ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Στατιστική για Χημικούς Μηχανικούς

Ενότητα **2**: Εκτίμηση Παραμέτρων

Κουγιουμτζής Δημήτρης
Τμήμα Χημικών Μηχανικών

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Διάστημα εμπιστοσύνης μέσης τιμής

Διάστημα εμπιστοσύνης διασποράς

Διάστημα εμπιστοσύνης μέσης τιμής

Διάστημα εμπιστοσύνης διαφορών

Εκτίμηση Παραμέτρων

Εισαγωγικά στην εκτίμηση παραμέτρων

τ.μ. X με κατανομή $F_X(x;\theta)$
Παράμετρος θ: άγνωστη
$\theta \quad \rightarrow \quad \mu, \sigma^2, p$
Δείγμα $\{x_1, \ldots, x_n\}$: γνωστό

Εκτίμηση παραμέτρου

1. Σημειακή εκτίμηση: $\hat{\theta}$
2. Εκτίμηση διαστήματος: $[\theta_1, \theta_2]$

Άλλο δείγμα $\rightarrow$ άλλα δεδομένα $\{x_1, \ldots, x_n\}$
$\Downarrow$
$\{x_1, \ldots, x_n\}$ συμβολίζουν:
1. Παρατηρήσεις
2. τ.μ. $\{X_1, \ldots, X_n\}$ με κατανομή $F_X(x;\theta)$

Σημειακή Εκτίμηση

$\hat{\theta}$: εκτιμήτρια της θ

$\hat{\theta}$ είναι συνάρτηση των τ.μ. $\{x_1, \ldots, x_n\}$

$$\Downarrow$$

$\hat{\theta}$ είναι τ.μ., $\quad \mathrm{E}(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}, \; \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma^2_{\hat{\theta}}$

Εκτίμηση μέσης τιμής (δειγματική μέση τιμή)

$$\theta \to \mu \qquad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Εκτίμηση διασποράς (δειγματική διασπορά)

$$\theta \to \sigma^2 \qquad \tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

Κριτήρια καλών εκτιμητριών

1. Αμεροληψία

$\hat{\theta}$ αμερόληπτη: $\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$
αλλιώς η μεροληψία είναι $b(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta$

Παραδείγματα

- Η δειγματική μέση τιμή $\bar{x}$ είναι αμερόληπτη: $\mathrm{E}(\bar{x}) = \mu$

$$\mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu$$

- Η δειγματική διασπορά s^2 είναι αμερόληπτη: $\mathrm{E}(s^2) = \sigma^2$?
- Η δειγματική διασπορά $\tilde{s}^2$ είναι μεροληπτική:

$$b(\tilde{s}^2) = \mathrm{E}(\tilde{s}^2) - \sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Ασυμπτωτικά ($n \to \infty$) η $\tilde{s}^2$ είναι αμερόληπτη

Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

2. Συνέπεια

$\hat{\theta}$ συνεπής: $\mathrm{P}(|\theta - \hat{\theta}| \leq \epsilon) \to 1 \quad$ όταν $\quad n \to \infty$

Παραδείγματα

- $\bar{x}$, s^2, $\tilde{s}^2$ είναι συνεπείς
- Η εκτιμήτρια της μ: $x_d = (x_{\min} + x_{\max})/2$ δεν είναι συνεπής

3. Αποτελεσματικότητα

Δύο εκτιμήτριες $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ της θ:
$\hat{\theta}_1$ είναι πιο αποτελεσματική από $\hat{\theta}_2$ όταν $\sigma^2_{\hat{\theta}_1} < \sigma^2_{\hat{\theta}_2}$

Παράδειγμα

- $\bar{x}$ είναι πιό αποτελεσματική από τη x_d γιατί $\sigma^2_{\bar{x}} < \sigma^2_{x_d}$.

Κριτήρια καλών εκτιμητριών (συνέχεια)

4. Επάρκεια

$\hat{\theta}$ είναι επαρκής όταν χρησιμοποιεί όλη την πληροφορία από το δείγμα που σχετίζεται με τη θ.

Παραδείγματα

• $\bar{x}$, s^2, $\tilde{s}^2$ είναι επαρκείς γιατί χρησιμοποιούν όλες τις παρατηρήσεις $\{x_1, \ldots, x_n\}$

• x_d δεν είναι επαρκής γιατί χρησιμοποιεί μόνο $x_{\min}$ και $x_{\max}$.

Παρατηρήσεις

- Μια καλή εκτιμήτρια πρέπει να πληρεί αυτές τις ιδιότητες.
- Βέλτιστη εκτιμήτρια: αμερόληπτη και με ελάχιστη διασπορά

Θέμα 4

Εξισορρόπηση μεροληψίας και διασποράς εκτίμησης: το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (mean square error).

Υπολογισμός σημειακής εκτίμησης

Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη θ παράμετρο κατανομής $F(x;\theta)$ μιας τ.μ. X από τα ανεξάρτητα δεδομένα $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Μέθοδος των Ροπών

1. Εκτιμούμε πρώτα τις ροπές της κατανομής:
   - ροπή πρώτου βαθμού: $\mu \quad \leftarrow \bar{x}$
   - ροπή δευτέρου βαθμού: $\sigma^2 \quad \leftarrow s^2$
2. Από τη σχέση της θ με τις ροπές υπολογίζουμε την εκτίμηση $\hat{\theta}$.

Παραδείγματα

• Κανονική κατανομή: παράμετροι μ και σ^2 είναι οι ίδιες ροπές (άμεση εκτίμηση).

• Ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$: παράμετροι a και b υπολογίζονται από $\mu = \frac{a+b}{2}$ και $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$ (έμμεση εκτίμηση).

Παράδειγμα: Μετρήσεις πορώδους ηλίου σε γαιάνθρακες

Α/Α	x_i	x_i^2
1	5.3	28.1
2	4.5	20.2
3	5.7	32.5
4	5.8	33.6
5	4.8	23.0
6	6.4	41.0
7	6.4	41.0
8	5.6	31.4
9	5.8	33.6
10	5.7	32.5
11	5.5	30.2
12	6.1	37.2
13	5.2	27.0
14	7.0	49.0
15	5.5	30.2
16	5.7	32.5
17	6.3	39.7
18	5.6	31.4
19	5.5	30.2
20	5.0	25.0
21	5.8	33.6
22	4.7	22.1
23	6.1	37.2
24	6.7	44.9
25	5.1	26.0
Σύνολο	141.8	813.3

Υποθέτουμε κανονική κατανομή:
παράμετροι μ και σ^2
Εκτίμηση μέσης τιμής:

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{1}{25}141.8 = 5.67$$

Για s^2, υπολογίζουμε πρώτα το άθροισμα τετραγώνων

$$\sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 813.3$$

Εκτίμηση διασποράς:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{25-1}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25\cdot\bar{x}^2\right) \\ &= \frac{1}{24}(813.3 - 25\cdot 5.67^2) = 0.375 \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$:
παράμετροι a και b
Εκτίμηση των a και b:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \tfrac{a+b}{2} \\ s^2 &= \tfrac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \bar{x} - \sqrt{3}s \\ \hat{b} &= \bar{x} + \sqrt{3}s \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\hat{a} = 4.61$$
$$\hat{b} = 6.73$$

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας

Δίνονται ανεξάρτητα $\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \sim F(x;\theta)$
$\rightarrow$ ποια είναι η πιο πιθανή τιμή για τη θ;
$f(x_i;\theta)$ ή $\mathrm{P}(X = x_i;\theta)$ για κάποια τιμή $X = x_i$
Συνάρτηση πιθανοφάνειας (πιθανότητα να παρατηρήσουμε $\{x_1, \dots, x_n\}$ σ' ένα τυχαίο δείγμα)

$$L(x_1, \dots, x_n;\theta) = f(x_1;\theta) \cdots f(x_n;\theta)$$

Άν $L(x_1, \dots, x_n;\theta_1) > L(x_1, \dots, x_n;\theta_2)$ τότε θ_1 πιο αληθοφανής από θ_2
Η 'πιό αληθοφανήσ' τιμή της θ: αυτή που μεγιστοποιεί τη $L(x_1, \dots, x_n;\theta)$ ή $\log L(x_1, \dots, x_n;\theta)$.
Εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}$ δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial \log L(x_1, \dots, x_n;\theta)}{\partial \theta} = 0.$$

Μέθοδος Μεγίστης Πιθανοφάνειας (συνέχεια)

Θέλουμε να εκτιμήσουμε $\theta_1, \ldots, \theta_m$
Συνάρτηση πιθανόφανειας: $L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)$
Εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_m$ δίνονται από

$$\frac{\partial \log L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος μεγίστης πιθανοφάνειας μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε θ αν ξέρουμε την κατανομή $F_X(x; \theta)$.
- Η μέθοδος των ροπών δεν εφαρμόζεται αν η θ δε μπορεί να υπολογισθεί από τις ροπές.
- Η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας είναι αμερόληπτη (ασυμπτωτικά), συνεπής, αποτελεσματική κι επαρκής.

Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής

$\{x_1, \ldots, x_n\}$ από κανονική κατανομή $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ και σ^2 γνωστή

$$f_X(x;\mu) \equiv f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{εκτίμηση του } \mu;$$

συνάρτηση πιθανόφανειας

$$L(x_1, \ldots, x_n; \mu) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right]$$

$$\log L(x_1, \ldots, x_n; \mu) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας $\hat{\mu}$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Εκτίμηση παραμέτρων κανονικής κατανομής (συνέχεια)

Και η διασπορά σ^2 άγνωστη

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$$

Η επίλυση δίνει για μ, $\hat{\mu} = \bar{x}$, και για σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \tilde{s}^2$$

Εκτίμηση Διαστήματος εμπιστοσύνης

Μελετήσαμε την εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ παραμέτρου θ:
Αν γνωρίζουμε την κατανομή της X και είναι $F_X(x;\theta)$, τότε βρίσκουμε τη $\hat{\theta}$ με

1. Μέθοδο ροπών
2. Μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας

Ανεξάρτητα από την κατανομή της X έχουμε τους εκτιμητές:

$$\begin{aligned} \theta := \mu \quad &\rightarrow \quad \hat{\theta} = \bar{x} \\ \theta := \sigma^2 \quad &\rightarrow \quad \hat{\theta} = s^2 \quad \text{ή} \quad \hat{\theta} = \tilde{s}^2 \end{aligned}$$

Η τιμή της εκτιμήτριας $\hat{\theta}$ εξαρτάται από το δείγμα $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
$\hat{\theta}$ **είναι τ.μ.** με $\mathrm{E}(\hat{\theta}) \equiv \mu_{\hat{\theta}}$, $\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \equiv \sigma^2_{\hat{\theta}}$

Κατανομή της $\hat{\theta}$? $\mathrm{E}(\hat{\theta})$? $\mathrm{Var}(\hat{\theta})$?

Με βάση την κατανομή της $\hat{\theta}$ θέλουμε να ορίσουμε ένα διάστημα $[\theta_1, \theta_2]$ που θα περιέχει με κάποια πιθανότητα την πραγματική τιμή της θ.

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ

Εκτιμήτρια (σημειακή εκτίμηση) της μ: $\bar{x}$

$$
\begin{aligned}
\mu_{\bar{x}} &= \mathrm{E}(\hat{\mu}) = \mu \\
\sigma^2_{\bar{x}} &= \mathrm{Var}(\bar{x}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \frac{1}{n^2}(n\cdot\sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n} \\
\sigma_{\bar{x}} &= \sigma/\sqrt{n} \quad \text{σταθερό σφάλμα}
\end{aligned}
$$

Η κατανομή της $\bar{x}$ εξαρτάται από

1. τη διασπορά της X, σ^2 (γνωστή / άγνωστη)
2. την κατανομή της X (κανονική ή όχι)
3. μέγεθος του δείγματος n (μεγάλο / μικρό)

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ - γνωστή διασπορά σ^2

Για την κατανομή της $\bar{x}$ έχουμε δύο περιπτώσεις

$$\boxed{1}\, X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\vee\; \boxed{2}\, n > 30 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

$$X \nsim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \;\wedge\; n < 30 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \sim \quad ?$$

$\boxed{1}$ Αν η κατανομή της X είναι κανονική

$\Downarrow$

κατανομή της $X_1 + \ldots + X_n$ είναι κανονική

$\Downarrow$

η κατανομή της $\bar{x}$ είναι κανονική

$\boxed{2}$ Αν το δείγμα είναι μεγάλο $n > 30$

$\Downarrow$ Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

η κατανομή της $\bar{x}$ είναι κανονική

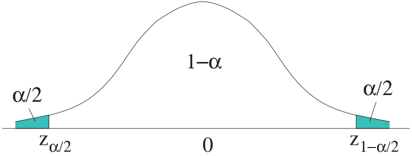
Θέμα 5

Αν ρίξουμε πολλά νομίσματα ο συνολικός αριθμός των κεφαλών θα ακολουθεί κανονική κατανομή

γνωστό σ^2 και $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή

$$\bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n) \quad \Rightarrow \quad z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Για κάθε πιθανότητα α (και $1-\alpha$) υπάρχουν οι αντίστοιχες τιμές της z, $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$:



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}(z < z_{\alpha/2}) = \Phi(z_{\alpha/2}) = \alpha/2 \\ \mathrm{P}(z > z_{1-\alpha/2}) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha/2}) = 1 - (1-\alpha/2) = \alpha/2 \end{array}\right\}$$

$$\mathrm{P}(z < z_{\alpha/2} \ \vee \ z > z_{1-\alpha/2}) = \alpha \quad \Rightarrow$$
$$\mathrm{P}(z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}) = \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Από τον στατιστικό πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής

Δίνεται πιθανότητα $1-\alpha \Rightarrow$ κρίσιμη τιμή $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$

γνωστό σ^2, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

η z ανήκει στο διάστημα $[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}] = [-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$ με πιθανότητα $1-\alpha$.

Από το μετασχηματισμό $z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ έχουμε για τα άκρα του διαστήματος $[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$

$$-z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad z_{1-\alpha/2} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Λύνουμε ως προς μ

$$\mu = \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \mu = \bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ σε επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$

$$\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

γνωστό σ^2, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

Ερμηνεία διαστήματος εμπιστοσύνης

- ‘με πιθανότητα (εμπιστοσύνη) $1-\alpha$ η μέση τιμή μ βρίσκεται μέσα σ΄ αυτό το διάστημα’
  ΟΧΙ
- ‘αν χρησιμοποιούσαμε πολλά τέτοια διαστήματα από διαφορετικά δείγματα, ποσοστό $(1-\alpha)\%$ από αυτά θα περιείχαν τη μ’
  ΝΑΙ

  ή

  ‘με $1-\alpha$ πιθανότητα (εμπιστοσύνη) το διάστημα αυτό θα περιέχει την πραγματική μ’
  ΝΑΙ

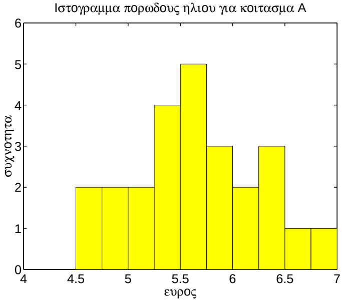
γνωστό σ^2, $\bar{x}$ ακολουθεί κανονική κατανομή (συνέχεια)

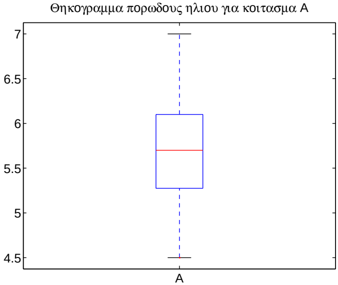
Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. Επιλογή του $1-\alpha$, σ γνωστό, $\bar{x}$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο $\left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για το μέσο ποσοστό πορώδες ηλίου σε γαιάνθρακα του κοιτάσματος A;
Δίνεται $\sigma^2 = 0.38$





συμμετρία, όχι μακριές ουρές, όχι ακραία σημεία

$$\Downarrow$$

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, 0.38) \qquad \mu = ?$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$X \sim \mathrm{N}(\mu, 0.38) \Rightarrow \bar{x} \sim \mathrm{N}(\mu, 0.38/25)$

$$\bar{x} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} x_i = \frac{141.8}{25} = 5.67$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. $1-\alpha = 0.95, \quad \sigma = \sqrt{0.38}, \quad \bar{x} = 5.67.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$
3. $\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad 5.67 \pm 1.96\frac{\sqrt{0.38}}{5} \quad \rightarrow \quad [5.43,\ 5.91]$

Συμπέρασμα:
Σε 95% επίπεδο εμπιστοσύνης περιμένουμε το μέσο ποσοστό πορώδους ηλίου σε γαιάνθρακα με βάση το δείγμα του κοιτάσματος Α να κυμαίνεται μεταξύ 5.43 και 5.91

Διάστημα εμπιστοσύνης της μ, άγνωστη διασπορά σ^2

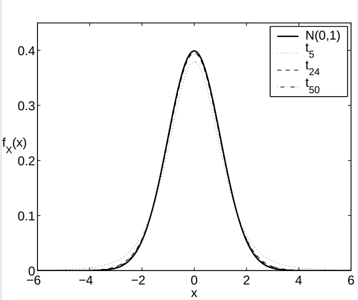
Περίπτωση 1: μεγάλο δείγμα ($n > 30$)

$s^2 \quad \rightarrow \quad \sigma^2 : \qquad \left[\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \;\; \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

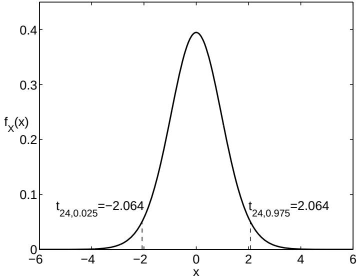
Περίπτωση 2: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Τότε ισχύει $t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$

κατανομή student με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας



Άγνωστη διασπορά σ^2



Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. Επιλογή του $1-\alpha$, σ άγνωστο, $\bar{x}$ και s από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $t_{n-1,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή student.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
$$\left[\bar{x} - t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \ \bar{x} + t_{n-1,1-\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

Άγνωστη διασπορά σ^2

Περίπτωση 3: μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \not\sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Μη-παραμετρική μέθοδος

Θέμα 6

Μη-παραμετρική μέθοδος: διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο (Wilcoxon)

Θέμα 7

Μη-παραμετρική μέθοδος: διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή με τη μέθοδο bootstrap

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για το μέσο πορώδες ηλίου γαιάνθρακα από το κοίτασμα Α; $[\sigma^2$ άγνωστο$]$

Μικρό δείγμα ($n < 30$) και $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$, βαθμοί ελευθερίας: $n-1 = 24$

$$s^2 = \frac{1}{24}\left(\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25 \cdot (5.67)^2\right) = \frac{1}{24}(813.3 - 804.3) = 0.375$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του μ

1. $1-\alpha = 0.95, \quad \bar{x} = 5.67, \quad s^2 = 0.375.$
2. Κρίσιμη τιμή: $t_{24,0.975} = 2.064$.
3. $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \;\rightarrow\; 5.67 \pm 2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} \;\rightarrow\; [5.42,\ 5.92]$

Αν $z_{0.975} = 1.96$ αντί $t_{24,\,0.975} = 2.064$

$5.67 \pm 1.96 \frac{\sqrt{0.375}}{5} \quad \rightarrow \quad [5.52, 5.82]$

Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της μ

διασπορά	*X-κατανομή*	n	$\bar{x}$*-κατανομή*	*δ.ε.*
γνωστή	κανονική		$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
γνωστή	μη κανονική	μικρό	—	—
άγνωστη		μεγάλο	$z \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	κανονική	μικρό	$t \equiv \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim \mathrm{t}_{n-1}$	$\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
άγνωστη	μη κανονική	μικρό	—	—

Γενικά για το δ.ε. της μ βρίσκεται από

$\bar{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ή $\bar{x} \pm t_{n-1,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$

Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης)

Το διάστημα εμπιστοσύνης εξαρτάται από:

- την κατανομή και τη σ^2 της τ.μ. X
- το μέγεθος n του δείγματος
- το επίπεδο εμπιστοσύνης $1-\alpha$

Για δεδομένο εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης μπορούμε να βρούμε το μέγεθος n που αντιστοιχεί από τον αντίστοιχο τύπο.

Ενδεικτική περίπτωση: $n < 30$, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ και σ^2 άγνωστο

εύρος του δ.ε. $w = 2t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Για εύρος w πρέπει το δείγμα να έχει μέγεθος

$$n = \left(2t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2 \quad \text{ή} \quad n = \left(2z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{w}\right)^2$$

ανάλογα με το n που βρίσκουμε.

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα (πορώδες ηλίου), χρησιμοποιώντας t-κατανομή βρήκαμε 95% δ.ε.

$5.67 \pm 2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} \quad \longrightarrow \quad [5.42, 5.92]$

Εύρος δ.ε.: $\quad 2 \cdot 2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} = 0.50$ ή ισοδύναμα

ακρίβεια γύρω από τη $\bar{x}$: $\quad 2.064 \frac{\sqrt{0.375}}{5} = 0.25$

Αν θέλουμε εύρος 0.20 (ή ακρίβεια 0.10), πόσο πρέπει να μεγαλώσει το δείγμα;

(κανονική κατανομή) $n = \left(2 \cdot 1.96 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 92.2 \simeq 93$

(κατανομή student)

$t_{24,0.975} = 2.064 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 2.064 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 102.2 \simeq 102$

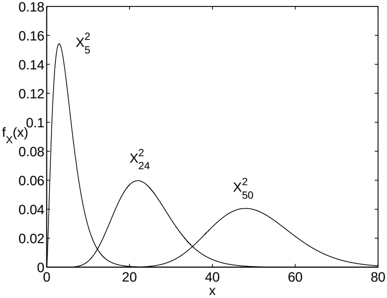
$t_{101,0.975} = 1.984 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 1.984 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 94.5 \simeq 95$

$t_{94,0.975} = 1.985 \quad \rightarrow \quad n = \left(2 \cdot 1.985 \cdot \frac{\sqrt{0.375}}{0.25}\right)^2 = 94.6 \simeq 95$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2

s^2 εκτιμήτρια της σ^2

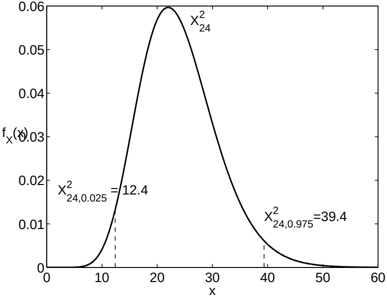
Δίνεται $\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$



- Για πολύ μεγάλο n: $\mathcal{X}^2_{n-1} \quad \rightarrow \quad$ κανονική
- $\mathcal{X}^2_{n-1}$ δεν είναι συμμετρική κατανομή
- δύο κρίσιμες τιμές:

$$\chi^2_{n-1,\alpha/2} \quad \rightarrow \quad P(\chi^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}) = \alpha/2$$
$$\chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \quad \rightarrow \quad P(\chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2 (συνέχεια)



$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \chi^2 < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{P}\left(\chi^2_{n-1,\alpha/2} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{P}\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 1-\alpha$$

Διάστημα εμπιστοσύνης της σ^2 (συνέχεια)

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του σ^2

1. Επιλογή του $1-\alpha$, s^2 από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμων τιμών $\chi^2_{n-1,\alpha/2}$ και $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή $\mathcal{X}^2_{n-1}$.
3. Αντικατάσταση στον τύπο $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right]$

Διάστημα εμπιστοσύνης της τυπικής απόκλισης σ

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ έχει ως άκρα τις τετραγωνικές ρίζες των αντίστοιχων άκρων του 95% δ.ε. για τη διασπορά σ^2.

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}},\ \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}}\right]$$

Παράδειγμα

Διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 95% για τη διασπορά του πορώδους ηλίου γαιάνθρακα ενός κοιτάσματος Α;

$\chi^2 \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$, βαθμοί ελευθερίας: $n-1=24$

$s^2 = 0.375$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του σ^2

1. $1-\alpha = 0.95$, $s^2 = 0.375$.
2. Κρίσιμες τιμές: $\chi^2_{24,0.025} = 12.4$ και $\chi^2_{24,0.975} = 39.4$.
3. $\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right] = \left[\frac{24\cdot 0.375}{39.4}, \frac{24\cdot 0.375}{12.4}\right] = [0.228, 0.726]$

Το 95% δ.ε. για την τυπική απόκλιση σ του πορώδους ηλίου γαιάνθρακα είναι
$[\sqrt{0.228}, \sqrt{0.726}] = [0.478, 0.852]$.

Διάστημα εμπιστοσύνης της αναλογίας p

αναλογία $p = \frac{M}{N}$
M: στοιχεία του πληθυσμού που πληρούν μια ιδιότητα (‘επιτυχία’)
N: σύνολο όλων των στοιχείων του πληθυσμού

Δείγμα μεγέθους n και m ‘επιτυχίες’
Εκτιμήτρια της p : $\hat{p} = \frac{m}{n}$

Για μεγάλο n: $\hat{p} \sim \mathrm{N}(p, \frac{p(1-p)}{n})$

$$\Downarrow$$

$$z \equiv \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

διάστημα $\Downarrow$ εμπιστοσύνης

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\Downarrow \quad p \quad \rightarrow \quad \hat{p} \quad \Downarrow$$

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του p

1. Επιλογή του $1-\alpha$, $\hat{p}$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα τυπικής κανονικής κατανομής.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

Εύρος διαστήματος εμπιστοσύνης

Εύρος δ.ε. της p: $\quad w = 2z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\Longrightarrow \quad n = \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}}{w}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p}) \quad$ αλλά p άγνωστο!

Μπορεί να δειχθεί ότι: $\quad \max \hat{p}(1-\hat{p}) = 0.25$

$\Longrightarrow \quad n = \left(\frac{2z_{1-\alpha/2}}{w}\right)^2 0.25 = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{w}\right)^2$

Παράδειγμα

95% διάστημα εμπιστοσύνης για την αναλογία σκουριασμένων ραβδών χάλυβα μιας αποθήκης;

Δείγμα από $n = 100$ ράβδους και $m = 12$ σκουριασμένες.

Σημειακή εκτίμηση: $\hat{p} = \frac{12}{100} = 0.12$.

Διαδικασία εκτίμησης του διαστήματος εμπιστοσύνης του p

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \hat{p} = 0.12$.
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = 1.96$.
3. $\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \rightarrow \quad 0.12 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12\cdot(1-0.12)}{100}} \quad \rightarrow$ $[0.056, 0.184]$

Μέγιστο n του δείγματος για $w = 0.05$;
$n = \left(\frac{1.96}{0.05}\right)^2 = 1536.6 \simeq 1537$

Θέμα 8

Διάστημα εμπιστοσύνης και εκτίμηση μεγέθους δείγματος για αναλογία σε πεπερασμένο πληθυσμό

Άσκηση

Έγιναν 15 μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου (Δ.Ο.) σε ένα ποτάμι (σε mg/l)

1.8	2.0	2.1	1.7	1.2	2.3	2.5	2.9	1.6	2.2	2.3	1.8	2.4	1.6	1.9

Από παλιότερες μετρήσεις γνωρίζουμε ότι η διασπορά του Δ.Ο. είναι $0.1\,(mg/l)^2$.

1. Εκτιμείστε τη διασπορά της συγκέντρωσης Δ.Ο. από το δείγμα καθώς και τα διαστήματα εμπιστοσύνης σε επίπεδο 99% και 90%. Εξετάστε και για τα δύο επίπεδα εμπιστοσύνης αν μπορούμε να δεχτούμε την εμπειρική τιμή της διασποράς γι αυτό το δείγμα.
2. Εκτιμείστε τη μέση συγκέντρωση Δ.Ο. από το δείγμα και δώστε γι αυτήν 95% διάστημα εμπιστοσύνης υποθέτοντας πρώτα ότι η διασπορά είναι γνωστή και μετά χρησιμοποιώντας αυτήν του δείγματος.
3. Αν υποθέσουμε ότι για ένα εργοστάσιο δίπλα στο ποτάμι είναι σημαντικό η μέση συγκέντρωση Δ.Ο. να μην πέφτει κάτω από $1.8\,mg/l$, θα προκαλούσαν ανησυχία αυτές οι παρατηρήσεις (διασπορά από το δείγμα);

Άσκηση (συνέχεια)

4. Αν δε μας ικανοποιεί το εύρος του τελευταίου παραπάνω διαστήματος και θέλουμε να το μειώσουμε σε $0.2\, mg/l$ πόσες επιπρόσθετες ημερήσιες μετρήσεις πρέπει να γίνουν;
5. Ένας άλλος τρόπος να ελέγξουμε αν η συγκέντρωση του Δ.Ο. πέφτει σε μη επιθυμητά επίπεδα είναι να δούμε αν το ποσοστό των ημερών που η τιμή της συγκέντρωσης Δ.Ο. πέφτει στο επίπεδο $1.6\, mg/l$ και κάτω ξεπερνάει το 15%. Εκτιμείστε αυτό το ποσοστό από το δείγμα. Μπορείτε να δώσετε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό; Πόσο πρέπει να είναι το μέγεθος του δείγματος για να μπορεί να εκτιμηθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το ποσοστό με πλάτος το πολύ 10%;

Διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $\mu_1 - \mu_2$

τ.μ. X_1 με μέση τιμή μ_1 τ.μ. X_2 με μέση τιμή μ_2

Διαφορά $\mu_1 - \mu_2$; [X_1 και X_2 ανεξάρτητες]

Δείγμα $\{x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}\} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1$

Δείγμα $\{x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n_2}\} \quad \rightarrow \quad \bar{x}_2$

Εκτιμήτρια της $\mu_1 - \mu_2$: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$; [όπως για $\bar{x}$]

Γνωστές διασπορές σ_1^2 και σ_2^2

Υποθέτουμε

$$(X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \wedge X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)) \vee (n_1 > 30 \wedge n_2 > 30)$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \; \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (ομοσκεδαστικές κατανομές)

διασπορά: $\sigma^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})$

Δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$, γνωστά σ_1^2 και σ_2^2

Η διαδικασία είναι όπως για δ.ε. της μ:

	μ	$\longrightarrow$	$\mu_1 - \mu_2$
εκτιμήτρια	$\bar{x}$	$\longrightarrow$	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
μέση τιμή της	μ	$\longrightarrow$	$\mu_1 - \mu_2$
διασπορά της	$\frac{\sigma^2}{n}$	$\longrightarrow$	$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
δ.ε.	$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\longrightarrow$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, σ_1, σ_2 γνωστά, $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο

$$\left[\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Παράδειγμα: Πορώδες ηλίου του γαιάνθρακα

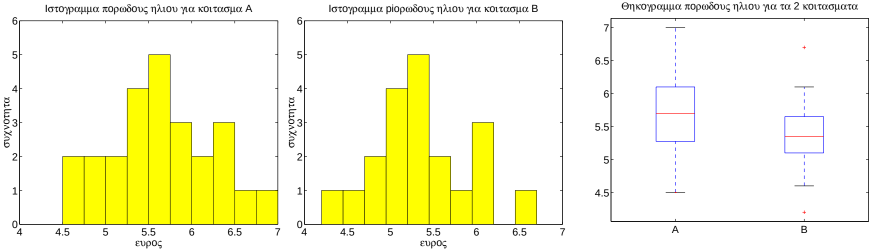
	τύπος A		τύπος B	
A/A	x_{1i}	x_{1i}^2	x_{2i}	x_{2i}^2
1	5.3	28.1	5.0	25.0
2	4.5	20.2	4.2	17.6
3	5.7	32.5	5.4	29.2
4	5.8	33.6	5.5	30.2
5	4.8	23.0	4.6	21.2
6	6.4	41.0	6.1	37.2
7	6.4	41.0	6.1	37.2
8	5.6	31.4	5.3	28.1
9	5.8	33.6	5.5	30.2
10	5.7	32.5	5.4	29.2
11	5.5	30.2	5.2	27.0
12	6.1	37.2	5.8	33.6
13	5.2	27.0	4.9	24.0
14	7.0	49.0	6.7	44.9
15	5.5	30.2	5.2	27.0
16	5.7	32.5	5.4	29.2
17	6.3	39.7	6.0	36.0
18	5.6	31.4	5.3	28.1
19	5.5	30.2	5.2	27.0
20	5.0	25.0	4.8	23.0
21	5.8	33.6		
22	4.7	22.1		
23	6.1	37.2		
24	6.7	44.9		
25	5.1	26.0		
Σύνολο	141.8	813.3	107.6	585.08

Παράδειγμα (συνέχεια)

Δίνεται ότι η διασπορά είναι κοινή και γνωστή $\sigma^2 = 0.38$

Ζητάμε δ.ε. για $\mu_1 - \mu_2$ Κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$;

- n_1 και n_2 είναι μικρά



$$\Downarrow$$

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, 0.38) \quad \text{και} \quad X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, 0.38)$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\bar{x}_1 = 5.67, \quad \bar{x}_2 = 5.38 \quad \rightarrow \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29$$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. $1-\alpha = 0.95, \quad \sigma = \sqrt{0.38}, \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$
3. $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} =$
   $0.29 \pm 1.96\sqrt{0.38 \cdot \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{20}\right)} \rightarrow [-0.073, 0.653]$

Συμπεράσματα

• Σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% **δε** μπορούμε να πούμε πως το πορώδες ηλίου διαφέρει σημαντικά στους γαιάνθρακες από τα δύο κοιτάσματα.

• Το διάστημα $[-0.073, 0.653]$ είναι σχεδόν θετικό αλλά δε δίνει στατιστικά σημαντική διαφορά $\Longrightarrow$ αύξηση των n_1, n_2.

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2

Περίπτωση 1: μεγάλα δείγματα $(n_1, n_2 > 30)$

$s_1^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_1^2 \qquad$ και $\qquad s_2^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_2^2$:

$$\left[\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}},\ \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right]$$

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 (συνέχεια)

Περίπτωση 2: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) **και**
$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2) \;\wedge\; X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ **και**
ομοσκεδαστικές κατανομές: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

Υπολογίζουμε πρώτα την εκτίμηση της κοινής διασποράς

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

s^2 είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της κοινής διασποράς σ^2
Εκτιμήτρια διασποράς της $\mu_1 - \mu_2$: $s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)$

$$\Downarrow$$

$$t \equiv \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$$

$$\Downarrow$$

$$(1-\alpha)\% \text{ δ.ε.: } (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Άγνωστες διασπορές σ_1^2 και σ_2^2 (συνέχεια)

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, s και $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $t_{n_1+n_2-2,\,1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για κατανομή student.
3. Αντικατάσταση στον τύπο
$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Περίπτωση 3: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) **και** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ **και** $(X_1 \nsim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2) \ \vee \ X_2 \nsim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2))$

Μη-παραμετρική μέθοδος

Περίπτωση 4: μικρά δείγματα (n_1 ή $n_2 < 30$) **και** $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Δεν υπάρχει γνωστή μέθοδος εκτίμησης δ.ε. (χρησιμοποιούνται τεχνικές επαναδειγματοληψίας)

Παράδειγμα:πορώδες ηλίου γαιάνθρακα, δύο κοιτάσματα

Οι διασπορές του πορώδες ηλίου στους γαιάνθρακες από τα κοιτάσματα A και B είναι άγνωστες
Μικρά δείγματα ($n_1 = 25$, $n_2 = 20$) **και**
κατανομές των X_1, X_2 κανονικές [ιστογράμματα, θηκογράμματα]

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29 \qquad s_1^2 = 0.375 \qquad s_2^2 = 0.326$

$s_1^2 \simeq s_2^2 \quad \rightarrow \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$s^2 = \frac{24 \cdot 0.375 + 19 \cdot 0.326}{43} = 0.353 \qquad s = 0.594$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $\mu_1 - \mu_2$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.29, \quad s = 0.594.$
2. Κρίσιμη τιμή: $t_{43,0.975} = 2.02$
3. $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} =$

   $0.29 \pm 2.02 \cdot 0.594 \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{20}} \quad \rightarrow \quad [-0.07, 0.65]$

Το μέσο πορώδες ηλίου γαιανθράκων δε διαφέρει σημαντικά στα δύο κοιτάσματα

Εκτίμηση διαστήματος εμπιστοσύνης της $\mu_1 - \mu_2$

διασπορές των X_1, X_2	κατανομή των X_1, X_2	n_1, n_2	κατανομή της $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$	διάστημα εμπιστοσύνης
γνωστές	κανονική		$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
γνωστές	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες/ίσες		μεγάλα	$z \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$	$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	κανονική	μικρά	$t \equiv \frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim \mathrm{t}_{n_1+n_2-2}$	$(\bar{x}_1-\bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,1-\alpha/2}\, s\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$
άγνωστες ίσες	μη κανονική	μικρά	—	—
άγνωστες άνισες		μικρά	—	—

Διάστημα εμπιστοσύνης της διαφοράς $p_1 - p_2$

p_1: Αναλογία στοιχείων με μια ιδιότητα στον ένα πληθυσμό
p_2: Αναλογία στοιχείων με μια ιδιότητα στον άλλο πληθυσμό
Διαφορά $p_1 - p_2$;
Δείγμα 1: μέγεθος n_1 και m_1 'επιτυχίες' $\quad \hat{p}_1 = \frac{m_1}{n_1}$
Δείγμα 2: μέγεθος n_2 και m_2 'επιτυχίες' $\quad \hat{p}_2 = \frac{m_2}{n_2}$

Εκτιμήτρια της $p_1 - p_2$: $\quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2$
Δίνεται ότι για μεγάλα n_1 και n_2

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim \mathrm{N}\left(p_1 - p_2, \ \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$z \equiv \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

και αντικαθιστούμε $p_1 \longrightarrow \hat{p}_1 \qquad p_2 \longrightarrow \hat{p}_2$

Διάστημα εμπιστοσύνης της $p_1 - p_2$ (συνέχεια)

$(1-\alpha)\%$ δ.ε. της $p_1 - p_2$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}.$$

Εναλλακτικά με χρήση κοινής αναλογίας $\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2}$:

$$\sigma^2_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}) \rightarrow (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$$

Διαδικασία εκτίμησης δ.ε. της $p_1 - p_2$

1. Επιλογή του $1-\alpha$, $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ από το δείγμα.
2. Εύρεση κρίσιμης τιμής $z_{1-\alpha/2}$ από τον πίνακα για τυπική κανονική κατανομή.
3. Αντικατάσταση στον τύπο $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

Παράδειγμα

Διαφορά στο ποσοστό σκουριασμένων ραβδών χάλυβα σε δύο αποθήκες;
Αποθήκη Α: $m_1 = 12$ στις $n_1 = 100$ είναι σκουριασμένες
Αποθήκη Β: $m_2 = 26$ στις $n_2 = 120$ είναι σκουριασμένες
$\hat{p}_1 = \frac{12}{100} = 0.12 \qquad \hat{p}_2 = \frac{26}{120} = 0.217$

Διαδικασία εκτίμησης του δ.ε. της $p_1 - p_2$

1. $1 - \alpha = 0.95, \quad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.12 - 0.217 = -0.097.$
2. Κρίσιμη τιμή: $z_{0.975} = 1.96$
3. $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} =$
   $-0.097 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12\cdot 0.88}{100} + \frac{0.217\cdot 0.783}{120}} \quad \rightarrow \quad [-0.198, 0.004]$

Αν και η διαφορά του ποσοστού σκουριασμένων ραβδών στο εργοστάσιο Β είναι κατά περίπου 10% μεγαλύτερη, σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95% δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Άσκηση

Έγιναν μετρήσεις της συγκέντρωσης διαλυμένου οξυγόνου (Δ.Ο.) σε δύο ποτάμια (σε mg/l)

1.8	2.0	2.1	1.7	1.2	2.3	2.5	2.9	1.6	2.2	2.3	1.8	2.4	1.6	1.9
2.3	2.1	1.9	2.6	2.9	1.5	3.1	2.1	2.7	2.3	2.6	2.5			

1. Βρείτε 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη διαφορά των μέσων συγκεντρώσεων Δ.Ο. στα δύο ποτάμια υποθέτοντας πρώτα ότι η διασπορά είναι γνωστή ($0.1\,(mg/l)^2$) και ίδια για τα δύο δείγματα και μετά χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των διασπορών από τα δείγματα. Μπορούμε να πούμε πως η μέση συγκέντρωση Δ.Ο. είναι ίδια στα δύο ποτάμια (στην κάθε περίπτωση);
2. Για το ίδιο πρόβλημα, σε 200 μετρήσεις στο πρώτο ποτάμι βρέθηκαν 26 τιμές κάτω από την κρίσιμη τιμή 1.6 mg/l και σε 200 μετρήσεις στο δεύτερο ποτάμι βρέθηκαν 18 τιμές κάτω από την κρίσιμη τιμή. Μπορούμε να πούμε σε επίπεδο 95% ότι η συγκέντρωση Δ.Ο. βρίσκεται σε μη επιθυμητά επίπεδα πιό συχνά στο πρώτο ποτάμι από ότι στο δεύτερο;

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Κουγιουμτζής Δημήτρης. «Στατιστική. Εκτίμηση παραμέτρων». Έκδοση: 1.0. Θεσσαλονίκη 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://eclass.auth.gr/courses/OCRS248/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΝΟΙΚΤΑ
ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Τέλος ενότητας

Επεξεργασία: Δρ. Μπατζιάκα Βασιλική

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2015

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.00.

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.