ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Ενότητα 8η : Σειρές Taylor και Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Λουκάς Βλάχος

Καθηγητής Αστροφυσικής

Τμήμα Φυσικής Α.Π.Θ

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σκοποί ενότητας

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την ανάλυση μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών σε πολυώνυμο με τη βοήθεια του αναπτύγματος Taylor και θα συζητήσουμε της πεπλεγμένες συναρτήσεις, τις Ιακωβιανές ορίζουσες και τη συναρτησιακή εξάρτηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Περιεχόμενα ενότητας

1. Θεώρημα της μέσης τιμής και σειρές Taylor

2. Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Θεώρημα της μέσης τιμής και σειρές Taylor

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Το θεώρημα της μέσης τιμής που το συναντήσαμε ήδη στο διαφορικό λογισμό των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, θα το γενικεύσουμε εδώ χωρίς να το αποδείξουμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέσης Τιμής): Εάν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και διαφορίσιμη στον κυρτό τόπο $D \subseteq R^n$ και $M_0 \in D$, τότε η ολική μεταβολή

$$\Delta f = f(M) - f(M_0) = [\, df \,]_{P_0}$$

όπου $M(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n) \in D$ και $P_0(x_1^0 + \theta_0 \Delta x_1, \ldots, x_n^0 + \theta_0 \Delta x_n)$, $0 < \theta_0 < 1$ είναι σημείο του τμήματος M_0M.

Ο τύπος του Taylor

Έστω η μετατόπιση f $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, η τιμή της συνάρτησης γύρω από το σημείο $M_0(x_0, y_0)$ είναι

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0)$$

$$+ \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0)$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_0\, y_0)}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{(y - y_o)^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_0\, y_0)}{\partial y^2}$$

$$+ (x - x_o)(y - y_o) \frac{\partial^2 f(x_0\, y_0)}{\partial y\, \partial x}$$

+ όρους ανώτερης τάξης

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως τύπος του Taylor της συνάρτησης f στο σημείο M_0.

Θεώρημα Μέσης Τιμής Taylor

Επίσης πολύ σημαντικό είναι και το θεώρημα μέσης τιμής του Taylor.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Taylor :) Δίνεται η συνάρτηση f : D → R^1, ορισμένη στον κυρτό τόπο D ∈ R^n και έστω $M_0(x^0{}_1, \ldots, x^0{}_n)$ ένα σημείο του D. Αν η συνάρτηση f έχει διαφορικά μέχρι (n + 1) τάξης στον τόπο D, τότε για οποιοδήποτε σημείο $M(x^0{}_1 + \Delta x_1, \ldots, x^0{}_n + \Delta x_n) \in D$ υπάρχει $P(x^0{}_1 + \theta_0\, \Delta x_1, \ldots, x^0{}_n + \theta_0\, \Delta x_n) \in D$ με $0 < \theta_0 < 1$ του τμήματος MM_0 τέτοιο ώστε η ολική μεταβολή της f στο M_0 να δίνεται από τη σχέση

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}[d^k f]_{Mo} + \frac{1}{(n+1)!}[\, d^{n+1} f\,]_{Po} \qquad (1)$$

όπου το $d^k f$ έχει ήδη οριστεί ως $d^k f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)^k$.

Τύπος Mac-Laurin

Εάν το σημείο M_0 είναι η αρχή των αξόνων, τότε ο τύπος του Taylor παίρνει τη μορφή

$$f(x, y) = f(0, 0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} f(0,0)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{k!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta_0 x, \theta_0 y), \quad 0 < \theta_0 < 1.$$

Ο νέος τύπος αυτός είναι γνωστός ως **τύπος Mac-Laurin**.

Υπόλοιπο Taylor

Ο όρος

$$\mathbb{Q}_{\mathrm{n}} = \frac{1}{(\mathrm{n}+1)!}\left[\mathrm{d}^{\mathrm{n}+1}\,\mathrm{f}\,\right]_{\mathrm{Po}}$$

ονομάζεται υπόλοιπο του τύπου του Taylor . Στην περίπτωση που ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}_{\mathrm{n}} = 0\,,$$

η σειρά που προκύπτει ονομάζεται σειρά Taylor της συνάρτησης f στο σημείο M_0.

Σχόλιο

Η αξία του τύπου του Taylor βρίσκεται στο γεγονός ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα απλό πολυώνυμο που να προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια μία πολύπλοκη συνάρτηση στη γειτονιά μιας γνωστής τιμής της συνάρτησης. Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε τη τιμή μιας πολύπλοκης συνάρτησης σε ένα σημείο M_0 και θέλουμε να προσεγγίσουμε τη τιμή της συνάρτησης στη γειτονιά του σημείου, με πολυώνυμο πρώτης, δεύτερης ή και υψηλότερης τάξης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα της σειράς Taylor.

Παράδειγμα

Βρείτε τη σειρά Taylor για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = e^{x^2}\sin xy$$

γύρω από το σημείο (2,0) διατηρώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια υπολογίστε μια προσεγγιστική τιμή του f(1.98, 0.015).

Απάντηση 1/2

Στο (2, 0) βρίσκουμε $f = 1$, $f_x = 0$, $f_y = 8$, $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 12$, $f_{yy} = 64$. Συνεπώς, η σειρά Taylor για την $f(x, y)$ γύρω από το (2, 0) είναι

$$f(x, y) = f(2, 0) + (x - 2)\, f_x(2, 0) + y\, f_y(2, 0)$$

$$+ \frac{1}{2!}\, [(x - 2\,)^2 f_{xx}(2, 0) +$$

$$+ 2(x - 2)\, y\, f_{xy}(2, 0) + y^2 f_{yy}(2, 0)] + \ldots =$$

$$= 1 + 8y + 12(x - 2)y + 32y^2 + \ldots$$

Αν αντικαταστήσουμε το x με $2 + \Delta x$, και το y με Δy, στην τελευταία εξίσωση παίρνουμε

$$f(2 + \Delta x, \Delta y) = 1 + 8\Delta y + 12\, \Delta x\, \Delta y + 32\, \Delta y^2$$

Απαντηση 2/2

Αν θέσουμε $\Delta x = -0.02$, $\Delta y = 0.015$, και αγνοήσουμε όρους μεγαλύτερης από δεύτερης τάξης των $\Delta x, \Delta y$, έχουμε

$$f(1.98, 0.015) = 1 + (8 + 12\Delta x + 32\Delta y)\Delta y$$

$$= 1.124$$

με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Για σύγκριση, η ακριβής τιμή είναι 1.1235, με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων.

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Ορισμός

Σε πολλές εφαρμογές των Μαθηματικών καταλήγουμε σε σχέσεις της μορφής

$$f(x, y, z) = 0.$$

Απο τη σχέση αυτή μπορούμε να ορίσουμε μια μεταβλητή (π.χ την z) ως εξαρτημένη απο τις άλλες (π.χ. $F(x, y, z(x, y)) = 0$). Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται πεπλεγμένες συναρτήσεις.

Ορισμός: Ονομάζουμε πεπλεγμένη συνάρτηση κάθε συνάρτηση $z(x, y)$ με πεδίο ορισμού $D \subseteq R^2$ που είναι λύση της εξίσωσης $F(x, y, z(x, y)) = 0$.

Θεώρημα

Το βασικό ερώτημα τώρα είναι: Με ποιες προϋποθέσεις η εξίσωση $F(x, y, z(x, y)) = 0$ έχει λύση; Την απάντηση θα μας δώσει το θεώρημα που ακολουθεί το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ: ΄Εστω $F(x, y, z) = 0$ μία συνάρτηση τριών μεταβλητών η οποία πληροί τις παρακάτω συνθήκες:

- Είναι συνεχής και η παράγωγος F_z υπάρχει και είναι συνεχής σε μία περιοχή $\pi(M(x_0, y_0, z_0),) \in R^3$.
- Η $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, ενώ $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Τότε υπάρχουν θετικοί αριθμοί α,β,γ τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ και $y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ δέχεται μία και μοναδική λύση εντός του διαστήματος $(z_0 - \gamma, z_0 + \gamma)$, η οποία τείνει στο z_0 όταν τα x και y τείνουν στο x_0, y_0.

Πρώτη Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης 1/2

Αν θεωρήσουμε ότι το z είναι συνάρτηση των x, y (π.χ. $F(x, y, z(x, y)) = 0$), τότε οι παράγωγοι της πεπλεγμένης συνάρτησης $z(x, y)$ βρίσκεται ως εξής: Τα x και y εμφανίζονται ταυτόχρονα και στη συνάρτηση F αλλά και στην συνάρτηση z, άρα το διαφορικό της F θα είναι

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \qquad (2)$$

επίσης $dz = z_x dx + z_y dy$. Αντικαθιστώντας την έκφραση για το dz στην εξίσωση (2) έχουμε,

$$(F_x + F_z z_x)dx + (F_y + F_z z_y)dy = 0.$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

Πρώτη Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης 2/2

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \qquad (3)$$

και αν το $(\partial \mathrm{F}/\partial \mathrm{z}) \neq 0$, τότε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\partial \mathrm{F}/_{\partial \mathrm{x}}}{\partial \mathrm{F}/_{\partial \mathrm{z}}} \qquad (4)$$

όμοια υπολογίζεται και η παράγωγος $(\partial \mathrm{z}/\partial \mathrm{y})$.

Δεύτερη παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης 1/2

Η παράγωγος δεύτερης τάξης υπολογίζεται εύκολα από τη σχέση (3). Για παράδειγμα η δεύτερη παράγωγος $\partial^2 z/\partial x^2$ μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

ή

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

Δεύτερη παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης 2/2

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

ή

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

οπότε,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{F_Z F_{ZZ} - 2F_X F_z F_{XZ} + {F_x}^2 F_{ZZ}}{{F_z}^3}$$

όμοια υπολογίζουμε και τις παραγώγους $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ και $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)$

Παράδειγμα 1

Έχω μια συνάρτηση της μορφής $F=x^2y^2+x^2e^2=7$. Να υπολογιστεί η δεύτερη παράγωγος της στο σημείο (1,1).

Λύση:

Υπολογίζουμε τις ποσότητες z_x και z_{xx}

$$z_x|_{(1,1)} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{2xy^2+2xe^z}{x^2e^z} = -7/3$$

και

$$z_{xx}|_{(1,1)} = \frac{2y^2+2e^z+4xz_xe^z+x^2(z_x)^2e^z}{x^2e^z} = 7/9$$

Παράδειγμα 2

Αν η εξίσωση F(x, y, z) = 0 μπορεί να επιλυθεί για οποιαδήποτε από τις μεταβλητές x, y, z συναρτήσει των άλλων δύο, δείξτε ότι

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1\,,$$

όταν η μεταβλητή έξω από κάθε παρένθεση διατηρείται σταθερή κατά την παραγώγιση.

Απάντηση

Θεωρώντας αρχικά το x ως συνάρτηση των y και z, παίρνουμε με παραγώγιση ως προς y

$$F_x x_y + F_y = 0, \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{F_y}{F_x} \quad (6)$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\frac{F_z}{F_y}, \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{F_x}{F_z} \quad (7)$$

Πολλάπλασιάζοντας τις (6) και (7) κατά μέλη έχουμε

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Ιακωβιανή Ορίζουσα

Ορίζουμε ως Ιακωβιανή ορίζουσα ή απλά Ιακωβιανή των διαφορισίμων συναρτήσεων $f_1(x_1, x_2)$ και $f_2(x_1, x_2)$, που ορίζονται στον τόπο $D \subseteq R^2$, την ορίζουσα

$$J = \frac{D(f_1,f_2)}{D(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

Συναρτησιακή Εξάρτηση

Δύο συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ όταν είναι ορισμένες στον τόπο D, θα λέμε ότι είναι συναρτησιακά εξαρτημένες, αν υπάρχει συνάρτηση F τέτοια ώστε

$$F(f_1, f_2) = 0.$$

Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα

΄Εστω οι συναρτήσεις $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ των ανεξαρτήτων μεταβλητών x_1, x_2, των οποίων οι πρώτες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στον τόπο D που ορίζονται. Θα λέμε ότι, οι συναρτήσεις f_1, f_2 είναι συναρτησιακά εξαρτημένες, αν η Ιακωβιανή

$$J = \frac{D(f_1, f_2)}{D(x_1, x_2)} = 0 \qquad (8)$$

στο τόπο D.

Απόδειξη: ΄Ενας απλός τρόπος να ελέγξουμε, αν οι f_1, f_2 είναι εξαρτημένες, είναι να παραγωγίσουμε την F ως προς x_1 και x_2,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial f_1}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial F}{\partial f_1}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial f_2}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

Απόδειξη

Οι παράγωγοι $\partial F/\partial f_1$ και $\partial F/\partial f_2$ δεν είναι δυνατόν να είναι ταυτοτικά ίσες με το μηδέν διότι τότε η $F(f_1, f_2)$ θα είναι σταθερή και ανεξάρτητη απο τα f_1 και f_2. Το παραπάνω σύστημα επιδέχεται λύση διάφορη της προφανούς μόνο όταν το $J = 0$ στο τόπο D.

Στην αντίθετη περίπτωση ($J \neq 0$), όπως αναφέραμε ήδη, δεν υπάρχει εξαρτηση μεταξύ των f_1 και f_2 και μπορούμε να λύσουμε ως προς x_1 και x_2.

Παράδειγμα 3

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$f_1 = x^2 + y^2 + z^2$, $f_2 = xy + yz + zx$, $f_3 = x + y + z$ είναι εξαρτημένες.

<u>Απόδειξη</u>: Η Ιακωβιανή ορίζουσα αποδεικνύεται ότι είναι

$$J = \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 0$$

και οι συναρτήσεις f_1, f_2, f_3 συνδέονται με τη σχέση $f_1 = f_2{}^3 - 2f_2$.

Παράδειγμα 4

Έστω

$$f(x, y, z, u, v,w) = x - u\sin v \cos w$$
$$g(x, y, z, u, v,w) = y - u\sin v \sin w$$
$$h(x, y, z, u, v,w) = z - u\cos v$$

Υπολογίστε τις Ιακωβιανές

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} \text{ και } \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)}$$

Απάντηση: Η πρώτη Ιακωβιανή είναι

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} f_u & f_v & f_w \\ g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \end{vmatrix} = -u^2 \sin v,$$

ενώ η δεύτερη $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,v)} = \begin{vmatrix} f_x & f_v \\ g_x & g_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -u\cos v \cos w \\ 0 & -u\cos v \sin w \end{vmatrix} = -u\cos v \sin w.$

Βιβλιογραφία

1. Βλάχος Λ., *Διαφορικός Λογισμός Πολλών Μεταβλητών με σύντομη εισαγωγή στο Mathematica*, Εκδ. Τζίολα, 2008. *Κεφ. 5*
2. Finney R. L., Giordano F. R., Weir M. D., *Απειροστικός Λογισμός (Ενιαίος τόμος)*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2012. *Κεφ. 2,8*

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος Ενότητας

Επεξεργασία: Φίλιογλου Μαρία

Θεσσαλονίκη, 2014

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης