx + 2yx^2dy$.

<u>Απάντηση:</u>

Υπολογίζουμε αρχικά την ποσότητα $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ για να ελέγξουμε εάν υπάρχει το ολικό διαφορικό της παραπάνω έκφρασης. Εφόσον ισχύει, το ολικό διαφορικό προκύπτει οτι είναι

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= \int_a^x P(t, y)dt + \int_b^y Q(\alpha, t)dt \\
&= \int_a^x (2ty^2)dt + \int_b^y (2a^2t)dt \\
&= y^2t^2|_\alpha^x + a^2t^2|_b^y \\
&= x^2y^2 - y^2a^2 + a^2y^2 - b^2a^2 \\
&= x^2y^2 + c
\end{aligned}
$$

Παράδειγμα 2 1/2

Δίνεται η έκφραση $(x^2 + \alpha x y^2)dx + (y^2 - x^2 y)dy$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α, ώστε να υπάρχει το ολικό διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)$.

β) Να υπολογίσετε την συνάρτηση.

Απάντηση:

α) Υπολογίζουμε αρχικά την ποσότητα

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial (x^2 + \alpha x y^2)}{\partial y} = \frac{\partial (y^2 - x^2 y)dy}{\partial x}$$

$$\Longrightarrow 2\alpha x y = -2xy$$

$$\Longrightarrow \alpha = -1$$

Παράδειγμα 2 2/2

Αντικαθιστώντας το α στην σχέση έχουμε $(x^2 - xy^2)dx + (y^2 - x^2y)dy$.

Το ολικό διαφορικό προκύπτει οτι είναι

$$f(x, y) = \int_a^x P(t, y)dt + \int_b^y Q(\alpha, t)dt$$

$$= \int_a^x (t^2 - ty^2)dt + \int_b^y (t^2 - \alpha^2 y)dt$$

$$= \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y^2 + c$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται η έκφραση $xe^{xy}dx\text{-}ye^{xy}dy$. Υπάρχει το ολικό διαφορικό της συνάρτησης και αν ναι πιο είναι αυτό;

Απάντηση:

Το ολικό διαφορικό δεν υπάρχει διότι δεν ικανοποιείται η προυπόθεση:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. Κεφ. 4
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 2,3*

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης