

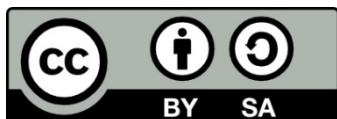


Στατιστική

Ενότητα 2^η: Τυχαίες μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής
Πιθανότητας

Γεώργιος Ζιούτας

Τμήμα Χημικών Μηχανικών Α.Π.Θ.



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



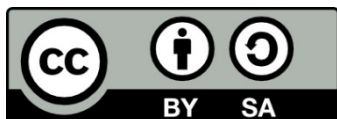
Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Τυχαίες Μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής Πιθανότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Περιεχόμενα ενότητας

1. Έννοια Τυχαίας Μεταβλητής.
2. Συναρτήσεις Μάζας ή Πυκνότητας Πιθανότητας.
3. Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμός – Παραδείγματα

Τυχαία Μεταβλητή

Τυχαία Μεταβλητή

- Σε ένα πείραμα τύχης E το οποίο σχετίζεται με τον δειγματικό χώρο S , ονομάζουμε τυχαία μεταβλητή μία συνάρτηση X , η οποία αντιστοιχεί σε κάθε δειγματοσημείο $s \in S$ έναν πραγματικό αριθμό $X(s)=x$.



Παράδειγμα 1

- Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές και παρατηρούμε την ένδειξη.
- Καταγράφουμε όλα τα ενδεχόμενα του δειγματοχώρου.
- Ορίζουμε σαν τυχαία μεταβλητή X μια συνάρτηση που μετράει τον αριθμό των κεφαλών σε κάθε ενδεχόμενο (Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή).



Παράδειγμα 2

- Έστω πείραμα όπου μετράμε τη θερμοκρασία του εδάφους.
- Ο δειγματικός χώρος είναι κομμάτι των πραγματικών αριθμών από την ελάχιστη μέχρι τη μέγιστη θερμοκρασία.
- Η τυχαία μεταβλητή X απεικονίζει το σύνολο του δειγματικού χώρου, και παίρνει άπειρες τιμές (Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή).





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμός

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή

- Εάν το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X (δηλαδή το πεδίο τιμών R_x) είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο, ονομάζουμε την X διακριτή τυχαία μεταβλητή.
- Όλες οι δυνατές τιμές της X μπορούν να απαριθμηθούν σαν $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, όπου στην πεπερασμένη περίπτωση η αρίθμηση σταματά σε κάποιο n ενώ στην άπειρη αρίθμηση συνεχίζει ατελείωτα.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμός – Ιδιότητες – Παραδείγματα

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας

Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (1/2)

Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής

- Έστω μια **διακριτή** τυχαία μεταβλητή X με πεδίο τιμών $R_x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$
- Για κάθε δυνατή τιμή x_i σχετίζουμε μια πιθανότητα $p(x_i) = P(X=x_i)$.
- Το σύνολο που περιέχει τα διατεταγμένα ζευγάρια $(x_i, p(x_i))$, $i=1,2,3,\dots,n$ καλείται συνάρτηση μάζας πιθανότητας (σμπ) της X ,
 $f(x_i) = P(X=x_i) = p(x_i) = p_i$.



Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας (2/2)

Διακριτής Τυχαία Μεταβλητή

- Επειδή η συνάρτηση μάζας πιθανότητας ορίζεται σαν πιθανότητα, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:
- $f(x_i) \geq 0$ για κάθε i ,
- $\sum_i f(x_i) = 1$



Παράδειγμα 3

- Σε ένα πείραμα ρίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να φανεί κεφαλή.
- Εάν με την πρώτη φορά έρθει κεφαλή, σταματάει το πείραμα, αλλιώς συνεχίζουμε να ρίχνουμε το νόμισμα.
- Καταγράφουμε όλα τα ενδεχόμενα.
- Ο δειγματικός χώρος έχει άπειρα αλλά αριθμήσιμα ενδεχόμενα - είναι διακριτός.
- Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας;



Παράδειγμα 4 (1/4)

- Ένας εργολάβος υποβάλλει προσφορές για 3 έργα, Α, Β και Γ.
- Υπάρχει πιθανότητα να πάρει ένα έργο (Α, Β, ή Γ), δύο έργα, τρία έργα ή και κανένα.



Παράδειγμα 4 (2/4)

- Ποια είναι η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τον αριθμό των έργων που κερδίζει ο εργολάβος;
- Να βρεθεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας.
- Ισχύει:

$$P(A) = 0,50, P(B) = 0,80, P(\Gamma) = 0,20.$$



Παράδειγμα 4 (3/4)

- Ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0,5)(0,8) = 0,40$$

$$P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma) = (0,5)(0,2) = 0,10$$

$$P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma) = (0,8)(0,2) = 0,16$$

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(B)P(A)P(\Gamma) = (0,5)(0,8)(0,2) = 0,08$$

- Υπολογίζουμε τις πιθανότητες $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ και $P(X=3)$.



Παράδειγμα 4 (4/4)

- Ισχύει:

$$P(X=0) = 1 - P(A \cup B \cup \Gamma)$$

$$P(X=1) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) \\ - 2(P(A \cap B) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap \Gamma)) \\ + 3P(A \cap B \cap \Gamma)$$

$$P(X=2) = P(A \cap B) + P(B \cap \Gamma) + P(A \cap \Gamma) \\ - 3P(A \cap B \cap \Gamma)$$

$$P(X=3) = P(A \cap B \cap \Gamma)$$





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμός

Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή

Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή

- Εάν το σύνολο όλων των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X (δηλαδή το πεδίο τιμών R_x) είναι άπειρο μη μετρήσιμο, ονομάζουμε την X συνεχή τυχαία μεταβλητή.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμός – Παραδείγματα

Συνάρτηση Πυκνότητας

Πιθανότητας

Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

- Για μια **συνεχή** τυχαία μεταβλητή X , μία συνάρτηση $f(x)$ καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σππ) αν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

$$1) f(x) \geq 0$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$3) P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$



Παράδειγμα 5 (1/4)

- Έστω ότι X είναι η τυχαία μεταβλητή η οποία παριστάνει το βάρος χημικής βοτάνης σε ένα πακέτο.
- Το X μπορεί να πάρει τιμές μεταξύ 40 και 50.
- Να οριστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το βάρος χημικής βοτάνης στο πακέτο.
- Να βρεθεί η πιθανότητα το βάρος της χημικής βοτάνης στο πακέτο να πάρει τιμές μεταξύ 40 και 44.



Παράδειγμα 5 (2/4)

- Για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το βάρος χημικής βοτάνης στο πακέτο ισχύει:

$$\int_{40}^{50} f(x) dx = \int_{40}^{50} c dx = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{50 - 40} = \frac{1}{10}$$



Παράδειγμα 5 (3/4)

- Στη γενική περίπτωση, όπου το X μπορεί να πάρει τιμές μεταξύ α και β , ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}$$



Παράδειγμα 5 (4/4)

- Η πιθανότητα το βάρος του πακέτου να είναι μεταξύ 40 και 44 ή $P(X \leq 44)$ είναι:

$$P(X \leq 44) = \int_{40}^{44} \frac{1}{10} dx = \frac{4}{10}$$





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμός

Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας

Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας

- Έστω μία τυχαία μεταβλητή X .
- Η συνάρτηση $F(x)$, η οποία πληροί την ακόλουθη ιδιότητα,

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ για } -\infty < x < \infty$$

ονομάζεται **αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας** (ασπ) ή απλά **συνάρτηση κατανομής**.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ορισμός – Γραφική παράσταση

Αθροιστική Συνάρτηση

Πιθανότητας

Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής

Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας Διακριτής Τυχαίας Μεταβλητής

- Εάν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, το γεγονός $\{X \leq x\}$ είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή X θα πάρει μια οποιαδήποτε τιμή x_i μικρότερη του x , δηλαδή με την ένωση των ασυμβίβαστων μεταξύ τους γεγονότων,

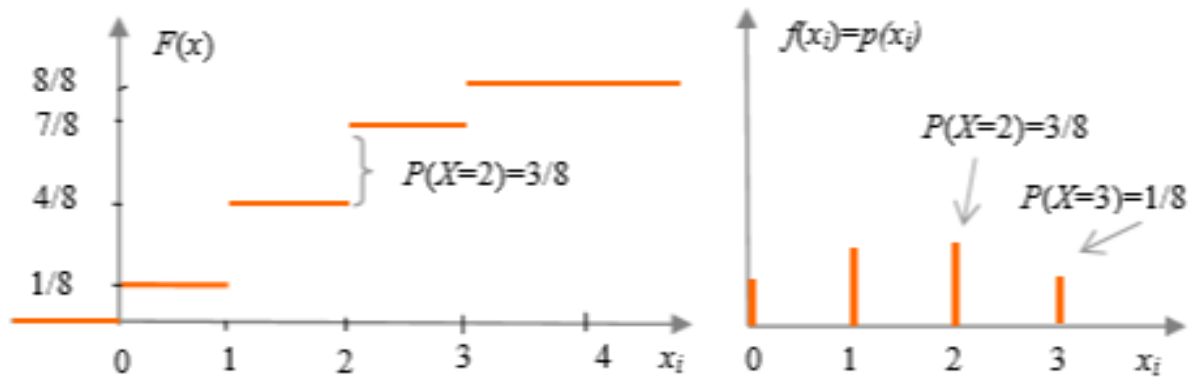
$$\{X \leq x\} = \{(X = x_1) \cup (X = x_2) \cup \dots \cup (X = x_i)\}$$

- Σύμφωνα με το τρίτο αξίωμα του Kolmogorov καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα,

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$



Γραφική παράσταση ασπ και συμπ διακριτής τυχαίας μεταβλητής



Σχήμα 1. Γραφική παράσταση αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας και συνάρτησης μάζας πιθανότητας διακριτής τυχαίας μεταβλητής





Ορισμός – Γραφική παράσταση - Παραδείγματα

Αθροιστική Συνάρτηση

Πιθανότητας

Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

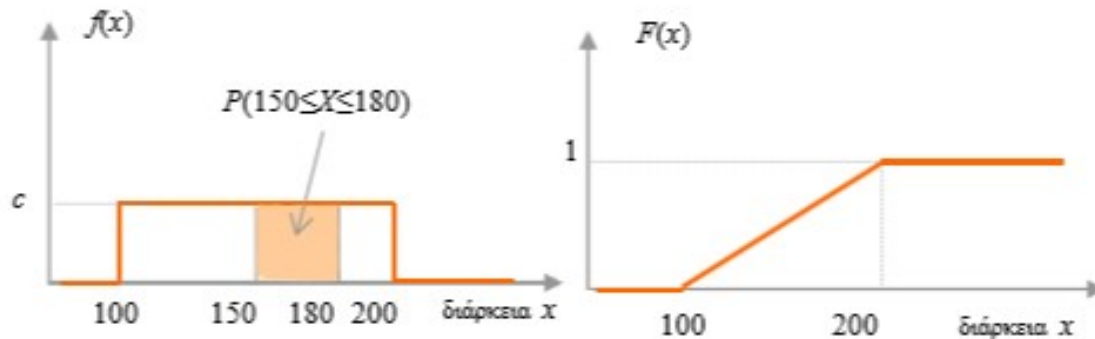
Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

- Εάν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή,

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$$



Γραφική παράσταση σππ και ασκ συνεχούς τυχαίας μεταβλητής



Σχήμα 2. Γραφική παράσταση συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστικής συνάρτησης κατανομής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ιδιότητες

Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας

Ιδιότητες Αθροιστικής Συνάρτησης Πιθανότητας (1/3)

α) $F(-\infty) = 0$ και $F(\infty) = 1$.

β) Η συνάρτηση $F(X)$ είναι αύξουσα. Δηλαδή, αν $x_1 \leq x_2$ έχουμε $F(x_1) \leq F(x_2)$.

γ) Η $F(x)$ είναι πάντα συνεχής από τα δεξιά. Δηλαδή,

$$\lim_{e \rightarrow 0} F(x+e) = F(x)$$

δ) Για κάθε $x_1 \leq x_2$ ισχύει $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.



Ιδιότητες Αθροιστικής Συνάρτησης Πιθανότητας (2/3)

$$\varepsilon) \quad P(X=x) = F(x) - \lim_{e \rightarrow 0} F(x-e)$$

- αν X συνεχής, $P(X=x) = 0$

- αν X διακριτή στο σημείο x , $P(X=x) \neq 0$.



Ιδιότητες Αθροιστικής Συνάρτησης Πιθανότητας (3/3)

στ)

-αν η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές $x_1 < x_2 < \dots$ τότε

$$p(x_i) = P(X=x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

-αν η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή τότε

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$



Παράδειγμα 6 (1/3)

- Η κατανάλωση πετρελαίου σε έναν τόπο είναι τυχαία (συνεχής) μεταβλητή X , η οποία μπορεί να πάρει τιμές από το 0 μέχρι το 500.
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:
$$f(x) = \alpha x \quad (0 \leq x \leq 200)$$
$$f(x) = \beta_1 x + \beta_2 \quad (200 \leq x \leq 500)$$
- Να υπολογιστούν οι παράμετροι α , β_1 και β_2 .
- Να βρεθεί η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας.



Παράδειγμα 6 (2/3)

- Ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\alpha(200) = \beta_1(200) + \beta_2$$

$$\beta_1(500) + \beta_2 = 0$$

$$\alpha(200) = 1/250$$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων και προκύπτει:

$$\alpha = \frac{1}{50000} \quad \beta_1 = -\frac{1}{75000} \quad \beta_2 = \frac{1}{150}$$



Παράδειγμα 6 (3/3)

- Αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας:

$$F(x) = 0, x < 0$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \alpha u \, du = \alpha \frac{x^2}{2}, 0 \leq x \leq 200$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{\alpha 200^2}{2} + \int_{200}^x (\beta_1 u + \beta_2) \, du$$

$$F(x) = \frac{2}{5} + \beta_1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{200^2}{2} \right) + \beta_2 (x - 200), 200 \leq x \leq 500$$

$$F(x) = 1, x > 500$$



Παράδειγμα 7 (1/2)

- Η διάρκεια της επίδρασης μιας δύναμης πάνω σε ένα σημείο μιας μηχανής είναι τυχαία μεταβλητή που μπορεί να κρατήσει μέχρι 16 sec.
- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει τις εκφράσεις,
$$f(x) = 0 \quad (t < 0)$$
$$f(x) = \alpha t^2 \quad (0 < t \leq 12)$$
$$f(x) = c \quad (12 \leq x \leq 16)$$
- Να υπολογιστούν οι παράμετροι α, c .



Παράδειγμα 7 (2/2)

- Ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\alpha 12^2 = c$$

$$\int_0^{12} \alpha t^2 dt + \int_{12}^{16} c dt = 1$$

- Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων και προκύπτουν οι παράμετροι α , c .
- Αντίστοιχα με το παράδειγμα 6 μπορεί να οριστεί η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας.



Παράδειγμα 8 (1/4)

- Σε μία επισκευή νομισμάτων με συγκόλληση, ελέγχουμε αν υπάρχουν ραγίσματα, με τη χρήση μηχανήματος με ακτίνες laser.
- Αν υπάρχει ράγισμα, το μηχάνημα το ανιχνεύει με πιθανότητα 90%.
- Αν υπάρχουν δύο ραγίσματα, η πιθανότητα να μην ανιχνεύσει κανένα είναι:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = P(A_1)P(A_2) = 0,1(0,1) = 0,01$$



Παράδειγμα 8 (2/4)

- Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα μία συγκόλληση:
 - να μην έχει κανένα κανένα ράγισμα είναι 40%,
 - να έχει μόνο ένα ράγισμα είναι 50%,
 - να έχει δύο ραγίσματα είναι 10%.
- Η τυχαία μεταβλητή X που παριστάνει τον αριθμό των ραγισμάτων που έχει μία συγκόλληση παίρνει τιμές $X=\{0,1,2\}$, με συνάρτηση μάζας πιθανότητας:
 $f(x) = 0,4$ ($X=0$), $f(x) = 0,5$ ($X=1$) και $f(x) = 0,1$ ($X=2$).
- Ποια η πιθανότητα η συσκευή να μην ανιχνεύσει κανένα ράγισμα;



Παράδειγμα 8 (3/4)

- Ισχύει:

$$P(X=0) = 0,4$$

$$P(X=1) = 0,5$$

$$P(X=2) = 0,1$$

- Η πιθανότητα η μηχανή να μην ανιχνεύσει κανένα ράγισμα είναι:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|X=0)P(X=0) \\ &+ P(A|X=1)P(X=1) \\ &+ P(A|X=2)P(X=2) \end{aligned}$$



Παράδειγμα 8 (4/4)

- Επιπλέον ισχύει:

$$P(A/X=0) = 0$$

$$P(A/X=1) = 0,1$$

$$P(A/X=2) = 0,01$$

- Με αντικατάσταση των όρων της εξίσωσης προκύπτει η ζητούμενη πιθανότητα.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Ασκήσεις προς επίλυση

Αθροιστική Συνάρτηση Πιθανότητας

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Γεώργιος Ζιούτας.
«Στατιστική. Ενότητα 2η: Τυχαίες μεταβλητές, Συναρτήσεις Κατανομής
Πιθανότητας». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή
διεύθυνση:

<http://eclass.auth.gr/courses/OCRS248/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά - Παρόμοια Διανομή [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

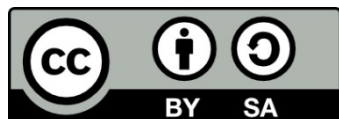
[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>





Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Βασιλική Μπατζιάκα
Θεσσαλονίκη, Μάιος 2015



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Βιβλιογραφία

1. "Πιθανότητες και Στοιχεία Στατιστικής για Μηχανικούς", Γεώργιος Χ. Ζιούτας, εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη 2003.
<http://search.lib.auth.gr/Record/484966>
2. "Εφαρμογές Πιθανοτήτων και Στατιστικής στη Μελέτη και Προγραμματισμό Τεχνικών Έργων", Α. Η.-.S Ang και W.H. Tang, μετάφραση Δ. Παναγιωτακόπουλος, εκδόσεις Αφοί Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 2003. <http://search.lib.auth.gr/Record/887881>
3. Σημειώσεις για το Μέρος Α του μαθήματος, Γιώργος Ζιούτας.
<http://users.auth.gr/DKUGIU/Teach/ChemicalEngineer/zioutasbook.pdf>.
4. Σημειώσεις για το Μέρος Β του μαθήματος, Δημήτρης Κουγιουμτζής, ανατύπωση ΑΠΘ, 2009.
<http://users.auth.gr/dkugiu/Teach/ChemicalEngineer/index.html>.





ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

